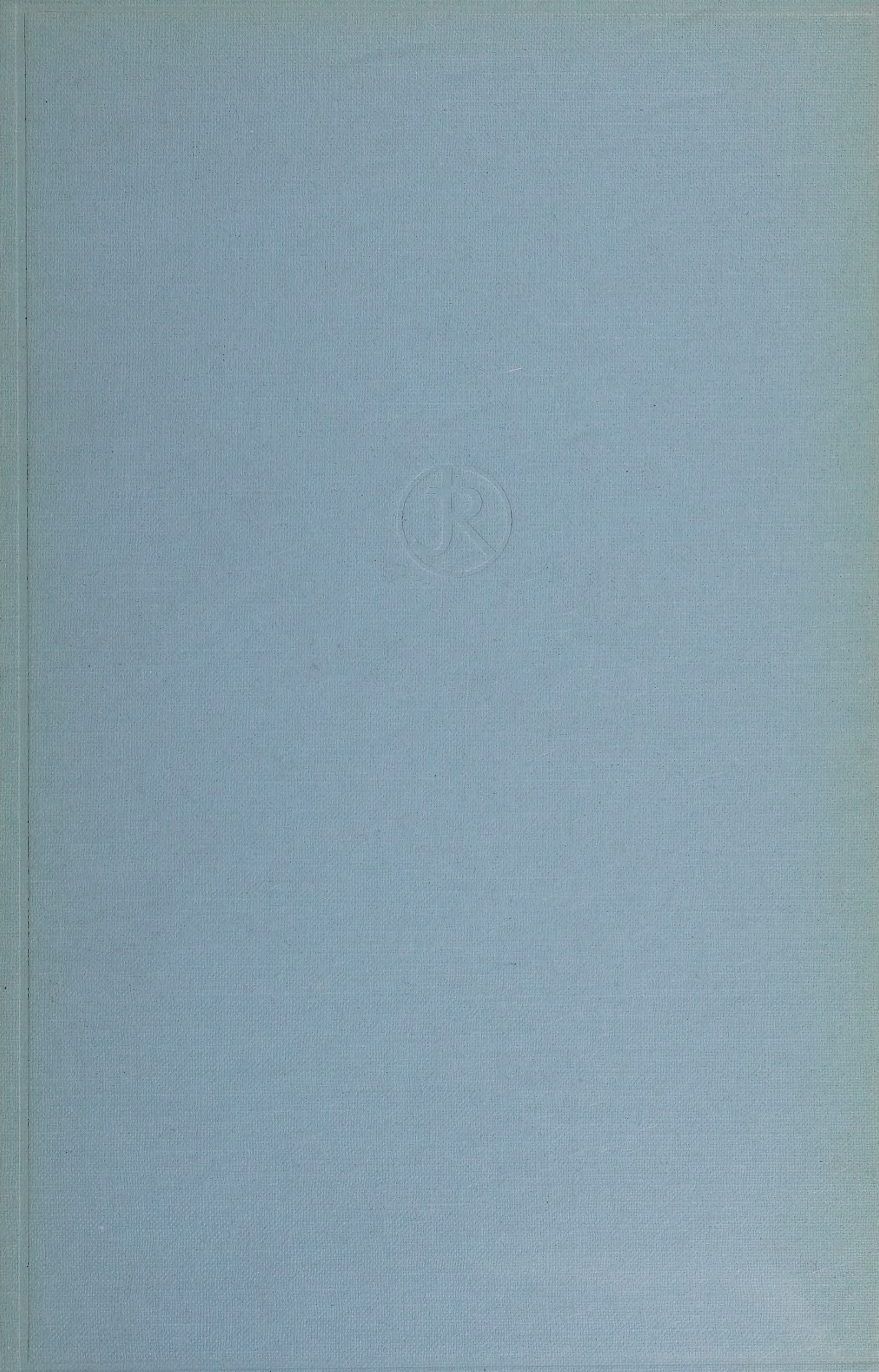
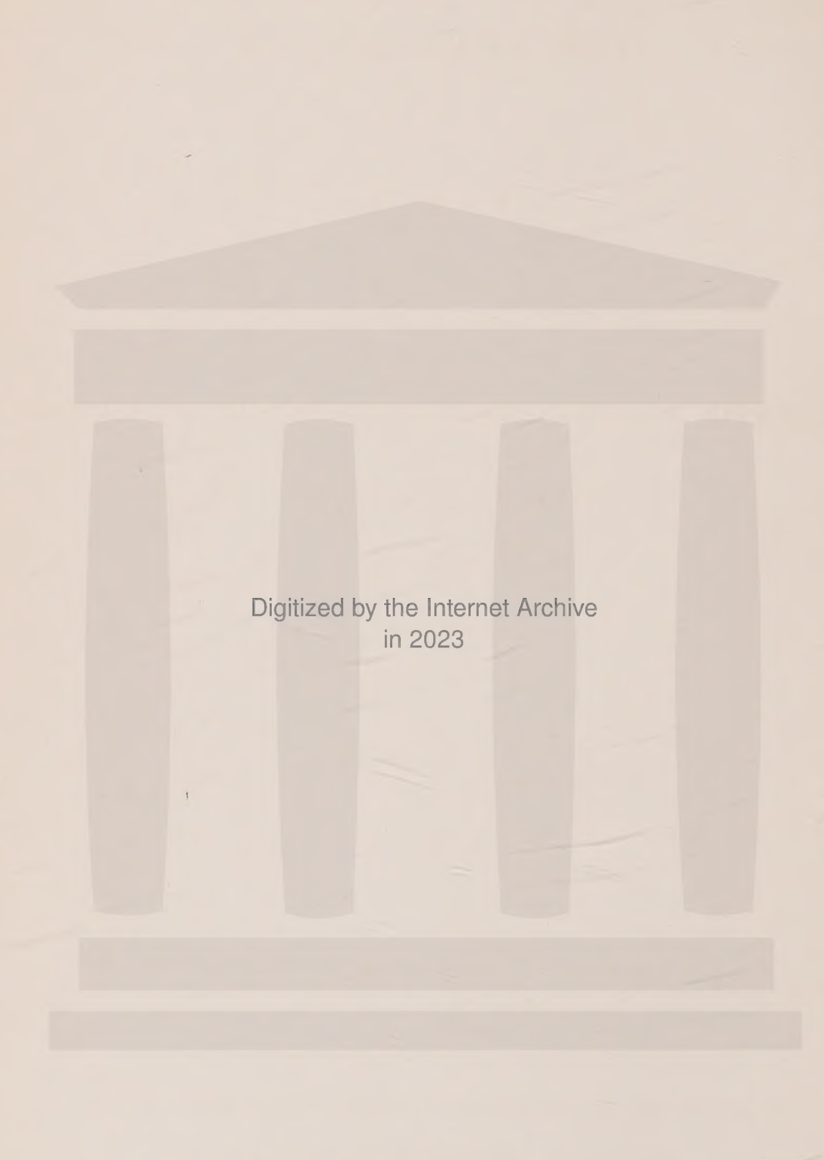




ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 9

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

SÉRIE MATHÉMATIQUE

Tome 9

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1945

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 3–64 Série mathématique

А. А. МАРКОВ

О СВОБОДНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе строится теория свободных топологических групп. С помощью этой теории можно построить топологическую группу, не являющуюся нормальным топологическим пространством.

Содержание

Введение

1. Первоначальной целью настоящих исследований была проблема нормальности топологических групп, которая естественно возникает в общей теории топологических групп. Действительно, как доказал Л. Понтрягин в неопубликованном письме А. Вейлю ([1]), всякая топологическая группа вполне регулярна *. Так как нормальность является следующим за полной регулярностью интересным свойством отделимости пространств, естественно поставить вопрос, не является ли всякая топологическая группа непременно нормальным пространством.

Мне удалось решить этот вопрос в отрицательном смысле, доказав следующую теорему:

Всякое вполне регулярное пространство может быть топологически вложено в линейное топологическое локально выпуклое пространство как замкнутое подмножество последнего **.

* Понятие вполне регулярного пространства введено А. Н. Тихоновым ([2]).

** Понятие линейного топологического локально выпуклого пространства введено А. Н. Колмогоровым ([3]).

Используя этот результат, мы можем построить топологическую группу, не являющуюся нормальным топологическим пространством, следующим образом. Пусть X — некоторое вполне регулярное, но не нормальное, пространство. Такие пространства существуют, как показал А. Н. Тихонов (²). В силу нашей теоремы, существует линейное топологическое локально выпуклое пространство S, топологически содержащее X в качестве замкнутого подмножества. S не может быть нормальным пространством, потому что иначе все его замкнутые подмножества были бы тоже нормальны*. Так как всякое линейное топологическое пространство есть абелева топологическая группа, S является примером ненормальной топологической группы.

Доказательство теоремы основано на некоторых идеях А. Вейля (¹) и на результате D. H. Hyers'а, относящемся к построению линейных топологических пространств посредством «псевдо-норм» (⁴).

2. Мое первоначальное доказательство упомянутой выше теоремы было существенно упрощено Е. Ливенсоном. Анализируя это упрощенное доказательство, любезно сообщенное мне автором, я заметил, что его основная идея дает гораздо больше и может быть применена и к другим задачам общей теории топологических групп. В настоящем введении я хочу кратко обрисовать эти задачи.

3. Между теорией дискретных групп и теорией топологических групп существует глубокая аналогия, иллюстрируемая следующей схемой:

группа	топологическая группа
подгруппа	замкнутая подгруппа
нормальный делитель	замкнутый нормальный делитель
фактор-группа	топологическая фактор-группа
изоморфизм	топологический изоморфизм
гомоморфизм	{ непрерывный гомоморфизм { открытый непрерывный гомоморфизм **

Здесь в левом столбце стоят теоретико-групповые понятия, в правом столбце — соответствующие понятия теории топологических групп. С помощью этой схемы соответствия мы можем, исходя из основных теорем о дискретных группах, формулировать ряд аналогичных теорем теории топологических групп. Заметим, однако, что вместо термина «гомоморфизм» следует ставить иногда «непрерывный гомоморфизм», а иногда — «открытый непрерывный гомоморфизм».

Существует, однако, важный раздел теории дискретных групп, не имеющий аналога в теории групп топологических. Мы имеем в виду теорию групп, заданных системой соотношений между порождающими

* В самом деле, пусть X—замкнутое подмножество нормального пространства S. Если F_1 и F_2—замкнутые подмножества X без общих точек, то они замкнуты и в S, и так как S нормально, то они могут быть отделены в S множествами H_1 и H_2, открытыми в S. Пересечения $X \cap H_1$ и $X \cap H_2$ будут открытыми множествами в X, отделяющими F_1 и F_2.

** Отображение φ топологического пространства X в топологическое пространство Y называем **открытым**, если образ всякого открытого подмножества пространства X при отображении φ является открытым подмножеством пространства Y. Это определение отличается от общепринятого тем, что при нашем определении открытое отображение может не быть непрерывным.

элементами. В этой теории мы исходим из некоторого произвольного множества, которое потом играет роль базиса конструируемой группы.

Желая развить аналогичную теорию топологических групп, определяемых соотношениями между порождающими элементами, мы прежде всего должны подобрать подходящий аналог «произвольного множества», играющего роль базиса. Естественно пытаться вместо «произвольного множества» брать «произвольное пространство» какого-либо класса. Не совсем ясно, однако, какой именно класс пространств следует для этого выбрать.

Упомянутая выше теорема Понтрягина подсказывает, как правдоподобную гипотезу, соответствие:

множество — вполне регулярное пространство.

В самом деле, так как полная регулярность есть «наследственное» свойство пространств ([2]), то, в силу теоремы Понтрягина, всякое подпространство топологической группы вполне регулярно. Таким образом, требование полной регулярности оказывается необходимым, и естественно попытаться обойтись без дальнейших ограничений.

4. Далее нам предстоит найти подходящий аналог понятия «порождающее множество». Но это уже легче, так как это понятие может быть определено следующим образом.

Пусть X — подмножество группы G. Мы говорим, что X порождает G, если не существует собственной подгруппы группы G, содержащей X.

Аналогичное определение формулируем так:

Определение 1. Пусть X есть подмножество топологической группы G. X *топологически порождает* G; если в G не существует собственной замкнутой подгруппы, содержащей X.

Заметим, что *подмножество X топологической группы G топологически порождает G тогда и только тогда, когда X порождает всюду плотную подгруппу G*. Это прямо следует из того факта, что замыкание подгруппы группы G само является подгруппой этой группы.

5. Наиболее важным орудием теории дискретных групп, заданных соотношениями, является понятие свободной группы. Оно может быть определено следующим образом:

Пусть группа F порождена множеством X. Мы скажем, что F есть свободная группа со свободным базисом X, если всякое соотношение

$$\prod_{i=1}^{m} x_i^{\varepsilon_i} = 1(F) \qquad (x_i \in X,\ \varepsilon_i = \pm 1), \tag{1}$$

удовлетворяющееся в F, тривиально; т. е. если левая часть его может быть приведена к $1(F)$ последовательными сокращениями пар вида $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$. Здесь $1(F)$ обозначает единицу группы F.

Для всякого множества X существует свободная группа F со свободным базисом X ([5]). Эта группа определяется единственным образом с точностью до изоморфизмов, переводящих элементы множества X самих в себя.

Для наших целей понятие свободной группы должно быть определено по-другому. Именно, легко доказать следующее предложение.

Пусть группа F порождена множеством X. Тогда для того, чтобы F была свободной группой со свободным базисом X, необходимо и достаточно следующее условие: каково бы ни было отображение φ множества X в произвольную группу G, существует гомоморфизм Φ группы F в G такой, что для любого элемента x из X

$$\varphi x = \Phi x. \tag{2}$$

В самом деле, пусть F — свободная группа со свободным базисом X, φ — отображение X в некоторую группу G. Всякий элемент $z \in F$ может быть представлен в виде

$$\prod_{i=1}^{m} x_i^{\varepsilon_i}, \tag{3}$$

где $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Для z существует много таких представлений, но, так как F свободная группа, от одного такого представления к другому можно перейти последовательными сокращениями и вставками пар $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ $(x \in X,\ \varepsilon = \pm 1)$. Поэтому произведение

$$\prod_{i=1}^{m} (\varphi x_i)^{\varepsilon_i}$$

не зависит от выбора представления z в виде (3) и тем самым определяется по z однозначно. Полагая

$$\Phi z = \prod_{i=1}^{m} (\varphi x_i)^{\varepsilon_i},$$

получим искомый гомоморфизм F.

С другой стороны, пусть группа F порождена множеством X и удовлетворяет нашему условию. Обозначим через F_0 свободную группу со свободным базисом X.

Тождественное отображение множества X на самого себя можно рассматривать как отображение X в F_0. В силу нашего условия существует гомоморфизм Φ группы F в F_0 такой, что для всякого $x \in X$

$$\Phi x = x. \tag{4}$$

Если теперь мы имеем в F некоторое соотношение вида (1), то в силу (4) оно имеет место и в F_0, ибо Φ есть гомоморфизм. Так как F_0 — свободная группа со свободным базисом X, то (1) тривиально. Следовательно, F — свободная группа со свободным базисом X

6. Мы видим, что основная теорема существования теории свободных групп может быть формулирована следующим образом:

Если X — произвольное множество, то существует группа F, обладающая свойствами:

1° X есть подмножество F;

2° X порождает F;

3° каково бы ни было отображение φ множества X в какую угодно группу G, существует гомоморфизм Φ группы F в G, для которого справедливо (2) при всяком $x \in X$.

Всякому понятию, входящему в это предложение, мы можем найти аналог в теории топологических групп. Соответствие

мно жество вполне регулярное пространство,

предложенное в разделе 3, подсказывает дальнейшее соответствие
отображение непрерывное отображение.

Аналоги других теоретико-групповых понятий, входящих в теорему существования, уже указаны в разделах 3 и 4.

Таким путем мы приходим к аналогу теоремы существования:

ТЕОРЕМА 1. *Если X — вполне регулярное пространство, то существует топологическая группа F со следующими свойствами:*

F_1. *X есть подпространство F;*

F_2. *X топологически порождает F;*

F_3. *каково бы ни было непрерывное отображение φ пространства X в произвольную топологическую группу G, существует непрерывный гомоморфизм Φ группы F в G, для которого* (2) *справедливо в любой точке x из X.*

Для теоремы единственности в теории свободных групп (см. раздел 5) также существует аналог, именно

ТЕОРЕМА 2. *Если X — вполне регулярное пространство, то топологическая группа со свойствами F_1, F_2, F_3 единственна с точностью до топологических изоморфизмов, переводящих все точки X в самих себя.*

Доказательство этих двух теорем и составляет основное содержание настоящей статьи.

7. Главным средством доказательства теоремы 1 служат понятия «нормы» и «мультинормы», которые вводятся в §§ 1 и 3. Наиболее трудной частью этой работы является построение некоторых специальных «норм» в свободных группах (§ 2), используемых в § 4 для доказательства теоремы 1. В § 4 мы доказываем также теорему 2 и тем самым оправдываем следующее

Определение 2. Единственную топологическую группу со свойствами F_1, F_2, F_3 мы называем *свободной топологической группой пространства X*.

Далее доказывается

ТЕОРЕМА 3. *Всякое вполне регулярное пространство образует свободный базис (в алгебраическом смысле) своей свободной топологической группы.*

В § 5 мы даем решение проблемы нормальности. Для этого служит

ТЕОРЕМА 4. *Всякое вполне регулярное пространство замкнуто в своей свободной топологической группе.*

§ 6 содержит аналог известной теоремы Dyck'а [([6]; см. также ([5]) и ([7])]. Мы вводим

Определение 3. F есть *свободная топологическая группа*, если существует пространство такое, что F является его свободной топологической группой.

Доказывается

ТЕОРЕМА 5. *Всякая топологическая группа топологически изоморфна топологической фактор-группе некоторой свободной топологической группы.*

Теория свободных топологических групп, развитая в §§ 4—6, позволяет построить теорию топологических групп, заданных системой

алгебраических соотношений между точками некоторого вполне регулярного пространства. Это делается в § 7. При этом в общем построении топологических групп топологические и алгебраические элементы участвуют раздельно и независимо: топология представлена произвольным вполне регулярным пространством, алгебра — произвольной системой соотношений между точками этого пространства.

В § 8 мы вводим понятие «свободной абелевой топологической группы» пространства. Мы показываем, что эта группа топологически изоморфна топологической фактор-группе свободной топологической группы заданного пространства по ее коммутанту.

В § 9 указываются некоторые нерешенные проблемы, возникающие в связи с этой работой.

В другой статье мы разовьем теорию «свободных линейных топологических локально выпуклых пространств», которая будет содержать результат, отмеченный в разделе 1 настоящего введения.

8. Если f — отображение множества A в множество B, а g — отображение множества B в множество C, то gf будет обозначать композицию отображений f и g, т. е. отображение h множества A в C, определяемое равенством

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in A).$$

Действительные функции будут рассматриваться как отображения в совокупность действительных чисел.

Символ $\{x_i\}_{i=1}^m$, где m — натуральное число, будет обозначать *систему* элементов x_i с $1 \leqslant i \leqslant m$, т. е. отображение совокупности натуральных чисел, не превосходящих m, при котором x^i есть образ числа i. При $m = 0$ этот символ обозначает пустое отображение, т. е. пустое множество.

Пустое множество будет также обозначаться символом Λ. Символ $\{a\}$ будет обозначать систему $\{x_i\}_{i=1}^1$ с $x_1 = a$; символом $\{a, b\}$ обозначается упорядоченная пара объектов a и b, т. е. система $\{x_i\}_{i=1}^2$ с $x_1 = a$, $x_2 = b$, причем a и b не обязательно различны; символом $\{a, b, c\}$ обозначается система $\{x_i\}_{i=1}^3$ с $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ и т. д.

Формула $x \in X$ обозначает, что x есть элемент множества X; формула $A \subseteq B$ означает, что A есть подмножество множества B.

Пересечение и теоретико-множественная сумма множеств A и B будут обозначаться соответственно символами $A \cap B$ и $A \cup B$. Символ $A \setminus B$ будет обозначать разность множеств A и B, т. е. совокупность элементов из A, не принадлежащих B.

Символ

$$\bigcap_{x \in X} A_x$$

обозначает пересечение совокупности множеств A_x с $x \in X$. Символ

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x} (\Phi_x),$$

где Φ_x — некоторое условие, наложенное на x, обозначает совокупность элементов, удовлетворяющих этому условию.

Символ $(x_i)_{i=1}^m$ обозначает множество, содержащее элементы x_i ($i = 1, \ldots, m$) и только их; символ (a, b) — множество $(x_i)_{i=1}^2$ с $x_1 = a$, $x_2 = b$; символ (a) обозначает множество $(x_i)_{i=1}^1$ с $x_i = a$.

Символ $1(G)$ обозначает единицу группы G.

Если x_i $(i=1, \ldots, m)$ — элементы группы G, то символом

$$\prod_{i=1}^{m}{}_G x_i$$

обозначается произведение этих элементов в G, определяемое индуктивно посредством равенств

$$\prod_{i=1}^{0}{}_G x_i = 1(G),$$

$$\prod_{i=1}^{m}{}_G x_i = \left(\prod_{i=1}^{m-1}{}_G x_i\right) x_m \quad (m>0).$$

Индекс G часто будет опускаться.

Если объекты x_i — действительные числа, то символ

$$\sum_{i=1}^{m} x_i$$

имеет свое обычное значение при $m>0$ и означает 0 при $m=0$.

Символ AB, где A и B — подмножества какой-либо группы G, будет обозначать п р о и з в е д е н и е этих множеств в G, т. е. совокупность произведений xy, где $x \in A$, $y \in B$; символ A^2 будет обозначать AA; символ A^{-1} будет обозначать множество, о б р а т н о е множеству A в G, т. е. множество обратных элементов x^{-1}, где $x \in A$. Вместо $A(a)$ и $(a)A$ мы пишем соответственно Aa и aA.

Если H — замкнутый нормальный делитель топологической группы G, то G/H обозначает топологическую фактор-группу группы G по H.

§ 1. Нормы

1. О п р е д е л е н и е 4. Пусть G — некоторая группа, N — действительная функция в G. Мы говорим, что N есть *норма* в G, если выполняются следующие условия:

N_1. $N(1(G))=0$;

N_2. $N(xy^{-1}) \leqslant N(x)+N(y)$ $(x \in G, y \in G)$.

2. ЛЕММА 1. *Если N — норма в группе G, то*

$$N(x) \geqslant 0 \quad (x \in G). \tag{5}$$

Действительно, полагая в N_2 $y=x$, получим

$$N(1(G)) \leqslant 2N(x),$$

что в соединении с N_1 дает (5).

ЛЕММА 2. *Если N — норма в группе G, то*

$$N(x)=N(x^{-1}) \quad (x \in G). \tag{6}$$

Действительно, полагая в N_2 $x=1(G)$, получим

$$N(y^{-1}) \leqslant N1(G)+N(y).$$

Подставляя здесь x вместо y, получим, согласно N_1,

$$N(x^{-1}) \leqslant N(x). \tag{7}$$

С другой стороны, подстановка x^{-1} вместо x дает

$$N(x) \leqslant N(x^{-1})$$

откуда, сопоставляя с (7), получим (6).

ЛЕММА 3. *Если N — норма в группе G, то*

$$N(xy) \leqslant Nx + Ny \quad (x \in G, y \in G).$$

Это свойство следует непосредственно из леммы 2 и N_2.

ЛЕММА 4. *Если N — норма в группе G, то*

$$|Nx - Ny| \leqslant N(x^{-1}y) \quad (x \in G, \ y \in G). \tag{8}$$

В самом деле, $y = x(x^{-1}y)$, $x = y(x^{-1}y)^{-1}$, откуда, в силу леммы 3 и N_2,

$$Ny \leqslant Nx + N(x^{-1}y),$$
$$Nx \leqslant Ny + N(x^{-1}y),$$

что и дает (8).

3. ЛЕММА 5. *Произведение нормы в группе G на действительное неотрицательное число есть норма в G.*

ЛЕММА 6. *Сумма двух норм в группе есть норма в той же группе.*

Эти факты следуют непосредственно из определения 4.

4. Следующая лемма дает метод построения норм, который будет использован в дальнейшем.

ЛЕММА 7. *Если f — произвольная ограниченная действительная функция в группе G, то функция N, определяемая равенством*

$$Nx = \sup_{y \in G} |f(yx) - fy| \quad (x \in G), \tag{9}$$

есть норма в G.

Доказательство. Функция N удовлетворяет условию N_1, так как $y\,1(G) = y$. Эта функция удовлетворяет также условию N_2, так как

$$\begin{aligned} N(xy^{-1}) &= \sup_{z \in G} |f(zxy^{-1}) - fz| \leqslant && [(9)] \\ &\leqslant \sup_{z \in G} (|f(zxy^{-1}) - f(zx)| + |f(zx) - fz|) \leqslant \\ &\leqslant \sup_{z \in G} |f(zxy^{-1}) - f(zx)| + \sup_{z \in G} |f(zx) - fz| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{t \in G} |ft - f(ty)| + \sup_{z \in G} |f(zx) - fz| = \\ &= Ny + Nx. && [(9)] \end{aligned}$$

5. ЛЕММА 8. *Пусть Φ — гомоморфизм группы G в группу H. Если P — норма в H, то $P\Phi$ есть норма в G.*

Доказательство. Так как Φ есть гомоморфизм G в H, то $\Phi\,1(G) = 1(H)$, откуда $P\Phi\,1(G) = P\,1(H)$. Так как P — норма в H, $P\,1(H) = 0$, откуда $P\Phi\,1(G) = 0$, т. е. для $P\Phi$ выполняется условие N_1.

Пусть x и y — произвольные элементы G. Так как Φ есть гомоморфизм G в H,

$$\Phi(xy^{-1}) = (\Phi x)(\Phi y)^{-1},$$

откуда

$$P\Phi(xy^{-1}) = P((\Phi x)(\Phi y)^{-1}).$$

Далее, так как P есть норма в H,

$$P((\Phi x)(\Phi y)^{-1}) \leqslant P\Phi x + P\Phi y.$$

Значит,

$$P\Phi(xy^{-1}) \leqslant P\Phi x + P\Phi y,$$

что и представляет собою условие N_2 для $P\Phi$.

ЛЕММА 9. *Пусть Φ — гомоморфизм группы G на группу H*. Если P есть такая действительная функция в H, что $P\Phi$ есть норма в G, то P есть норма в H.*

Доказательство. $P1(H) = P\Phi 1(G)$, потому что Φ есть гомоморфизм G в H. Так как $P\Phi$ норма в G, то $P\Phi 1(G) = 0$, откуда $P1(H) = 0$, что дает условие N_1 для P.

Пусть z и t — произвольные элементы H. Так как Φ есть гомоморфизм G на H, существуют такие элементы x и y группы G, что

$$\Phi x = z, \quad \Phi y = t. \tag{10}$$

Имеем

$$P(zt^{-1}) = P((\Phi x)(\Phi y)^{-1}) = P\Phi(xy^{-1}).$$

Так как $P\Phi$ есть норма в G,

$$P\Phi(xy^{-1}) \leqslant P\Phi x + P\Phi y = Pz + Pt.$$

Следовательно, $P(zt^{-1}) \leqslant Pz + Pt$, т. е. для P выполняется условие N_2.

Определение 5. Пусть f и g — две действительные функции в одном и том же множестве X. Мы говорим, что g *мажорирует* f, если $fx \leqslant gx$ для всех элементов x множества X.

ЛЕММА 10. *Пусть Φ — гомоморфизм группы G на группу H. Если N есть норма в G, то функция P, заданная в H равенством*

$$Pz = \inf_{x \in \Phi^{-1}z} Nx \quad (z \in H), \tag{11}$$

есть норма в H такая, что N мажорирует $P\Phi$.

Доказательство. Заметим сначала, что правая часть равенства (11) имеет смысл, каков бы ни был элемент z из H. В самом деле, так как Φ есть отображение G на H, множество $\Phi^{-1}z$ не пусто ни при каком z.

Так как $1(G) \in \Phi^{-1}1(H)$, то, на основании (11),

$$P1(H) = \inf_{x \in \Phi^{-1}1(H)} Nx \leqslant N1(G). \tag{12}$$

Отсюда, в силу условия N_1 для N, $P1(H) \leqslant 0$. С другой стороны, согласно лемме 1, $Nx \geqslant 0$ $(x \in G)$, откуда, в силу (12), $P1(H) \geqslant 0$. Следовательно, $P1(H) = 0$, т. е. P удовлетворяет условию N_1.

Пусть z и t — какие-нибудь два элемента из H, а x и y — произвольные элементы G, удовлетворяющие условиям (10). Так как Φ есть гомоморфизм, $\Phi(xy^{-1}) = zt^{-1}$, откуда, согласно (11),

$$P(zt^{-1}) = \inf_{u \in \Phi^{-1}(zt^{-1})} Nu \leqslant N(xy^{-1}).$$

* Мы говорим, что f есть отображение множества X в Y, если $fX \subset Y$, — на Y, если $fX = Y$.

Условие N_2 для N дает

$$P(zt^{-1}) \leqslant Nx + Ny,$$

где x и y — любые элементы G, удовлетворяющие (10). Отсюда

$$P(zt^{-1}) \leqslant \inf_{x \in \Phi^{-1}z} Nx + \inf_{y \in \Phi^{-1}t} Ny$$

и, в силу (11),

$$P(zt^{-1}) \leqslant Pz + Pt,$$

что и дает условие N_2 для P.

Итак, P есть норма в H. Для всякого элемента x из G имеем, согласно (11),

$$P\Phi x = \inf_{y \in \Phi^{-1}\Phi x} Ny \leqslant Nx,$$

т. е. N мажорирует $P\Phi$.

6. Каков бы ни был элемент a группы G, отображение A_a этой группы на самое себя, определенное равенством

$$A_a x = a^{-1}xa \quad (x \in G),$$

есть автоморфизм группы G. Применением леммы 8 получается

ЛЕММА 11. *Если N — норма в G и $a \in G$, то NA_a есть также норма в G.*

7. В определении 4 слово «группа» может означать как дискретную, так и топологическую группу. Норма в топологической группе может быть непрерывной или нет. Сейчас мы дадим полезный для дальнейшего критерий непрерывности нормы в топологической группе.

ЛЕММА 12. *Норма N в топологической группе G непрерывна тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: каково бы ни было положительное число ε, в G существует такая окрестность U единицы $1(G)$, что для всякой точки x окрестности U*

$$Nx < \varepsilon. \tag{13}$$

Доказательство. — 1°. *Необходимость условия.* Если норма N непрерывна, то, в частности, она непрерывна в точке $1(G)$, т. е. для всякого положительного числа ε найдется в G такая окрестность U точки $1(G)$, что

$$|Nx - N1(G)| < \varepsilon \tag{14}$$

во всякой точке x из U. (13) вытекает из (14) в силу N_1.

2°. *Достаточность условия.* Предположим, что N удовлетворяет формулированному выше условию. Пусть z — произвольная точка G, ε — положительное число. Согласно предположению, существует такая окрестность U точки $1(G)$, что в каждой ее точке x выполняется (13). Множество zU представляет собой некоторую окрестность точки z. Рассмотрим произвольную точку y из этого множества. Так как $y \in zU$, то $z^{-1}y \in U$, следовательно, $N(z^{-1}y) < \varepsilon$. Отсюда, согласно лемме 4,

$$|Nz - Ny| < \varepsilon. \tag{15}$$

Это неравенство выполняется, коль скоро $y \in zU$. Таким образом, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такая окрестность точки z, что для всякой точки y этой окрестности имеет место неравенство (15). Другими

словами, функция N непрерывна в точке z. Так как последняя была выбрана произвольно, N есть непрерывная функция в G.

Имея в виду условие N_1, мы можем перефразировать лемму 12, сказав, что норма в топологической группе непрерывна тогда и только тогда, когда она непрерывна в единице этой группы.

Интересным следствием леммы 12 является

ЛЕММА 13. *Если P — непрерывная норма в топологической группе G, то всякая норма в G, мажорируемая нормой P, также непрерывна.*

Действительно, всякая норма, которую мажорирует P, удовлетворяет критерию непрерывности, данному в лемме 12, если этому критерию удовлетворяет норма P.

§ 2. Построение норм в свободных группах

1. Определение 6. Пусть X — произвольное множество. Будем называть *словом* в X любую систему $\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m$, где m — целое неотрицательное число, $x_i \in X$ и $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Совокупность слов в X обозначим L_X. Множество L_X содержит в качестве своего элемента, в частности, пустое множество, которое иначе будет называться *пустым словом.*

Определение 7. Число m мы будем называть *длиной слова* $\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m$.

Длину слова w условимся обозначать символом $1w$.

Очевидно, $1\Lambda = 0$. Длина всякого другого слова есть натуральное число. Слово в X длины 1 имеет вид $\{\{x, \varepsilon\}\}$, где $x \in X$, $\varepsilon = \pm 1$.

Определение 8. Пусть $u = \{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m \in L$ *, $v = \{\{y_j, \eta_j\}\}_{j=1}^n \in L$. Систему $\{\{z_k, \theta_k\}\}_{k=1}^{m+n}$, где

$$\{z_k, \theta_k\} = \begin{cases} \{x_k, \varepsilon_k\} & \text{при } 1 \leqslant k \leqslant m \\ \{y_{k-m}, \eta_{k-m}\} & \text{при } m+1 \leqslant k \leqslant m+n \end{cases}$$

будем называть *произведением* слово u на слово v.

Произведение слова в X на слово в X есть слово в X. Произведение u на v условимся обозначать символом $u \circ v$.

Очевидно, что

$$u \circ \Lambda = \Lambda \circ u = u \qquad (u \in L). \tag{16}$$

Умножение слов ассоциативно, благодаря чему можно писать без скобок такие выражения, как $u \circ v \circ w$.

Определение 9. Пусть $u = \{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m \in L$. Будем называть систему $\{\{x_{m-i+1}, -\varepsilon_{m-i+1}\}\}_{i=1}^m$ *обращением* слова u.

Обращение слова в X есть слово в X. Обращение u будем обозначать символом $u^{\sim}$.

Имеем

$$\Lambda^{\sim} = \Lambda, \tag{17}$$

$$\{\{x, \varepsilon\}\}^{\sim} = \{\{x, -\varepsilon\}\} \quad (x \in X, \varepsilon = \pm 1), \tag{18}$$

---

* Здесь и в дальнейшем мы опускаем индекс X при L.

$$\{\{x, \varepsilon\}, \{y, \eta\}\}^{\sim} = \{\{y, -\eta\}, \{x, -\varepsilon\}\} \quad (x \in X, y \in X, \varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1), \tag{19}$$

$$(u \circ v)^{\sim} = v^{\sim} \circ u^{\sim} \quad (u \in L, \ v \in L). \tag{20}$$

2. Начиная отсюда и до конца этого параграфа f будет означать действительную функцию в множестве X. Эта функция может быть совершенно произвольной, но будет считаться фиксированной. Будут вводиться другие функции, определяемые через f. Их обозначения будут иметь индекс f.

ЛЕММА 14. *Существует единственная действительная функция* ν_f *в множестве* L, *удовлетворяющая следующим условиям:*

P_1. $\nu_f \Lambda = 0$;

P_2. $\nu_f(u \circ \{\{x, \varepsilon\}\} \circ v) \leqslant \nu_f(u \circ v) + |fx| \quad (u \in L, v \in L, x \in X, \varepsilon = \pm 1)$;

P_3. $\nu_f(u \circ \{\{x, \varepsilon\}, \{y, -\varepsilon\}\} \circ v) \leqslant \nu_f(u \circ v) + |fx - fy| \quad (u \in L, v \in L, x \in X, \ y \in X, \ \varepsilon = \pm 1)$;

P_4. *каково бы ни было непустое слово* w' *в* X, *существуют* u', v', x', ε' *такие, что*

$$w' = u' \circ \{\{x', \varepsilon'\}\} \circ v', \tag{21}$$

$$\nu_f w' = \nu_f(u' \circ v') + |fx'|, \tag{22}$$

или существуют u', v', x', y', ε' *такие, что*

$$w' = u' \circ \{\{x', \varepsilon'\}, \{y', -\varepsilon'\}\} \circ v', \tag{23}$$

$$\nu_f w' = \nu_f(u' \circ v') + |fx' - fy'|. \tag{24}$$

Доказательство. Будем определять функцию ν_f индуктивно. Значение $\nu_f w$ при $w = \Lambda$ определим равенством P_1. Допустим, что определены значения $\nu_f w$ при $\mathrm{l}\, w < m$, где m — натуральное число. Определим значения $\nu_f w$ при $\mathrm{l}\, w = m$ следующим образом. Пусть w' — слово в X такое, что $\mathrm{l}\, w' = m$. Тогда существует m систем $\{u', v', x', \varepsilon'\}$, удовлетворяющих соотношению (21). Для всякой такой системы $\mathrm{l}\,(u' \circ v') = m - 1$ и потому определено число $\nu_f(u' \circ v')$. Приводим в соответствие каждой такой системе число $\nu_f(u' \circ v') + |fx'|$. Могут далее существовать системы $\{u' v', x', y', \varepsilon'\}$, удовлетворяющие соотношению (23). Таких систем тоже конечное число — не более $m - 1$. Для каждой такой системы определено $\nu_f(u' \circ v')$, так как $\mathrm{l}\,(u' \circ v') = m - 2$. Приводим в соответствие каждой такой системе число $\nu_f(u' \circ v') + |fx' - fy'|$. Получаем непустое конечное множество чисел — совокупность чисел $\nu_f(u' \circ v') + |fx'|$ для систем $\{u', v', x', \varepsilon'\}$, удовлетворяющих условию (21), и чисел $\nu_f(u' \circ v') + |fx' - fy'|$ для систем $\{u', v', x', y', \varepsilon'\}$, удовлетворяющих условию (23). Среди всех этих чисел имеется наименьшее, которое мы и принимаем в качестве значения $\nu_f w'$.

Построенная так функция ν_f, очевидно, удовлетворяет условиям $P_1 - P_4$. Посредством индукции по длине аргумента легко также убедиться в единственности функции, удовлетворяющей этим условиям.

3. Установим теперь ряд свойств функции ν_f.

ЛЕММА 15.

$$\nu_f \{\{x, \varepsilon\}\} = |fx| \quad (x \in X, \ \varepsilon = \pm 1). \tag{25}$$

Доказательство. $\{\Lambda, \Lambda, x, \varepsilon\}$ есть единственная система $\{u', v', x', \varepsilon'\}$, удовлетворяющая соотношению (21) при $w' = \{\{x, \varepsilon\}\}$; систем же $\{u', v', x', y', \varepsilon'\}$, удовлетворяющих соотношению (23), при этом w' не существует. Поэтому в силу P_4 имеем $\nu_f\{\{x, \varepsilon\}\} = \nu_f(\Lambda \circ \Lambda) + |fx|$, откуда, согласно (16) и P_1, следует равенство (25).

ЛЕММА 16

$$\nu_f\{\{x, \varepsilon\}, \{y, \varepsilon\}\} = |fx| + |fy| \quad (x \in X,\ y \in X,\ \varepsilon = \pm 1). \tag{26}$$

Доказательство. Систем $\{u', v', x', y', \varepsilon'\}$, удовлетворяющих условию (23) при $w' = \{\{x, \varepsilon\}, \{y, \varepsilon\}\}$, не существует; существуют только две системы $\{u', v', x', \varepsilon'\}$, удовлетворяющие соотношению (21) при этом w', а именно системы $\{\Lambda, \{\{y, \varepsilon\}\}, x, \varepsilon\}$ и $\{\{\{x, \varepsilon\}\}, \Lambda, y, \varepsilon\}$. Согласно (16), выражение $\nu_f(u' \circ v') + |fx'|$ принимает для этих систем значения $\nu_f\{\{y, \varepsilon\}\} + |fx|$ и $\nu_f\{\{x, \varepsilon\}\} + |fy|$, которые, согласно лемме 15, равны $|fx| + |fy|$. Согласно P_4, отсюда следует равенство (26).

ЛЕММА 17.

$$\nu_f\{\{x, \varepsilon\}, \{y, -\varepsilon\}\} = |fx - fy| \quad (x \in X,\ y \in X,\ \varepsilon = \pm 1). \tag{27}$$

Доказательство. Существуют только две системы $\{u', v', x', \varepsilon'\}$, удовлетворяющие соотношению (21) при $w' = \{\{x, \varepsilon\}, \{y, -\varepsilon\}\}$, а именно, $\{\Lambda, \{\{y, -\varepsilon\}\}, x, \varepsilon\}$ и $\{\{\{x, \varepsilon\}\}, \Lambda, y, -\varepsilon\}$. Выражение $\nu_f(u' \circ v') + |fx'|$ принимает для этих систем значения $\nu_f\{\{y, -\varepsilon\}\} + |fx|$ и $\nu_f\{\{x, \varepsilon\}\} + |fy|$, которые, согласно лемме 15, равны $|fx| + |fy|$.

Существует только одна система $\{u', v', x', y', \varepsilon'\}$, удовлетворяющая соотношению (23) при этом w', а именно $\{\Lambda, \Lambda, x, y, \varepsilon\}$. Для этой системы $\nu_f(u' \circ v') + |fx' - fy'| = |fx - fy|$.

Согласно P_4, отсюда следует, что $\nu_f w'$ равно одному из чисел $|fx| + |fy|$ и $|fx - fy|$. Согласно P_3, (16) и P_1,

$$\nu_f w' \leqslant \nu_f(\Lambda \circ \Lambda) + |fx - fy| = |fx - fy|.$$

Принимая во внимание, что $|fx - fy| \leqslant |fx| + |fy|$, заключаем отсюда, что имеет место равенство (27).

ЛЕММА 18.

$$\nu_f(u \circ w \circ v) \leqslant \nu_f(u \circ v) + \nu_f w \quad (u \in L,\ v \in L,\ w \in L). \tag{28}$$

Доказательство. При $w = \Lambda$ неравенство (28) верно в силу P_1. Допустим, что оно верно всякий раз, когда $1w < m$, где m — натуральное число, и покажем, что оно верно тогда и при $1w = m$.

Пусть, в самом деле, $u \in L$, $v \in L$, $w' \in L$ и $1w' = m$. Согласно P_4, имеет место один из следующих двух случаев:

1. Существуют u', v', x', ε', удовлетворяющие условиям (21) и (22).

2. Существуют $u', v', x', y', \varepsilon'$, удовлетворяющие условиям (23) и (24).

Случай 1. Пусть u', v', x', ε' удовлетворяют условиям (21) и (22). В силу (21), $\mathrm{l}(u' \circ v') = \mathrm{l}w' - 1 = m - 1$ и потому, согласно индуктивному предположению,

$$\nu_f(u \circ u' \circ v' \circ v) \leqslant \nu_f(u \circ v) + \nu_f(u' \circ v'). \tag{29}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu_f(u \circ w' \circ v) &= \nu_f(u \circ u' \circ \{\{x', \varepsilon'\}\} \circ v' \circ v) && [(21)] \\ &\leqslant \nu_f(u \circ u' \circ v' \circ v) + |fx'| && [\mathrm{P}_2] \\ &\leqslant \nu_f(u \circ v) + \nu_f(u' \circ v') + |fx'| && [(29)] \\ &= \nu_f(u \circ v) + \nu_f w'. && [(22)] \end{aligned}$$

Случай 2. Пусть u', v', x', y', ε' удовлетворяют условиям (23) и (24). В силу (23) $\mathrm{l}(u' \circ v') = \mathrm{l}w' - 2 = m - 2$ и потому, согласно индуктивному предположению, имеем неравенство (29). Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu_f(u \circ w' \circ v) &\leqslant \nu_f(u \circ u' \circ \{\{x', \varepsilon'\}, \quad \{y', -\varepsilon'\}\} \circ v' \circ v) && [(23)] \\ &\leqslant \nu_f(u \circ u' \circ v' \circ v) + |fx' - fy'| && [\mathrm{P}_3] \\ &\leqslant \nu_f(u \circ v) + \nu_f(u' \circ v') + |fx' - fy'| && [(29)] \\ &= \nu_f(u \circ v) + \nu_f w'. && [(24)] \end{aligned}$$

Таким образом, в обоих случаях

$$\nu_f(u \circ w' \circ v) \leqslant \nu_f(u \circ v) + \nu_f w',$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 19.

$$\nu_f(u \circ w) \leqslant \nu_f u + \nu_f w \quad (u \in L, \ w \in L). \tag{30}$$

В самом деле, при $v = \Lambda$, (28) переходит в (30).

ЛЕММА 20.

$$\nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ w \circ \{\{y, -\varepsilon\}\}) \leqslant \nu_f w + |fx - fy| \quad (w \in L, \ x \in X, \ y \in X, \ \varepsilon = \pm 1)$$

Это следует из лемм 17 и 18.

ЛЕММА 21.

$$\nu_f w - \nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ w) \leqslant |fx| \quad (w \in L, \ x \in X, \ \varepsilon = \pm 1). \tag{31}$$

Доказательство. При $w = \Lambda$ неравенство (31) верно в силу P_1 и леммы 15. Допустим, что оно верно всякий раз, когда $\mathrm{l}w < m$, где m — натуральное число, и докажем, что оно верно тогда и при $\mathrm{l}w = m$.

В самом деле, пусть $w \in L$, $x \in X$, $\varepsilon = \pm 1$ и $\mathrm{l}w = m$. Положим

$$w' = \{\{x, \varepsilon\}\} \circ w. \tag{32}$$

Согласно P_4, имеет место один из двух случаев, указанных в доказательстве леммы 18.

Случай 1. Пусть u', v', x', ε' удовлетворяют условиям (21) и (22). Рассмотрим порознь следующие два подслучая:

1,1. $u' = \Lambda$;

1,2. $u' \neq \Lambda$.

Подслучай 1, 1. Соотношение (21) принимает вид

$$w' = \{\{x', \varepsilon'\}\} \circ v'. \tag{33}$$

Сравнивая равенства (32) и (33), получаем

$$w = v'. \tag{34}$$

Соотношение (22) принимает вид

$$\nu_f w' = \nu_f v' + |fx'|. \tag{35}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu_f w - \nu_f w' &= \nu_f v' - \nu_f w' && [(34)] \\ &\leqslant 0 && [(35)] \\ &\leqslant |fx|. \end{aligned}$$

Подслучай 1, 2. Принимая во внимание, что $u' \neq \Delta$ и сравнивая равенства (21) и (32), заключаем, что существует слово t такое, что

$$u' = \{\{x, \varepsilon\}\} \circ t, \tag{36}$$

$$w = t \circ \{\{x', \varepsilon'\}\} \circ v'. \tag{37}$$

В силу (37) $l(t \circ v') = l w - 1 = m - 1$ и потому, согласно индуктивному предположению,

$$\nu_f (t \circ v') - \nu_f (\{\{x, \varepsilon\}\} \circ t \circ v') \leqslant |fx|, \tag{38}$$

откуда по (36)

$$\nu_f (t \circ v') - \nu_f (u' \circ v') \leqslant |fx|. \tag{39}$$

На основании (37) и P_2

$$\nu_f w \leqslant \nu_f (t \circ v') + |fx'|,$$

откуда, согласно (22),

$$\nu_f w - \nu_f w' \leqslant \nu_f (t \circ v') - \nu_f (u' \circ v'). \tag{40}$$

Неравенства (40) и (39) дают $\nu_f w - \nu_f w' \leqslant |fx|$.

Случай 2. Пусть u', v', x', y', ε' удовлетворяют условиям (23) и (24). Рассмотрим два подслучая:

2,1. $u' = \Delta$;

2,2. $u' \neq \Delta$.

Подслучай 2,1. Соотношение (23) принимает вид

$$w' = \{\{x', \varepsilon'\}, \{y', -\varepsilon'\}\} \circ v' \tag{41}$$

Сравнивая равенства (32) и (41), получаем

$$x = x', \tag{42}$$

$$w = \{\{y', -\varepsilon'\}\} \circ v'. \tag{43}$$

Соотношение (24) принимает вид

$$\nu_f w' = \nu_f v' + |fx' - fy'|. \tag{44}$$

Согласно (43) и P_2,

$$\nu_f w \leqslant \nu_f v' + |fy'|. \tag{45}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu_f w - \nu_f w' &\leqslant |fy'| - |fx' - fy'| && [(44) \text{ и } (45)] \\ &\leqslant |fx'| \\ &= |fx|. && [(42)] \end{aligned}$$

Подслучай 2,2. Принимая во внимание, что $u' \neq \Delta$ и сравнивая равенства (23) и (32), заключаем, что существует слово t такое, что имеют место равенства (36) и

$$w = t \circ \{\{x', \varepsilon'\}, \{y, -\varepsilon'\}\} \circ v'. \tag{46}$$

В силу (46) $1(t \circ v') = 1w - 2 = m - 2$ и потому, согласно индуктивному предположению, имеем неравенство (38), из которого, согласно (36), следует неравенство (39). Согласно (46) и P_3,

$$\nu_f w \leqslant \nu_f(t \circ v') + |fx' - fy'|,$$

откуда, согласно (24), получается неравенство (40). Неравенства (40) и (39) дают неравенство $\nu_f w - \nu_f w' \leqslant |fx|$.

Таким образом, во всех случаях $\nu_f w - \nu_f w' \leqslant |fx|$, что в силу (32) совпадает с доказываемым неравенством.

ЛЕММА 22.

$$\nu_f w - \nu_f(w \circ \{\{x, \varepsilon\}\}) \leqslant |fx| \quad (w \in L,\ x \in X,\ \varepsilon = \pm 1).$$

Доказывается аналогично лемме 21.

ЛЕММА 23.

$$\nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ w) \leqslant |fy - fx| \\ (w \in L,\ x \in X,\ y \in X,\ \varepsilon = \pm 1). \tag{47}$$

Доказательство. При $w = \Lambda$ неравенство (47) верно в силу леммы 15. Допустим, что оно верно всякий раз, когда $1w < m$, где m — натуральное число, и докажем, что оно верно тогда и при $1w = m$.

В самом деле, пусть $w \in L$, $x \in X$, $y \in X$, $\varepsilon = \pm 1$ и $1w = m$. Определим w' равенством (32). Могут быть два случая [лемма 18].

Случай 1. Пусть u', v', x', ε' удовлетворяют соотношениям (21) и (22). Рассмотрим два подслучая [лемма 21].

Подслучай 1,1. Как в аналогичном подслучае доказательства леммы 21, имеем равенства (33) и (35). Сравнивая равенства (32) и (33), получаем равенства (34) и (42). Согласно P_2 и (16),

$$\nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) \leqslant \nu_f w + |fy|. \tag{48}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f w' &\leqslant \nu_f v' - \nu_f w' + |fy| && [(48) \text{ и } (34)] \\ &= |fy| - |fx| && [(35) \text{ и } (42)] \\ &\leqslant |fy - fx|. \end{aligned}$$

Подслучай 1,2. Как в аналогичном подслучае доказательства леммы 21, убеждаемся в существовании слова t, удовлетворяющего условиям (36) и (37). В силу (37), $1(t \circ v') = m - 1$ и потому, согласно индуктивному предположению,

$$\nu_f(t \circ v' \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ t \circ v') \leqslant |fy - fx|, \tag{49}$$

откуда, в силу (36),

$$\nu_f(t \circ v' \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f(u' \circ v') \leqslant |fy - fx|. \tag{50}$$

Далее, получаем

$$\begin{aligned} \nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) &= \nu_f(t \circ \{\{x', \varepsilon'\}\} \circ v' \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) && [(37)] \\ &\leqslant \nu_f(t \circ v' \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) + |fx'|, && [P_2] \quad (51) \\ \nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f w' &\leqslant \nu_f(t \circ v' \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f(u' \circ v') && [(51) \text{ и } (22)] \\ &\leqslant |fy - fx|. && [(50)] \end{aligned}$$

Случай 2. Пусть u', v', x', y', ε', удовлетворяют условиям (23) и (24). Рассмотрим два подслучая [лемма 21].

Подслучай 2,1. Как в аналогичном подслучае доказательства леммы 21, получаем равенства (41) и (44). Сравнивая равенства (32) и (41), получаем равенства (42), (43) и

$$\varepsilon = \varepsilon'. \tag{52}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) &= \nu_f(\{\{y', -\varepsilon\}\} \circ v' \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) && [(43) \text{ и } (52)] \\ &\leqslant \nu_f v' + |fy - fy'|, && [\text{лемма } 20] \quad (53) \\ \nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f w' &\leqslant |fy - fy'| - |fx' - fy'| && [(53) \text{ и } (44)] \\ &\leqslant |fy - fx'| \\ &= |fy - fx|. && [(42)] \end{aligned}$$

Подслучай 2,2. Как в аналогичном подслучае доказательства леммы 21, убеждаемся в существовании слова t, удовлетворяющего условиям (36) и (46). В силу (46), $1(t \circ v') = m - 2$ и потому, согласно индуктивному предположению, имеем неравенство (49), из которого, согласно (36), следует неравенство (50). Имеем

$$\begin{aligned} \nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) &= \nu_f(t \circ \{\{x', \varepsilon'\}, \{y', -\varepsilon'\}\} \circ v' \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) && [(46)] \\ &\leqslant \nu_f(t \circ v' \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) + |fx' - fy'|, && [P_3] \quad (54) \\ \nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f w' &\leqslant \nu_f(t \circ v' \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f(u' \circ v') && [(54) \text{ и } (24)] \\ &\leqslant |fy - fx|. && [(50)] \end{aligned}$$

Таким образом, во всех случаях

$$\nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) - \nu_f w' \leqslant |fy - fx|,$$

что в силу (32) совпадает с доказываемым неравенством.

ЛЕММА 24.

$$\nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ w) - \nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\}) \leqslant |fy - fx| \quad (w \in L, x \in X, y \in X, \varepsilon = \pm 1). \tag{55}$$

Доказывается аналогично лемме 23.

ЛЕММА 25.

$$|\nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ w) - \nu_f(w \circ \{\{y, \varepsilon\}\})| \leqslant |fy - fx| \quad (w \in L, x \in X, y \in X, \varepsilon = \pm 1).$$

Лемма 25 является следствием лемм 23 и 24.

ЛЕММА 26.

$$\nu_f(w \circ \{\{x, \varepsilon\}\}) = \nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ w) \quad (w \in L, x \in X, \varepsilon = \pm 1).$$

Лемма 26 вытекает из леммы 25, как следствие.

ЛЕММА 27.

$$\nu_f(w \circ u) = \nu_f(u \circ w) \quad (u \in L, w \in L). \tag{56}$$

Доказательство. При $u = \Lambda$ равенство (56) верно. Допустим, что оно верно всякий раз, когда $1u < m$, где m — натуральное число, и покажем, что оно верно тогда и при $1u = m$.

В самом деле, пусть $u \in L$, $w \in L$ и $\mathrm{l}u = m$. Тогда существуют такие v, x и ε, что

$$u = \{\{x, \varepsilon\}\} \circ v. \tag{57}$$

Имеем $\mathrm{l}v = \mathrm{l}u - 1 = m - 1$ и потому, согласно индуктивному предположению,

$$\nu_f(w \circ \{\{x, \varepsilon\}\} \circ v) = \nu_f(v \circ w \circ \{\{x, \varepsilon\}\}). \tag{58}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu_f(w \circ u) &= \nu_f(w \circ \{\{x, \varepsilon\}\} \circ v) && [(57)] \\ &= \nu_f(v \circ w \circ \{\{x, \varepsilon\}\}) && [(58)] \\ &= \nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ v \circ w) && [\text{лемма } 26] \\ &= \nu_f(u \circ w), && [(57)] \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 28.

$$\nu_f w - \nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ w \circ \{\{y, -\varepsilon\}\}) \leqslant |fy - fx|$$
$$(w \in L,\ x \in X,\ y \in X,\ \varepsilon = \pm 1). \tag{59}$$

Доказательство. Согласно P_1 и лемме 17, неравенство (59) верно при $w = \Lambda$. Допустим, что это неравенство верно всякий раз, когда $\mathrm{l}w < m$, где m — натуральное число, и покажем, что в этом случае оно верно и при $\mathrm{l}w = m$.

В самом деле, пусть $w \in L$, $x \in X$, $y \in X$, $\varepsilon = \pm 1$ и $\mathrm{l}w = m$. Положим

$$w' = \{\{x, \varepsilon\}\} \circ w \circ \{\{y, -\varepsilon\}\}. \tag{60}$$

Могут быть два случая [лемма 18].

Случай 1. Пусть u', v', x' и ε' удовлетворяют условиям (21) и (22). Рассмотрим порознь три подслучая:

1,1. $u' = \Lambda$;

1,2. $v' = \Lambda$;

1,3. $u' \neq \Lambda$ и $v' \neq \Lambda$.

Подслучай 1,1. Соотношение (21) принимает вид (33). Сравнивая равенства (33) и (60), получаем равенства (42) и

$$v' = w \circ \{\{y, -\varepsilon\}\}. \tag{61}$$

Соотношение (22) принимает вид (35). Согласно (61) и лемме 22,

$$\nu_f w - \nu_f v' \leqslant |fy|. \tag{62}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu_f w - \nu_f w' &\leqslant |fy| - |fx'| && [(62) \text{ и } (35)] \\ &\leqslant |fy - fx'| \\ &= |fy - fx|. && [(42)] \end{aligned}$$

Подслучай 1,2 трактуется аналогичным образом. Мы и здесь получаем

$$\nu_f w - \nu w' \leqslant |fy - fx|. \tag{63}$$

Подслучай 1,3. Сравнивая равенства (21) и (60) и принимая во внимание, что $u' \neq \Lambda$ и $v' \neq \Lambda$, заключаем о существовании слов s и t таких, что

$$u' = \{\{x, \varepsilon\}\} \circ s, \tag{64}$$

$$v' = t \circ \{\{y, -\varepsilon\}\}, \tag{65}$$

$$w = s \circ \{\{x', \varepsilon'\}\} \circ t. \tag{66}$$

Согласно (66), $l(s \circ t) = lw - 1 = m - 1$ и потому, согласно индуктивному предположению,

$$\nu_f(s \circ t) - \nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ s \circ t \circ \{\{y, -\varepsilon\}\}) \leqslant |fy - fx|, \tag{67}$$

откуда, согласно (64) и (65),

$$\nu_f(s \circ t) - \nu_f(u' \circ v') \leqslant |fy - fx|. \tag{68}$$

На основании (66) и P_2,

$$\nu_f w \leqslant \nu_f(s \circ t) + |fx'|. \tag{69}$$

Следовательно,

$$\nu_f w - \nu_f w' \leqslant \nu_f(s \circ t) - \nu_f(u' \circ v') \qquad [(69) \text{ и } (22)]$$
$$\leqslant |fy - fx|. \qquad [(68)]$$

Случай 2. Пусть u', v', x', y', ε' удовлетворяют условиям (23) и (24). Рассмотрим порознь три подслучая:

2,1. $u' = \Lambda$;

2,2. $v' = \Lambda$;

2,3. $u' \neq \Lambda$ и $v' \neq \Lambda$.

Подслучай 2,1. Соотношение (23) принимает вид (41). Сравнивая равенства (41) и (60), получаем равенства (42), (52) и

$$\{\{y', -\varepsilon'\}\} \circ v' = w \circ \{\{y, -\varepsilon\}\}. \tag{70}$$

Так как $w \neq \Lambda$, из равенства (70) следует, что существует такое слово t, что

$$w = \{\{y', -\varepsilon'\}\} \circ t, \tag{71}$$

$$v' = t \circ \{\{y, -\varepsilon\}\}. \tag{72}$$

Согласно (52) и лемме 24, отсюда следует неравенство

$$\nu_f w - \nu_f v' \leqslant |fy - fy'|. \tag{73}$$

Соотношение (24) принимает вид (44). Следовательно,

$$\nu_f w - \nu_f w' \leqslant |fy - fy'| - |fx' - fy'| \qquad [(73) \text{ и } (44)]$$
$$\leqslant |fy - fx'|$$
$$= |fy - fx|. \qquad [(42)]$$

Подслучай 2,2 трактуется аналогичным образом. Мы и здесь получаем неравенство (63).

Подслучай 2,3. Принимая во внимание, что $u' \neq \Lambda$ и $v' \neq \Lambda$, и сравнивая равенства (23) и (60), заключаем о существовании слов s и t, удовлетворяющих соотношениям (64), (65) и

$$w = s \circ \{\{x', \varepsilon'\}, \{y', -\varepsilon'\}\} \circ t. \tag{74}$$

Согласно (74), $l(s \circ t) = m - 2$ и потому, в силу индуктивного предположения, имеем неравенство (67), из которого, согласно (64) и (65), следует неравенство (68). На основании (74) и P_3

$$\nu_f w \leqslant \nu_f(s \circ t) + |fx' - fy'|. \tag{75}$$

Следовательно,

$$\nu_f w - \nu_f w' \leqslant \nu_f(s \circ t) - \nu_f(u' \circ t') \qquad [(75) \text{ и } (24)]$$
$$\leqslant |fy - fx|. \qquad [(68)]$$

Таким образом, во всех случаях имеет место неравенство (63), которое, в силу (60), совпадает с доказываемым.

ЛЕММА 29.

$$|\nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ w \circ \{\{y, -\varepsilon\}\}) - \nu_f w| \leqslant |fy - fx|$$
$$(w \in L,\ x \in X,\ y \in X,\ \varepsilon = \pm 1).$$

Это следует из лемм 20 и 28.

ЛЕММА 30.

$$\nu_f(\{\{x, \varepsilon\}\} \circ w \circ \{\{x, -\varepsilon\}\}) = \nu_f w \quad (w \in L,\ x \in X,\ \varepsilon = \pm 1).$$

Это следует из леммы 29.

ЛЕММА 31.

$$\nu_f(u \circ \{\{x, \varepsilon\}, \{x, -\varepsilon\}\} \circ v) = \nu_f(u \circ v), \quad (u \in L,\ v \in L,\ x \in X,\ \varepsilon = \pm 1).$$

Доказательство.

$$\nu_f(u \circ \{\{x, \varepsilon\}, \{x, -\varepsilon\}\} \circ v) = \nu_f(\{\{x, -\varepsilon\}\} \circ v \circ u \circ \{\{x, \varepsilon\}\}) \qquad [\text{лемма } 27]$$
$$= \nu_f(v \circ u) \qquad [\text{лемма } 30]$$
$$= \nu_f(u \circ v). \qquad [\text{лемма } 27]$$

ЛЕММА 32.

$$\nu_f w^{\sim} \leqslant \nu_f w \quad (w \in L). \tag{76}$$

Доказательство. Согласно (17), неравенство (76) верно при $w = \Lambda$. Допустим, что это неравенство верно при $1w < m$, где m — натуральное число, и докажем, что оно верно тогда и при $1w = m$.

В самом деле, пусть $1w' = m$. Рассмотрим два случая [лемма 18].

Случай 1. Пусть u', v', x' и ε' удовлетворяют соотношениям (21) и (22). Согласно (21), $1(u' \circ v') = 1w' - 1 = m - 1$ и потому, согласно индуктивному предположению,

$$\nu_f(u' \circ v')^{\sim} \leqslant \nu_f(u' \circ v'). \tag{77}$$

Следовательно,

$$\nu_f w'^{\sim} = \nu_f(u' \circ \{\{x', \varepsilon'\}\} \circ v')^{\sim} \qquad [(21)]$$
$$= \nu_f(v'^{\sim} \circ \{\{x', -\varepsilon'\}\} \circ u'^{\sim}) \qquad [(20) \text{ и } (18)]$$
$$\leqslant \nu_f(v'^{\sim} \circ u'^{\sim}) + |fx'| \qquad [\mathrm{P}_2]$$
$$= \nu_f(u' \circ v')^{\sim} + |fx'| \qquad [(20)]$$
$$\leqslant \nu_f w' \qquad [(77) \text{ и } (22)]$$

Случай 2. Пусть u', v', x', y' и ε' удовлетворяют условиям (23) и (24). В силу (23), $1(u' \circ v') = 1w' - 2 = m - 2$ и потому, согласно индуктивному предположению, имеем неравенство (77). Далее, получаем

$$\nu_f w'^{\sim} = \nu_f(u' \circ \{\{x', \varepsilon'\}, \{y', -\varepsilon'\}\} \circ v')^{\sim} \qquad [(23)]$$
$$= \nu_f(v'^{\sim} \circ \{\{y', \varepsilon'\}, \{x', -\varepsilon'\}\} \circ u'^{\sim}) \qquad [(20) \text{ и } (19)]$$

$$\leqslant \nu_f(v'^{\sim} \circ u'^{\sim}) + |fy' - fx'| \qquad [P_3]$$
$$= \nu_f(u' \circ v')^{\sim} + |fy' - fx'| \qquad [(20)]$$
$$\leqslant \nu_f(u' \circ v') + |fy' - fx'| \qquad [(77)]$$
$$= \nu_f w'. \qquad [(24)]$$

Таким образом, в обоих случаях $\nu_f w'^{\sim} \leqslant \nu_f w'$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 33.

$$\nu_f(u \circ w^{\sim}) \leqslant \nu_f u + \nu_f w \quad (u \in L,\ w \in L).$$

Это следует из лемм 19 и 32.

4. Определение 10. Пусть F_X — свободная группа со свободным базисом X. Отображение α множества L_X на группу F_X, определяемое равенством

$$\alpha\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m = \prod_{i=1}^{m}{}_F\, x_i^{\varepsilon_i} \qquad (m \geqslant 0,\ \{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m \in L), \tag{78}$$

будет называться *свободным отображением* над X.

Свободное отображение над X будет обозначаться символом α_X *.

Очевидно,

$$\alpha\Lambda = 1\,(F), \tag{79}$$
$$\alpha\{\{x, \varepsilon\}\} = x^\varepsilon \quad (x \in X,\ \varepsilon = \pm 1), \tag{80}$$
$$\alpha\{\{x, \varepsilon\}, \{y, \eta\}\} = x^\varepsilon y^\eta \quad (x \in X,\ y \in X,\ \varepsilon = \pm 1,\ \eta = \pm 1), \tag{81}$$
$$\alpha(u \circ v) = (\alpha u)(\alpha v) \quad (u \in L,\ v \in L), \tag{82}$$
$$\alpha u^{\sim} = (\alpha u)^{-1} \quad (u \in L). \tag{83}$$

Известно, что два произведения в F вида (3) равны в F тогда и только тогда, когда можно перейти от одного к другому посредством последовательных сокращений и вставок пар множителей вида $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$, где $x \in X$, $\varepsilon = \pm 1$.

Принимая во внимание лемму 31, мы заключаем отсюда, что справедлива следующая

ЛЕММА 34. *Если* $\alpha u = \alpha v$, *то* $\nu_f u = \nu_f v$.

Эта лемма дает возможность «перенести» функцию ν_f из L в F с помощью отображения α. Это осуществляется следующим образом.

Пусть $z \in F$. Существует слово u такое, что

$$z = \alpha u. \tag{84}$$

Полагаем $N_f z = \nu_f u$.

Это определение законно, так как, согласно лемме 34, число $\nu_f u$ не зависит от выбора слова u, удовлетворяющего соотношению (84).

Определение 11. Только что построенная функция N_f в F называется *f-нормой*.

Согласно построению, f-норма характеризуется равенством

$$N_f \alpha u = \nu_f u \quad (u \in L). \tag{85}$$

Следующая лемма оправдывает термин «f-норма».

* В дальнейшем опускаем индекс X при F и α.

ЛЕММА 35. *f-норма есть норма в группе* F.

Доказательство.

$$\begin{aligned} N_f 1(F) &= N_f \alpha \Delta && [(79)] \\ &= \nu_f \Delta && [(85)] \\ &= 0. && [P_1] \end{aligned}$$

Следовательно, функция N_f удовлетворяет условию N_1.

Пусть, далее, $z \in F$ и $t \in F$. Тогда существуют слова u и v, удовлетворяющие соотношениям (84) и

$$t = \alpha v. \tag{86}$$

Имеем

$$\begin{aligned} N_f(zt^{-1}) &= N_f((\alpha u)(\alpha v)^{-1}) && [(84) \text{ и } (86)] \\ &= N_f(\alpha(u \circ v^{\sim})) && [(83) \text{ и } (82)] \\ &= \nu_f(u \circ v^{\sim}) && [(85)] \\ &\leqslant \nu_f u + \nu_f v && [\text{лемма } 33] \\ &= N_f \alpha u + N_f \alpha v && [(85)] \\ &= N_f z + N_f t. && [(84) \text{ и } (86)] \end{aligned}$$

Следовательно, функция N_f удовлетворяет условию N_2. Таким образом, эта функция является нормой в группе F, что и требовалось доказать.

5. Мы установим теперь некоторые свойства f-нормы.

ЛЕММА 36.

$$N_f(zt) = N_f(tz) \quad (z \in F; \ t \in F). \tag{87}$$

Доказательство. Пусть $z \in F$ и $t \in F$. Существуют u и v, удовлетворяющие условиям (84) и (86). Имеем

$$\begin{aligned} N_f(zt) &= N_f((\alpha u)(\alpha v)) && [(84) \text{ и } (86)] \\ &= N_f \alpha(u \circ v) && [(82)] \\ &= \nu_f(u \circ v) && [(85)] \\ &= \nu_f(v \circ u) && [\text{лемма } 27] \\ &= N_f \alpha(v \circ u) && [(85)] \\ &= N_f((\alpha v)(\alpha u)) && [(82)] \\ &= N_f(tz). && [(84) \text{ и } (86)] \end{aligned}$$

ЛЕММА 37.

$$N_f(z^{-1}tz) = N_f t \quad (z \in F, \ t \in F). \tag{88}$$

В самом деле, равенство (88) получается из равенства (87) при подстановке $z^{-1}t$ вместо t.

ЛЕММА 38.

$$N_f x = |fx| \qquad (x \in X).$$

Доказательство. Пусть $x \in X$. Имеем

$$\begin{aligned} N_f x &= N_f \alpha\{\{x, 1\}\} && [(80)] \\ &= \nu_f\{\{x, 1\}\} && [(85)] \\ &= |fx|. && [\text{лемма } 15] \end{aligned}$$

ЛЕММА 39.

$$N_f(z^{-1}xy^{-1}z)=|fx-fy| \quad (x\in X,\ y\in X,\ z\in F).$$

Доказательство. Пусть $x\in X$, $y\in X$, $z\in F$. Имеем

$$\begin{aligned} N_f(z^{-1}xy^{-1}z) &= N_f(xy^{-1}) && \text{[лемма 37]}\\ &= N_f(\alpha\{\{x, 1\},\{y, -1\}\}) && [(81)]\\ &= \nu_f\{\{x, 1\},\{y, -1\}\} && [(85)]\\ &= |fy-fx|. && \text{[лемма 17]} \end{aligned}$$

ЛЕММА 40.

$$\nu_f w \geqslant 0 \ (w\in L).$$

Доказательство. Пусть $w\in L$. Имеем

$$\begin{aligned} \nu_f w &= N_f\alpha w && [(85)]\\ &\geqslant 0. && \text{[леммы 1 и 35]} \end{aligned}$$

6. Пусть $w=\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m$ — непустое слово в X. Образуем совокупность чисел $|fx_i|$ $(i=1, \ldots, m)$ и чисел $|fx_i-fx_j|$, соответствующих парам $\{i, j\}$ таким, что $x_i\neq x_j$. Наименьшее из всех этих чисел условимся обозначать символом $\mu_f w$. Этим мы определяем некоторую функцию μ_f в множестве $L\diagdown(\Lambda)$.

ЛЕММА 41. *Если* $u\in L$, $v\in L$, $w\in L$ *и* $u\circ w\neq\Lambda$, *то*

$$\mu_f(u\circ v\circ w)\leqslant\mu_f(u\circ w).$$

Это непосредственно следует из определения функции μ_f.

ЛЕММА 42. *Если* $w\in L$ *и* $\alpha w\neq 1(F)$, *то*

$$\nu_f w\geqslant\mu_f w. \tag{89}$$

Доказательство. Из условия $\alpha w\neq 1(F)$ следует, согласно (79), что $w\neq\Lambda$. Таким образом, случай $lw=0$ отпадает. Если $lw=1$, то w имеет вид $\{\{x, \varepsilon\}\}$, где $x\in X$, $\varepsilon=\pm 1$. В этом случае по определению функции μ_f имеем $\mu_f w=|fx|$ и, согласно лемме 15, $\nu_f w=|fx|$. Следовательно, неравенство (89) имеет место в этом случае. Допустим теперь, что это неравенство соблюдается всякий раз, когда $\alpha w\neq 1(F)$ и $lw<m$, где m — целое число, большее единицы, и докажем, что оно соблюдается тогда и при $\alpha w\neq 1(F)$ и $lw=m$.

В самом деле, пусть $\alpha w'\neq 1(F)$ и $lw'=m$. Положим

$$w'=\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m. \tag{90}$$

Возможны два случая [лемма 18].

Случай 1. Пусть u', v', x', ε' удовлетворяют условиям (21) и (22). В силу (21) и (90), x' равно одному из x_i и потому, согласно (22) и лемме 40, $\nu_f w'\geqslant|fx_i|$ для одного из i. По определению функции μ_f, $|fx_i|\geqslant\mu_f w'$. Следовательно, $\nu_f w'\geqslant\mu_f w'$.

Случай 2. Пусть u', v', x', y' и ε' удовлетворяют условиям (23) и (24). Возможны два подслучая:

2,1. $x'=y'$;

2,2. $x'\neq y'$.

Подслучай 2,1. Так как $x' = y'$,

$$\alpha w' = (\alpha u')(\alpha\{\{x', \varepsilon'\}, \{x', -\varepsilon'\}\})(\alpha v') \qquad [(23) \text{ и } (82)]$$
$$= (\alpha u')(\alpha v') \qquad [(81)]$$
$$= \alpha(u' \circ v'). \qquad [(82)]$$

Следовательно, $\alpha(u' \circ v') \neq 1(F)$. Кроме того, согласно (23), $\mathrm{l}(u' \circ v') = = \mathrm{l}w' - 2 = m - 2$. Поэтому на основании индуктивного предположения

$$\nu_f(u' \circ v') \geqslant \mu_f(u' \circ v'). \tag{91}$$

Согласно лемме 41 и равенству (23),

$$\mu_f(u' \circ v') \geqslant \mu_f w'. \tag{92}$$

Согласно (24),

$$\nu_f w' \geqslant \nu_f(u' \circ v'). \tag{93}$$

Неравенства (91)—(93) дают $\nu_f w' \geqslant \mu_f w'$.

Подслучай 2,2. В силу (23) и (90) существует j такое, что $x_j = x'$, $x_{j+1} = y'$. Согласно лемме 40 и равенству (24),

$$\nu_f w' \geqslant |fx' - fy'| = |fx_j - fx_{j+1}|.$$

Здесь $x_j \neq x_{j+1}$, так как, по предположению, $x' \neq y'$. По определению функции μ_f отсюда следует, что $|fx_j - fx_{j+1}| \geqslant \mu_f w'$. Следовательно, $\nu_f w' \geqslant \mu_f w'$. Таким образом, во всех случаях $\nu_f w' \geqslant \mu_f w'$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 43. *Если $w \in L$, $\alpha w \neq 1(F)$ и $\alpha w \in F \setminus X$, то при всяком $x \in X$*

$$\nu_f(\{\{x, -1\}\} \circ w) \geqslant \mu_f w. \tag{94}$$

Доказательство. Случай, когда $\mathrm{l}w = 0$, попрежнему отпадает. Допустим, что $\mathrm{l}w = 1$. Тогда w имеет вид $\{\{y, \varepsilon\}\}$, где $y \in X$, $\varepsilon = \pm 1$. Согласно (80), $\alpha w = y^\varepsilon$ и, так как по предположению $\alpha w \in F \setminus X$, то $\varepsilon \neq 1$. Следовательно, $\varepsilon = -1$. Таким образом, $w = \{\{y, -1\}\}$ и при всяком $x \in X$

$$\nu_f(\{\{x, -1\}\} \circ w) = \nu_f\{\{x, -1\}, \{y, -1\}\}$$
$$= |fx| + |fy|; \qquad [\text{лемма } 16]$$

тогда как, по определению функции μ_f, $\mu_f w = |fy|$. Следовательно, неравенство (94) соблюдается в этом случае при всяком $x \in X$. Допустим теперь, что это неравенство верно всякий раз, когда $\alpha w \neq 1(F)$, $\alpha w \in F \setminus X$, $x \in X$ и $\mathrm{l}w < m$, где m — целое число, большее единицы, и докажем, что тогда оно верно и при условиях $\alpha w \neq 1(F)$, $\alpha w \in F \setminus X$, $x \in X$, $\mathrm{l}w = m$.

Пусть в самом деле w и x удовлетворяют этим условиям. Положим

$$w' = \{\{x, -1\}\} \circ w, \tag{95}$$

$$w = \{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m. \tag{96}$$

Возможны два случая [лемма 18].

Случай 1. Пусть u', v', x', ε' удовлетворяют условиям (21) и (22): Возможны два подслучая, указанные в доказательстве леммы 21.

Подслучай 1,1. Как в соответствующем подслучае доказательства леммы 21, получаем равенства (34) и (35). Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu_f w' &\geqslant \nu_f v' && [(35)] \\ &= \nu_f w && [(34)] \\ &\geqslant \mu_f w. && [\text{лемма } 42] \end{aligned}$$

Подслучай 1, 2. Сравнивая равенства (21) и (95), заключаем, что существует слово t, удовлетворяющее условию (37). Из равенств (37) и (96) следует, что x' равно одному из x_i. Рассуждая далее, как в доказательстве леммы 42, заключаем, что $v_i w' \geqslant \mu_f w$.

Случай 2. Пусть u', v', x', y', ε' удовлетворяют условиям (23) и (24). Возможны два подслучая [лемма 11].

Подслучай 2,1. Соотношение (23) принимает вид (41). Сравнивая равенства (41) и (95), получаем равенства (43) и

$$\varepsilon' = -1 \tag{97}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha w &= (\alpha \{\{y', -\varepsilon'\}\})(\alpha v') && [(43) \text{ и } (82)] \\ &= y'\alpha v'. && [(80) \text{ и } (97)] \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $y' \in X$, тогда как $\alpha w \in F \diagdown X$, заключаем, что $\alpha v' \neq 1\,(F)$. Согласно лемме 42, отсюда следует, что

$$\nu_f v' \geqslant \mu_f v'. \tag{98}$$

В силу леммы 41, из равенства (43) вытекает, что

$$\mu_f v' \geqslant \mu_f w. \tag{99}$$

Соотношение (24) принимает вид (44), откуда

$$\nu_f w' \geqslant \nu_f v'. \tag{100}$$

Из неравенств (98) — (100) следует, что $\nu_f w' \geqslant \mu_f w$.

Подслучай 2,2. Сравнивая равенства (23) и (95), заключаем о существовании слова t, удовлетворяющего условиям (46) и

$$u' = \{\{x, -1\}\} \circ t. \tag{101}$$

Теперь мы в свою очередь будем различать два подслучая, а именно:
2,21. $x' = y'$;
2,22. $x' \neq y'$.

Подслучай 2,21. Имеем

$$\begin{aligned} \alpha w &= (\alpha t)(\alpha \{\{x', \varepsilon'\}, \{x', -\varepsilon'\}\})(\alpha v') && [(46) \text{ и } (82)] \\ &= (\alpha t)(\alpha v') && [(81)] \\ &= \alpha (t \circ v'). && [(82)] \end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha (t \circ v') \neq 1\,(F)$ и $\alpha (t \circ v') \in F \diagdown X$. Кроме того, согласно (46), $l(t \circ v') = l\,w - 2 = m - 2$. На основании индуктивного предположения отсюда следует, что

$$\nu_f (\{\{x, -1\}\} \circ t \circ v') \geqslant \mu_f (t \circ v'). \tag{102}$$

Согласно лемме 41, из равенства (46) находим

$$\mu_f(t \circ v') \geqslant \mu_f w. \tag{103}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \nu_f w' &\geqslant \nu_f(u' \circ v') && [(24)] \\ &= \nu_f(\{\{x, -1\}\} \circ t \circ v'). && [(101)] \end{aligned} \tag{104}$$

Из неравенств (102) — (104) вытекает, что $\nu_f w' \geqslant \mu_f w$.

Подслучай 2,22. Из равенств (46) и (96) следует, что существует такое j, что $x_j = x'$, $x_{j+1} = y'$. Рассуждая далее, как в конце доказательства леммы 42, получаем неравенство $\nu_f w' \geqslant \mu_f w$.

Таким образом, во всех случаях $\nu_f w' \geqslant \mu_f w'$, что и требовалось доказать.

7. Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда X есть пространство. В этом случае мы определим некоторое свойство непрерывности норм в F_X.

Определение 12. Пусть X — топологическое пространство, N — норма в свободной группе F_X. Условимся говорить, что N *согласована* с X, если выполнено следующее условие:

C. Каков бы ни был элемент $a \in F_X$, $N(a^{-1}xy^{-1}a)$ есть непрерывная функция пары $\{x, y\}$ точек x и y пространства X.

Непосредственно из леммы 39 вытекает

ЛЕММА 44. *Если f — непрерывная действительная функция в топологическом пространстве X, то норма N_f согласована с X.*

§ 3. Мультинормы

1. Определение 13. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое множество норм в группе G. Мы говорим, что $\mathfrak{N}$ — *мультинорма* в G, если выполнены следующие условия:

M_1. Сумма любых двух норм из $\mathfrak{N}$ принадлежит $\mathfrak{N}$.

M_2. $NA_a \in \mathfrak{N}$, каковы бы ни были норма N, принадлежащая $\mathfrak{N}$, и элемент $a \in G$ (определение символа A_a дано в § 1).

M_3. Каков бы ни был элемент x из $G \setminus (1(G))$, $\mathfrak{N}$ содержит такую норму N, что $Nx \neq 0$.

2. ЛЕММА 45. *Если $\mathfrak{N}$ — мультинорма в группе G и $N \in \mathfrak{N}$, то $nN \in \mathfrak{N}$, каково бы ни было целое положительное n.*

Эта лемма следует из M_1.

3. ЛЕММА 46. *Если $\mathfrak{N}$ — мультинорма в группе G, то совокупность $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ множеств*

$$U_N = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(Nx < 1), \tag{105}$$

где N пробегает $\mathfrak{N}$, удовлетворяет пяти условиям Понтрягина ([8]):

(a) $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})} U = (1(G))$;

(b) *пересечение любых двух множеств из $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ содержит некоторое множество из $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$;*

(c) *для всякого U из $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ существует такое $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})$, что $VV^{-1} \subset U$;*

(d) *каковы бы ни были* $U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ *и элемент* a *из* U, *существует* $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})$, *для которого* $Va \subset U$;

(e) *если* $U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ *и* $a \in G$, *то существует такое множество* $V \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})$, *что* $a^{-1}Va \subset U$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{N}$ есть множество норм в G, то, в силу условия N_1 и (105),

$$1(G) \in U_N \quad (N \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})),$$

откуда

$$(1(G)) \subset \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})} U. \tag{106}$$

Если, с другой стороны, $x \in G \setminus (1(G))$, то, согласно M_3, существует элемент N из $\mathfrak{U}(\mathfrak{N})$ такой, что $Nx \neq 0$. По лемме 1, $Nx > 0$. Пусть n — такое положительное целое число, что

$$n > \frac{1}{Nx}. \tag{107}$$

Согласно лемме 45, $nN \in \mathfrak{N}$. Так как $Nx > 0$, то из (107) следует, что $nNx > 1$, откуда, в силу (105), $x \in G \setminus U_{nN}$ и, следовательно,

$$x \in G \setminus \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})} U.$$

Отсюда

$$G \setminus (1(G)) \subset G \setminus \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(\mathfrak{N})} U. \tag{108}$$

Включения (106) и (108) вместе эквивалентны условию (a).

Согласно (105), $U_P \subset U_N$ для любых двух элементов P и N из $\mathfrak{N}$ таких, что P мажорирует N; а по лемме 1 любые две нормы в G мажорируемы их суммой. Следовательно,

$$U_{N_1+N_2} \subset U_{N_1} \cap U_{N_2} \quad (N_1 \in \mathfrak{N},\ N_2 \in \mathfrak{N}),$$

что, в силу M_1, и доказывает (b).

Если $N \in \mathfrak{N}$, то, по лемме 45, $2N \in \mathfrak{N}$. Если, далее, $x \in U_{2N}$ и $y \in U_{2N}$, то, в силу (105), $2Nx < 1$, $2Ny < 1$, $Nx < \frac{1}{2}$, $Ny < \frac{1}{2}$, откуда, в виду N_2, $N(xy^{-1}) < 1$ и, в силу (105), $xy^{-1} \in U_N$. Отсюда

$$U_{2N}U_{2N}^{-1} \subset U_N,$$

что и доказывает (c).

Пусть теперь $N \in \mathfrak{N}$ и $a \in U_N$. В силу (105), $Na < 1$. Пусть n — такое натуральное число, что

$$n > \frac{1}{1 - Na}. \tag{109}$$

На основании леммы 45, $nN \in \mathfrak{N}$. Если, далее, $x \in U_{nN}$, то, в силу (105), $nNx < 1$, откуда, согласно (109),

$$Nx < \frac{1}{n} < 1 - Na.$$

Из леммы 3 заключаем, что

$$N(xa) \leqslant Nx + Na < 1,$$

откуда $xa \in U_N$. Следовательно,

$$U_{nN} a \subset U_N,$$

что и доказывает (d).

Пусть, наконец, $N \in \mathfrak{N}$ и $a \in G$. Согласно M_2, $NA_a \in \mathfrak{N}$. Если $x \in U_{NA_a}$, то, в силу (105), $NA_a x < 1$, т. е. $N(a^{-1}xa) < 1$, откуда $a^{-1}xa \in U_N$. Следовательно,

$$a^{-1} U_{NA_a} a \subset U_N,$$

что и доказывает (e).

4. Введем теперь понятие «топологии» в дискретной группе посредством следующего определения:

Определение 14. Топологическая группа G представляет собой *топологию* в группе H, если G совпадает с H, как группа.

ТЕОРЕМА 6. *Если $\mathfrak{N}$ — мультинорма в группе G, то существует единственная топология в G такая, что совокупность множеств U_N ($N \in \mathfrak{N}$), определенных равенством* (105), *образует полную систему окрестностей* $1(G)$ *в этой топологии.*

Это следует непосредственно из леммы 46 и теоремы 10 Понтрягина [8].

Теорема 6 показывает, что всякая мультинорма в группе G вводит топологию в G, превращая таким образом G в топологическую группу. Естественно дать следующее

Определение 15. Если $\mathfrak{N}$ есть мультинорма в группе G, то единственную топологию в G такую, что совокупность множеств, определенная в лемме 46, образует полную систему окрестностей $1(G)$, мы называем *топологической группой, определенной посредством* $\mathfrak{N}$.

Результат, содержащийся в теореме 6, можно кратко формулировать так: всякая мультинорма в группе G определяет G, как некоторую топологическую группу.

5. ТЕОРЕМА 7. *Если G — топологическая группа, определенная мультинормой $\mathfrak{N}$, то всякая норма, входящая в $\mathfrak{N}$, — непрерывна в G.*

Доказательство. Пусть $N \in \mathfrak{N}$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем натуральное число.

$$n > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{110}$$

Согласно лемме 45, $nN \in \mathfrak{N}$. Если $x \in U_{nN}$, то, в силу (105), $nNx < 1$, откуда, согласно (110), $Nx < \varepsilon$. Так как U_{nN} есть окрестность $1(G)$ в G, то это и означает, согласно лемме 12, что N непрерывна в G.

6. В связи с теоремой 6 естественно поставить вопрос, всякая ли топологическая группа может быть определена мультинормой. Положительный ответ на этот вопрос дает

ТЕОРЕМА 8. *Если G — топологическая группа, то совокупность норм, непрерывных в G, образует мультинорму, определяющую эту топологическую группу.*

Этот весьма важный факт будет доказан методом, принадлежащим Kakutani, который доказал существование односторонне инвариантной метрики во всякой группе, обладающей счетной полной системой окрестностей единицы [(9); см. также (10)].

Легко видеть, что построение Kakutani может быть mutatis mutandis проведено в любой топологической группе, что приводит прямо к теореме 8. Для удобства читателя мы изложим подробно это доказательство, хотя, строго говоря, мы могли бы его опустить. Сначала дадим лемму, в которой содержится самая суть метода.

ЛЕММА 47. *Если U — окрестность единицы в топологической группе G, то в G существует непрерывная норма N такая, что $U_N \subset U$, где U_N определяется равенством* (105).

Доказательство. Положим

$$U_1 = U \cap U^{-1}$$

и построим последовательность $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ окрестностей $1(G)$ в G следующим образом: если окрестность U_i уже построена, то возьмем такую окрестность V_i единичного элемента, что $V_iV_i \subset U_i$ и полагаем $U_{i+1} = V_i \cap V_i^{-1}$. Последовательность $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ обладает свойствами:

$$U_i = U_i^{-1}, \tag{111}$$

$$U_{i+1}U_{i+1} \subset U_i, \tag{112}$$

$$U_1 \subset U. \tag{113}$$

Обозначим буквой D систему двоичных дробей r таких, что $0 < r \leqslant 1$, и построим систему множеств $\{U(r)\}_{r \in D}$ по следующему правилу: положим

$$U(1) = U_1; \tag{114}$$

если уже построены множества

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right),$$

где n — фиксировано, а $m = 1, \ldots, 2^n$, то положим

$$U\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = U_{n+2}, \tag{115}$$

$$U\left(\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right) = U\left(\frac{m}{2^n}\right) U_{n+2} \quad (m = 1, \ldots, 2^n - 1), \tag{116}$$

определяя тем самым множества

$$U\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)$$

для $p=1, \ldots, 2^{n+1}$. Система $\{U(r)\}_{r\in D}$ обладает следующими свойствами:

$$U(1)\subset U, \tag{117}$$

$$U\left(\frac{1}{2^n}\right)=\left(U\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)^{-1} \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{118}$$

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right)U\left(\frac{1}{2^n}\right)\subset U\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \quad (n=1, 2, \ldots; m=1, \ldots, 2^n-1). \tag{119}$$

Действительно, (117) следует из (113) и (114), (118) из (111), (114) и (115), а включение (119) мы сейчас докажем по индукции.

Включение имеет место для $n=1$, так как при этом единственным возможным значением m является 1 и

$$U\left(\frac{1}{2}\right)U\left(\frac{1}{2}\right)=U_2U_2 \qquad [(115)]$$
$$\subset U_1 \qquad [(112)]$$
$$=U(1). \qquad [(114)]$$

Допустим, что включение (119) имеет место для $n=p$, где p — некоторое натуральное число, и докажем его для $n=p+1$. Если m — четное число, т. е. $m=2k$, причем $0<2k<2^n=2^{p+1}$, то

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right)U\left(\frac{1}{2^n}\right)=U\left(\frac{k}{2^p}\right)U_{p+2} \qquad [(115)]$$
$$=U\left(\frac{2k+1}{2^{p+1}}\right) \qquad [(116)]$$
$$=U\left(\frac{m+1}{2^n}\right);$$

если m — нечетное число, т. е. $m=2k+1$, причем $0<2k+1<2^n=$ $=2^{p+1}$, то

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right)U\left(\frac{1}{2^n}\right)=U\left(\frac{2k+1}{2^{p+1}}\right)U_{p+2} \qquad [(115)]$$
$$=U\left(\frac{k}{2^p}\right)U_{p+2}U_{p+2} \qquad [(116)]$$
$$\subset U\left(\frac{k}{2^p}\right)U_{p+1} \qquad [(112)]$$
$$=U\left(\frac{k}{2^p}\right)U\left(\frac{1}{2^p}\right) \qquad [(115)]$$
$$\subset U\left(\frac{k+1}{2^p}\right) \qquad [\text{предположение}]$$
$$=U\left(\frac{m+1}{2^n}\right).$$

Определим теперь $U(r)$ для любой двоичной дроби $r>1$ равенством $U(r)=G$. Тогда включение (119) будет тривиальным образом выполняться для $m\geqslant 2^n$. Следовательно, оно будет справедливо для всех $n=0, 1, 2, \ldots; m=1, 2, \ldots$

Так как множества U_i суть окрестности $1(G)$, то, согласно (114) и (115),

$$1(G)\in U\left(\frac{1}{2^n}\right), \tag{120}$$

откуда, в силу (119),

$$U\left(\frac{m}{2^n}\right) \subset U\left(\frac{m+1}{2^n}\right) \quad (n=0, 1, 2, \ldots; \; m=1, 2, \ldots).$$

Отсюда вытекает, что $U(r) \subset U(s)$ для любой пары $\{r, s\}$ положительных двоичных дробей таких, что $r < s$.

Какова бы ни была точка x группы G, существует такая положительная двоичная дробь r, что $x \in U(r)$; это имеет место, например, для $r=2$. Пусть $f(x)$ будет нижней гранью совокупности таких двоичных дробей. Функция f, заданная таким образом на G, ограничена, и мы можем определить действительную функцию N на G посредством равенства (9). Докажем, что N будет искомой нормой.

В самом деле, согласно лемме 7, N есть норма в G.

Если $x \in G \setminus U$, то, в силу (117), $x \in G \setminus U(1)$, откуда $x \in G \setminus U(r)$ для всех $r \in D$. Следовательно, $f(x) \geqslant 1$. С другой стороны, согласно (120), $f(1(G)) = 0$. Из (9) заключаем, что

$$Nx \geqslant |f(1(G)\,x) - f(1(G))| = |f(x)| \geqslant 1.$$

Таким образом, $Nx \geqslant 1$, коль скоро $x \in G \setminus U$. Другими словами, $G \setminus U \subset G \setminus U_N$, где U_N определено с помощью (105). Отсюда следует, что $U_N \subset U$, и нам остается установить только непрерывность N.

Пусть ε — произвольное положительное число и n — такое натуральное число, что

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{121}$$

а x — любая точка множества $U\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Какова бы ни была точка y группы G, для некоторого целого k

$$\frac{k-1}{2^n} \leqslant f(y) < \frac{k}{2^n}, \tag{122}$$

причем k положительно, так как $fy \geqslant 0$.

Так как система множеств $U(r)$ — возрастающая и $fy < k\,2^{-n}$, то, согласно определению числа fy,

$$y \in U\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

Так как $x \in U\left(\frac{1}{2^n}\right)$, то, в силу (118), $x^{-1} \in U\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Следовательно,

$$yx \in U\left(\frac{k}{2^n}\right) U\left(\frac{1}{2^n}\right),$$
$$yx^{-1} \in U\left(\frac{k}{2^n}\right) U\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

и, в силу (119),

$$yx \in U\left(\frac{k+1}{2^n}\right), \quad yx^{-1} \in U\left(\frac{k+1}{2^n}\right),$$

откуда

$$f(yx) \leqslant \frac{k+1}{2^n}, \quad f(yx^{-1}) \leqslant \frac{k+1}{2^n}.$$

Сравнивая эти неравенства с (121) и (122), мы видим, что

$$f(yx) - f(y) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon, \tag{123}$$

$$f(yx^{-1}) - f(y) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon. \tag{124}$$

Эти неравенства справедливы для всякого $y \in G$, коль скоро $x \in U\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Подставив в (124) yx вместо y, получим $f(y) - f(yx) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon$, а это совместно с (123) дает неравенство $|f(yx) - f(y)| \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon$, которое опять-таки справедливо при всяком $y \in G$, если только $x \in U\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Отсюда, согласно (9),

$$Nx \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon \quad \left(x \in U\left(\frac{1}{2^n}\right)\right).$$

Так как множество $U\left(\frac{1}{2^n}\right)$ есть окрестность точки $1(G)$, заключаем, согласно лемме 12, что норма N непрерывна.

Доказательство теоремы 8. Пусть $\mathfrak{N}$ — совокупность всех непрерывных норм в топологической группе G. Мы докажем, что $\mathfrak{N}$ есть мультинорма, определяющая G.

В самом деле, сумма двух норм в G, согласно лемме 6, есть норма в G; сумма двух непрерывных функций в G есть непрерывная функция в G. Поэтому сумма двух непрерывных норм в G есть непрерывная норма в G, т. е. $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_1.

Если $N \in \mathfrak{N}$ и $a \in G$, то, согласно лемме 11, NA_a есть норма в G. Эта норма непрерывна, потому что A_a — топологическое отображение топологической группы G самой на себя. Итак, $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_2.

Если $x \in G \setminus (1(G))$, то $G \setminus (x)$ — открытое множество, содержащее $1(G)$, т. е. некоторая окрестность $1(G)$. Согласно лемме 47, существует непрерывная норма N в G такая, что $U_N \subset G \setminus (x)$. Эта норма принадлежит $\mathfrak{N}$ и $x \in G \setminus U_N$, откуда $Nx \geqslant 1$ и, следовательно, $Nx \neq 0$, т. е. доказано, что $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_3.

Итак, $\mathfrak{N}$ — мультинорма в G, и нам остается только доказать, что она определяет G. Это можно сделать следующим образом.

Множества U_N, где $N \in \mathfrak{N}$, открыты в G, так как всякая норма N из $\mathfrak{N}$ непрерывна. В силу N_1 эти множества содержат $1(G)$. Следовательно, всякое U_N $(N \in \mathfrak{N})$ есть окрестность $1(G)$ в G, а, согласно лемме 47, эти окрестности образуют полную систему.

7. По теореме 8, всякая топологическая группа определяется некоторой мультинормой. Но, вообще говоря, это может быть сделано разными способами. Среди мультинорм, определяющих заданную топологическую группу, существует, однако, максимальная, которая содержит все прочие мультинормы, определяющие эту топологическую группу. Этой максимальной мультинормой является совокупность всех непрерывных норм в рассматриваемой топологической группе.

Действительно, по теореме 8, наша топологическая группа определяется этой мультинормой, а последняя, согласно теореме 7, содержит все мультинормы, определяющие заданную топологическую группу.

Итак, мы получили

Следствие 1. *Среди мультинорм, определяющих заданную топологическую группу G, существует максимальная, в которой содержатся все определяющие мультинормы. Этой максимальной определяющей мультинормой является совокупность непрерывных норм в G.*

Формулируем теперь

Определение 16. Максимальную определяющую мультинорму топологической группы G будем называть *абсолютной мультинормой* этой топологической группы.

Абсолютная мультинорма топологической группы G будет обозначаться символом $\mathrm{am}(G)$.

Любое понятие теории топологических групп может быть формулировано в терминах, определяющих мультинорм, в частности, абсолютных мультинорм. Здесь мы установим условия того, что гомоморфизм является непрерывным или открытым, в терминах абсолютных мультинорм, т. е. в терминах непрерывных норм в рассматриваемых группах. Эти условия будут полезны для дальнейшего.

8. ТЕОРЕМА 9. *Пусть Φ — гомоморфизм топологической группы G в топологическую группу H. Φ непрерывен тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: $P\Phi \in \mathrm{am}(G)$, каково бы ни было $P \in \mathrm{am}(H)$.*

Доказательство. Необходимость нашего условия вытекает из леммы 8 и из хорошо известной теоремы, согласно которой композиция двух непрерывных отображений есть непрерывное отображение. Докажем достаточность условия.

Пусть для всякого $N \in \mathrm{am}(G)$ определено U_N посредством (105) и положим аналогично

$$V_P = \mathop{\mathscr{E}}_{y}(Py < 1) \quad (P \in \mathrm{am}(H)). \tag{125}$$

Если наше условие выполнено, то $U_{P\Phi}$ существует для всякого $P \in \mathrm{am}(H)$. Если $x \in U_{P\Phi}$, то $P\Phi x < 1$, откуда $\Phi x \in V_P$. Это показывает, что $\Phi U_{P\Phi} \sqsubset V_P$. Так как $U_{P\Phi}$ суть окрестности $1(G)$ в G и множества V_P образуют полную систему окрестностей единицы в H, Φ непрерывно в точке $1(G)$. В силу известной теоремы [([8]); стр. 76] гомоморфизм Φ непрерывен всюду в G.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть Φ — гомоморфизм топологической группы G на топологическую группу H. Φ является открытым гомоморфизмом тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: $P \in \mathrm{am}(H)$, какова бы ни была действительная функция P в H такая, что $P\Phi \in \mathrm{am}(G)$.*

Доказательство. — 1°. *Необходимость условия.* Пусть Φ — открытый гомоморфизм G на H, а P — действительная функция в H такая, что $P\Phi \in \mathrm{am}(G)$. В силу леммы 9, P — норма в H. Докажем непрерывность этой нормы.

Пусть ε — произвольное положительное число, n — целое положительное число, удовлетворяющее неравенству (110). Так как $P\Phi \in \mathrm{am}(G)$,

то, в силу леммы 45, $nP\Phi \in \mathrm{am}(G)$. Пользуясь прежним обозначением, рассмотрим множество $U_{nP\Phi}$. Это множество является окрестностью $1(G)$ в G и, так как Φ — открытый гомоморфизм G на H, то образ $\Phi U_{nP\Phi}$ этого множества служит окрестностью $1(H)$ в H. Если $y \in \Phi U_{nP\Phi}$, то существует такая точка $x \in U_{nP\Phi}$, что $y = \Phi x$. Из определения $U_{nP\Phi}$ следует $nP\Phi x < 1$, т. е. $Py < \frac{1}{n}$, откуда, в силу (110), $Py < \varepsilon$. Последнее неравенство соблюдается в каждой точке $y \in \Phi U_{nP\Phi}$. Так как множество $\Phi U_{nP\Phi}$ является окрестностью $1(H)$ в H, то, по лемме 12, норма P непрерывна.

Это доказывает необходимость нашего условия.

2°. *Достаточность условия.* Предположим, что Φ удовлетворяет нашему условию; пусть U — какая-нибудь окрестность $1(G)$ в G.

Так как мультинорма $\mathrm{am}(G)$ определяет G, то существует такая норма $N \in \mathrm{am}(G)$, что $U_N \subset U$, где U_N определено равенством (105). Определим тогда действительную функцию P на H равенством (11).

По лемме 10, P — норма в H. Отсюда, в силу леммы 8, вытекает, что $P\Phi$ — норма в G. По лемме 10, эта норма мажорируется нормой N. Из леммы 13 заключаем, что $P\Phi \in \mathrm{am}(G)$, откуда, в силу нашего условия, $P \in \mathrm{am}(H)$.

Рассмотрим множество V_P, определяемое равенством (125). Так как $P \in \mathrm{am}(H)$, это множество служит окрестностью $1(H)$ в H. Если $y \in V_P$, то $Py < 1$. Отсюда, в силу (11), следует существование такой точки $x \in G$, что $y = \Phi x$ и $Nx < 1$. В силу (105), $x \in U_N$ и $x \in U$, вследствие того, что $U_N \subset U$. Так как $y = \Phi x$, то $y \in \Phi U$, откуда $V_P \subset \Phi U$.

Итак, для всякой окрестности U точки $1(G)$ в G существует такая окрестность V точки $1(H)$ в H, что $V \subset \Phi U$. В силу известной теоремы [([8]); стр. 76]* Φ есть открытый гомоморфизм.

§ 4. Доказательство теорем существования и единственности

1. ЛЕММА 48. *Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — система n различных точек вполне регулярного пространства X, $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ — система действительных чисел. Существует непрерывная действительная функция f на X такая, что $fx = \xi_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Доказательство. Множество $(x_i)_{i=1}^n \setminus (x_j)$ замкнуто в X и не содержит точку x_j. Так как пространство X вполне регулярно, существует система $\{f_j\}_{j=1}^n$ непрерывных функций f_j в X таких, что

$$f_j x_i = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j; \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Тогда непрерывная функция

$$f = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f_j$$

обладает требуемым свойством.

---

* Различие между определениями открытого отображения, принятыми Понтрягиным и нами (см. сноску** на стр. 4), в данном случае на результат не влияет.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть X — вполне регулярное пространство. Прежде всего строим свободную группу F со свободным базисом X. Пока будем рассматривать F как дискретную группу, и нашей целью будет ввести в F такую топологию, чтобы полученная топологическая группа обладала свойствами F_i ($i=1, 2, 3$).

Для этого возьмем совокупность $\mathfrak{N}$ всех норм в F, согласованных с X.

Докажем, что $\mathfrak{N}$ есть мультинорма в F.

Действительно, $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_1, так как сумма двух согласованных норм является, очевидно, согласованной нормой.

Пусть N — норма в F, согласованная с X, a — элемент F. Для $b \in F$, $x \in X$, $y \in X$ имеем

$$(NA_a)(b^{-1}xy^{-1}b) = N(A_a(b^{-1}xy^{-1}b)) = N((ba)^{-1}xy^{-1}(ba)).$$

Так как N согласована с X, то отсюда следует, что NA_a также согласована с X. Итак, $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_2.

Пусть теперь z — произвольный элемент из $F \setminus 1(F)$. Существует слово w в X такое, что $z = \alpha w$. Положим $w = \{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^{m}$. Так как $z \neq 1(F)$, то $m > 0$. Система $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ может содержать повторения, т. е. x_i может совпадать с x_j при $i \neq j$. Образуем новую систему $\{y_j\}_{j=1}^{n}$, состоящую из тех же точек x_i, но уже без повторений (при этом $n \leqslant m$, $y_j \neq y_k$ при $j \neq k$). Согласно лемме 48, существует такая действительная непрерывная функция f в X, что $fy_j = j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Для этой функции f, очевидно, $\mu_f w = 1$ (см. стр. 25). Так как $\alpha w = z \neq 1(F)$, применима лемма 42, согласно которой $\nu_f w \geqslant \mu_f w$. Отсюда, согласно (85), $N_f z = N_f \alpha w = \nu_f w \geqslant \mu_f w = 1$. Следовательно, $N_f z \neq 0$. С другой стороны, так как функция f непрерывна, то, по лемме 44, $N_f \in \mathfrak{N}$. Это доказывает, что $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_3.

Итак, $\mathfrak{N}$ есть мультинорма в F и, по теореме 6, определяет некоторую топологию в F. С этого момента мы будем считать F топологической группой с топологией, заданной посредством $\mathfrak{N}$. Докажем, что F обладает свойствами F_1, F_2 и F_3.

Пусть U — какое-нибудь открытое множество в F, a — произвольная точка множества $U \cap X$. Так как U есть окрестность точки a в F, Ua^{-1} есть окрестность $1(F)$ в F. Множества U_N, где $N \in \mathfrak{N}$, образуют в F полную систему окрестностей единицы, поэтому существует такая норма $N \in \mathfrak{N}$, что

$$U_N \subset Ua^{-1}. \tag{126}$$

С другой стороны,

$$U_N a = \mathop{\mathscr{E}}_{x}(xa^{-1} \in U_N) = \mathop{\mathscr{E}}_{x}(N(xa^{-1}) < 1) \qquad [(105)]$$

$$U_N a \cap X = \mathop{\mathscr{E}}_{x}(N(xa^{-1}) < 1) \cap X. \tag{127}$$

Так как $N \in \mathfrak{N}$, N согласована с X и $N(xa^{-1})$, рассматриваемая как функция x, непрерывна в X. Из (127) заключаем, что $U_N a \cap X$ есть открытое множество в X, и так как $a \in U_N a \cap X$, то $U_N a \cap X$ есть окрестность точки a в X.

Так как, согласно (126), $U_N a \cap X \subset U \cap X$, то всякая точка множества $U \cap X$ обладает в X окрестностью, содержащейся целиком в $U \cap X$. Другими словами, множество $U \cap X$ открыто в X.

Мы доказали, таким образом, что пересечение X со всяким открытым в F множеством есть множество, открытое в X.

Теперь покажем, что всякое множество, открытое в X, может быть представлено как пересечение такого рода.

В самом деле, пусть V — какое угодно открытое множество в пространстве X. Обозначим буквой $\mathfrak{T}$ совокупность множеств T, открытых в F и таких, что $T \cap X \subset V$. Мы покажем, что всякая точка из V принадлежит какому-нибудь элементу множества $\mathfrak{T}$.

Рассмотрим для этого произвольную точку $a \in V$. Так как, по предположению, пространство X вполне регулярно, то существует непрерывная действительная функция f в X такая, что

$$fa = 0, \tag{128}$$

$$fx = 1 \text{ для всех } x \in X \setminus V. \tag{129}$$

Согласно лемме 44, норма N_f согласована с X. Положим, для краткости, $N = N_f$ и рассмотрим множество U_N. Согласно построению топологической группы F, это множество служит окрестностью $1(F)$ в F. Следовательно, $U_N a$ — окрестность точки a в F, т. е. открытое множество, содержащее a.

Если $x \in U_N a \cap X$, то $xa^{-1} \in U_N$, откуда, в силу (105), $N_f(xa^{-1}) = N(xa^{-1}) < 1$. Так как $a \in X$ и $x \in X$, то, по лемме 39, $|fx - fa| < 1$. Следовательно, в силу (128) и (129), $x \in V$. Таким образом, $U_N a \cap X \subset V$, а так как множество $U_N a$ открыто в F, $U_N a \in \mathfrak{T}$. Так как, с другой стороны, $a \in U_N a$, мы видим, что всякая точка множества V входит в какой-нибудь элемент множества $\mathfrak{T}$. Это можно записать в виде включения

$$V \subset U, \tag{130}$$

где U — сумма всех элементов множества $\mathfrak{T}$. С другой стороны, V содержит пересечения X с этими элементами, т. е.

$$U \cap X \subset V. \tag{131}$$

Так как $V \subset X$, то из (130) и (131) следует равенство $V = U \cap X$. Здесь U — сумма множеств, открытых в пространстве F, следовательно, множество, открытое в F. Отсюда мы заключаем, что всякое открытое в X множество представляется как пересечение множества X с множеством, открытым в F. Так как всякое такое пересечение, как мы видели, есть открытое множество в X, то X есть подпространство пространства F. Таким образом, F обладает свойством F_1.

Наличие свойства F_2 следует непосредственно из построения F, так как X алгебраически порождает F. Остается доказать, что F обладает свойством F_3.

Для этого рассмотрим непрерывное отображение φ пространства X в топологическую группу G. Так как F есть свободная группа со свободным базисом X, то существует гомоморфизм Φ группы F в G, удовлетворяющий (2) во всякой точке $x \in X$. Покажем, что такой гомоморфизм непрерывен.

Действительно, пусть P — непрерывная норма в G. По лемме 8, $P\Phi$ есть норма в F. Если $a \in F$, то, какова бы ни была пара $\{x, y\}$ точек пространства X,

$$\Phi(a^{-1}xy^{-1}a) = (\Phi a)^{-1}(\Phi x)(\Phi y)^{-1}(\Phi a)$$

$$= (\Phi a)^{-1}(\varphi x)(\varphi y)^{-1}(\Phi a). \qquad [(2)]$$

Отсюда, в виду непрерывности отображения φ и групповых операций в G, следует, что $\Phi(a^{-1}xy^{-1}a)$ зависит непрерывно от пары $\{x, y\}$. Далее, так как норма P непрерывна в G, то $P\Phi(a^{-1}xy^{-1}a)$ есть непрерывная функция этой пары. А это доказывает, что норма $P\Phi$ согласована с X, т. е. что $P\Phi \in \mathfrak{N}$.

Отсюда, по теореме 7, вытекает непрерывность нормы $P\Phi$ в F. Мы доказали, что $P\Phi \in \mathrm{am}(F)$, какова бы ни была норма $P \in \mathrm{am}(G)$. Согласно теореме 9, отсюда следует непрерывность гомоморфизма Φ.

3. Доказательство теоремы 2 будет основано на следующей лемме:

ЛЕММА 49. *Пусть X — подмножество топологической группы G, Φ — непрерывный эндоморфизм группы G, переводящий самое в себя каждую точку множества X. Если X топологически порождает G, то Φ есть тождественное отображение.*

Доказательство. Пусть H есть совокупность неподвижных точек отображения Φ, т. е.

$$H = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(\Phi x = x).$$

H есть подгруппа G, так как Φ есть эндоморфизм. Далее, отображение Φ непрерывно, поэтому H замкнуто в G; по предположению, $X \subset H$. Так как X топологически порождает G, то $H = G$.

4. Доказательство теоремы 2. Пусть F и G — две топологические группы со свойствами F_1, F_2 и F_3. Мы должны доказать существование топологического изоморфизма Φ топологической группы F на топологическую группу G, удовлетворяющего условию (4) для всех $x \in X$.

Так как тождественное отображение пространства X непрерывно, то, в силу свойства F_1 топологической группы G, оно будет непрерывным отображением пространства X в G. В силу свойства F_3 топологической группы F отсюда следует, что существует непрерывный гомоморфизм Φ топологической группы F в G, удовлетворяющий (4) при всяком $x \in X$. Аналогично, существует непрерывный гомоморфизм Ψ топологической группы G в F, для которого $\Psi x = x$ при всяком $x \in X$.

Композиция гомоморфизмов $\Psi\Phi$ представляет собой непрерывный эндоморфизм топологической группы F, переводящий самое в себя каж-

дую точку множества X. В силу свойства F_2' топологической группы F и леммы 49, $\Psi\Phi$ есть тождественный изоморфизм F. Аналогично, $\Phi\Psi$ есть тождественный изоморфизм топологической группы G.

Отсюда $\Phi\Psi G = G$ и тем более $\Phi F = G$. Подобным же образом, $\Psi G = F$.

Если $x \in F$, $y \in F$ и $\Phi x = \Phi y$, то $x = \Psi\Phi x = \Psi\Phi y = y$. Следовательно, отображение Φ взаимно однозначно. Точно так же и Ψ есть взаимно однозначное отображение.

Итак, гомоморфизмы Φ и Ψ суть взаимно обратные изоморфизмы (соответственно) F на G и G на F. Оба эти гомоморфизма непрерывны; следовательно, это—топологические изоморфизмы, и так как $\Phi x = x$ для всех $x \in X$, наша теорема полностью доказана.

5. Теоремы 1 и 2 оправдывают введенное выше определение свободной топологической группы вполне регулярного пространства (см. определение 2). Теорема 3 прямо вытекает из построения, проведенного в доказательстве теоремы 1.

§ 5. Доказательство теоремы замкнутости и решение проблемы нормальности

1. Доказательство теоремы 4. Пусть F — свободная топологическая группа вполне регулярного пространства X. Докажем, что X замкнуто в F.

Не ограничивая общности, мы вправе предположить, что F есть топологическая группа, построенная в доказательстве теоремы 1.

Пусть z — какая угодно точка множества $F \setminus X$. Будем различать два случая: $z \neq 1\,(F)$ и $z = 1\,(F)$.

В первом случае выбираем слово w и непрерывную функцию f, как в доказательстве теоремы 1 (стр. 37). Имеем $\mu_f w = 1$. Так как $\alpha w = z \neq 1\,(F)$ и $\alpha w = z \in F \setminus X$, применима лемма 43, согласно которой неравенство (94) имеет место, какова бы ни была точка $x \in X$. Следовательно, для любой такой точки x

$$
\begin{aligned}
N_f(z^{-1}x) &= N_f(x^{-1}z) && [\text{леммы 2 и 35}]\\
&= N_f((\alpha\{\{x,-1\}\})(\alpha w)) && [(80)]\\
&= \nu_f(\{\{x,-1\}\} \circ w) && [(82)\ \text{и}\ (85)]\\
&\geqslant \mu_f w = 1. && [(94)]
\end{aligned}
$$

Таким образом, $N_f(z^{-1}x) \geqslant 1$, откуда $z^{-1}x \in F \setminus U_N$, где $N = N_f$. Следовательно, $x \in F \setminus zU_N$, какова бы ни была точка $x \in X$, т. е.

$$X \cap zU_N = \Lambda. \tag{132}$$

Во втором случае определим на X функцию f, положив $fx = 1$ $(x \in X)$. Эта функция непрерывна и, согласно лемме 38, $N_f x = 1$ для любого $x \in X$. Так как теперь $z = 1\,(F)$, то мы снова получаем $N_f(z^{-1}x) \geqslant 1$ $(x \in X)$ и приходим к равенству (132) при $N = N_f$.

Итак, в обоих случаях на X существует непрерывная функция f, для которой имеет место (132), где $N = N_f$.

Согласно лемме 44, норма N согласована с X и поэтому $N \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — мультинорма в F, введенная при доказательстве теоремы 1. Так как эта мультинорма определяет F, как топологическую группу, то U_N есть окрестность единицы в F; следовательно, zU_N — окрестность точки z в F.

Итак, мы доказали, что всякая точка z множества $F \setminus X$ обладает окрестностью, целиком лежащей в $F \setminus X$. Другими словами, $F \setminus X$ есть открытое множество в F, поэтому X замкнуто в F.

2. Только что доказанная теорема 4 дает решение проблемы нормальности. А именно, имеет место

Следствие 2. *Свободная топологическая группа вполне регулярного, но не нормального, пространства не является нормальным пространством.*

В самом деле, так как всякое замкнутое подмножество нормального пространства само является нормальным пространством *, то это следствие вытекает из теоремы 4 в силу свойства F_1 свободной топологической группы пространства.

Далее, имеем

Следствие 3. *Существуют ненормальные топологические группы.*

В силу следствия 2 это вытекает из существования вполне регулярных, но не нормальных, пространств ([2]).

Следствие 3 будет в дальнейшем значительно усилено (см. следствие 7).

§ 6. Аналог теоремы Dyck'a

1. Выше мы дали определение свободной топологической группы. Здесь мы докажем аналог теоремы Dyck'a, именно, теорему 5.

Доказательство теоремы 5. Пусть G — какая-нибудь топологическая группа. Она является вполне регулярным топологическим пространством, и мы можем образовать свободную топологическую группу F этого пространства. В силу свойства F_1 группы F, G является подпространством F и тождественное отображение этого подпространства может быть продолжено до некоторого непрерывного гомоморфизма Φ топологической группы F в G. Этот гомоморфизм при всяком $x \in G$ удовлетворяет равенству (4), откуда следует, что $\Phi G = G$ и тем более $\Phi F = G$. Итак, Φ — непрерывный гомоморфизм F на G. Докажем, что это открытый гомоморфизм.

В самом деле, пусть P — действительная функция на G такая, что $P\Phi \in \mathrm{am}(F)$. По лемме 9, P — норма в G. В силу (4), $Px = P\Phi x$ для любой точки $x \in G$, и так как функция $P\Phi$ непрерывна в F, то P непрерывна в подпространстве G пространства F. Итак, $P \in \mathrm{am}(G)$, если $P\Phi \in \mathrm{am}(F)$, а это, в силу теоремы 10, означает, что Φ — открытый гомоморфизм.

Мы доказали существование открытого непрерывного гомоморфизма F на G. Отсюда, в силу известной теоремы [([8]); теорема 12] следует, что G топологически изоморфна некоторой топологической фактор-группе топологической группы F. Но топологическая группа F свободная, таким образом наша теорема доказана.

§ 7. Топологические группы, определяемые системой соотношений

1. Определение 17. Всякое подмножество множества L_X будем называть *схемой соотношений* в X.

---

* См. сноску * на стр. 4.

Определение 18. Пусть X — некоторое вполне регулярное пространство, R — схема соотношений в X, φ — непрерывное отображение пространства X в некоторую топологическую группу G. Мы говорим, что пара $\{\varphi, G\}$ есть *осуществление* схемы соотношений R, если выполнены следующие два условия:

R_1. φX топологически порождает G;

R_2. $\prod_{i=1}^{m}{}_G (\varphi x_i)^{\varepsilon_i} = 1\,(G)$, коль скоро $\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^{m} \in R$.

2. ТЕОРЕМА 11. *Пусть R — схема соотношений во вполне регулярном пространстве X, $\{\varphi, G\}$ — некоторое осуществление R. Если χ — непрерывный гомоморфизм G на всюду плотную подгруппу топологической группы H, то $\{\chi\varphi, H\}$ есть также осуществление R.*

Доказательство. Так как φ — непрерывное отображение пространства X в G, а χ — непрерывное отображение G в H, то $\chi\varphi$ — непрерывное отображение X в H. В силу условия R_1 для $\{\varphi, G\}$, φX топологически порождает G, т. е. φX порождает в G некоторую, всюду плотную подгруппу K (см. Введение, 4). Так как χ есть гомоморфизм, то $\chi\varphi X$ порождает χK, причем χK всюду плотно в χG, потому что χ непрерывно. Но, по предположению, χG всюду плотно в H. Следовательно, χK всюду плотно в H, т. е. $\chi\varphi X$ топологически порождает H. Таким образом, для $\{\chi\varphi, H\}$ выполняется условие R_1.

Если $\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^{m} \in R$, то, в силу условия R_2 для $\{\varphi, G\}$,

$$\prod_{i=1}^{m}{}_G (\varphi x_i)^{\varepsilon_i} = 1\,(G),$$

откуда

$$\prod_{i=1}^{m}{}_H (\chi\varphi x_i)^{\varepsilon_i} = \chi \prod_{i=1}^{m}{}_G (\varphi x_i)^{\varepsilon_i} = 1\,(H).$$

Это означает, что для $\{\chi\varphi, H\}$ соблюдается условие R_2.

3. Теорема 11 подсказывает следующее

Определение 19. Пусть $\{\varphi, G\}$ и $\{\psi, H\}$ — осуществления некоторой схемы соотношений. Будем говорить, что $\{\varphi, G\}$ *индуцирует* $\{\psi, H\}$ ($\{\varphi, G\}$ *эквивалентно* $\{\psi, H\}$), если существует непрерывный гомоморфизм (соответственно, топологический изоморфизм) χ топологической группы G на некоторую всюду плотную в H подгруппу (соответственно, на H) такой, что $\psi = \chi\varphi$.

4. Рассмотрим совокупность всевозможных осуществлений фиксированной схемы соотношений R. Мы покажем, что в этой совокупности содержится осуществление, индуцирующее любое другое осуществление R. С точностью до эквивалентности такое осуществление определяется однозначно. Для упрощения формулировки этих результатов введем

Определение 20. $\{\varphi, G\}$ есть *первообразное осуществление* схемы соотношений R, если $\{\varphi, G\}$ есть осуществление R, индуцирующее любое другое ее осуществление.

Нами будет доказана

ЛЕММА 50. *Пусть R — схема соотношений во вполне регулярном пространстве X; F — свободная топологическая группа пространства X; H — наименьший замкнутый нормальный делитель F, содержащий αR, где α — свободное отображение над X; Φ — естественный гомоморфизм группы F на F/H. Определим отображение φ пространства X в F/H посредством равенства* (2). *Тогда* $\{\varphi, F/H\}$ *есть первообразное осуществление R.*

Доказательство. Положим для сокращения $G = F/H$. В силу (2) $\varphi X = \Phi X$, и так как X порождает F алгебраически (см. теорему 3), ΦX алгебраически порождает группу $\Phi F = G$. Итак, φX алгебраически порождает G; тем более φX порождает G топологически. Таким образом, $\{\varphi, G\}$ удовлетворяет условию R_1.

Далее, если $\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m \in R$, то, в силу (78),

$$\prod_{i=1}^{m} x_i^{\varepsilon_i} \in \alpha R,$$

откуда

$$\prod_{i=1}^{m} x_i^{\varepsilon_i} \in H,$$

и так как $\Phi H = (1(G))$, то

$$\Phi \prod_{i=1}^{m} x_i^{\varepsilon_i} = 1(G). \tag{133}$$

Здесь x_i — точки X, а Φ — гомоморфизм F, совпадающий с φ на X. Поэтому из (133) получаем

$$\prod_{i=1}^{m} (\varphi x_i)^{\varepsilon_i} = 1(G),$$

т. е. $\{\varphi, G\}$ удовлетворяет условию R_2.

Таким образом, $\{\varphi, G\}$ есть осуществление R.

Пусть теперь $\{\psi, K\}$ — произвольное осуществление R. Покажем, что $\{\varphi, G\}$ индуцирует $\{\psi, K\}$.

В самом деле, так как ψ — непрерывное отображение X в K, в силу свойства F_3 для F существует непрерывный гомоморфизм Ψ топологической группы F в K такой, что во всякой точке $x \in X$

$$\Psi x = \psi x. \tag{134}$$

Если $z \in \alpha R$, то существует слово $u \in R$, удовлетворяющее (84). Это слово имеет вид $\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m$, где $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$, и так как $u \in R$, то

$$\begin{aligned} \Psi z &= \Psi \alpha u && [(84)] \\ &= \Psi \alpha \{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^m \\ &= \Psi \prod_{F\, i=1}^{m} x_i^{\varepsilon_i}, && [(78)] \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{m}{}_K (\psi x_i)^{\varepsilon_i} \qquad [(134)]$$
$$= 1\,(K). \qquad [R_2 \text{ для } \{\psi, K\}]$$

Таким образом, $\Psi z = 1\,(K)$, каков бы ни был $z \in \alpha R$. Другими словами,
$$\Psi \alpha R \subset (1\,(K)). \tag{135}$$

С другой стороны, ядро J непрерывного гомоморфизма Ψ есть замкнутый нормальный делитель топологической группы F. Включение (135) показывает, что $\alpha R \subset J$, и так как H — наименьший замкнутый нормальный делитель топологической группы F, содержащий αR, то $H \subset J$, т. е. $\Psi H = (1\,(K))$. Следовательно, для любого $z \in F$
$$\Psi(zH) = \Psi z\,(1\,(K)) = (\Psi z).$$

Множества zH, т. е. смежные классы относительно H, суть точки фактор-группы F/H. Образ всякого такого смежного класса при гомоморфизме Ψ есть, как мы видели, одноточечное подмножество в K. Поэтому отображение χ группы G в K можно определить посредством равенства
$$\chi(zH) = \Psi z. \tag{136}$$

Это отображение является гомоморфизмом, так как, в силу (136),
$$\chi((zH)(tH)) = \chi(ztH) = \Psi(zt) = (\Psi z)(\Psi t) = (\chi(zH))(\chi(tH)).$$

Согласно (134), $\psi X = \Psi X \subset \Psi F$, и так как ψX топологически порождает K (в силу условия R_1 для $\{\psi, K\}$), то группа ΨF всюду плотна в K. Далее, на основании (136) $\chi G = \Psi F$. Следовательно, χ есть отображение G на всюду плотную подгруппу K.

Так как Φ — естественный гомоморфизм F на G, то для всякого $z \in F$
$$\chi \Phi z = \chi(zH) = \Psi z.$$

При $z \in X$, в силу (2) и (134), отсюда получаем $\chi\varphi z = \psi z$. Следовательно,
$$\chi\Phi = \Psi \tag{137}$$
и $\chi\varphi = \psi$. Остается доказать непрерывность χ. Для этого рассмотрим произвольное множество V, открытое в K. Так как Ψ — непрерывный гомоморфизм F в K, то $\Psi^{-1}V$ является открытым множеством в F. Согласно (137), $\Psi^{-1}V = \Phi^{-1}\chi^{-1}V$.

С другой стороны, естественный гомоморфизм Φ группы F на G будет открытым отображением [([8]), теорема 11]. Следовательно, множество $\Phi\Phi^{-1}\chi^{-1}V$ открыто в G. Но Φ — отображение F на G, следовательно, $\Phi\Phi^{-1}\chi^{-1}V = \chi^{-1}V$. Таким образом, $\chi^{-1}V$ открыто в G, коль скоро V открыто в K. Это и означает, что χ непрерывно.

Из леммы 50 непосредственно вытекает

ТЕОРЕМА 12. *Всякая схема соотношений во вполне регулярном пространстве имеет первообразное осуществление.*

Докажем теперь единственность первообразного осуществления.

ТЕОРЕМА 13. *Первообразное осуществление схемы соотношений во вполне регулярном пространстве единственно с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi, G\}$ и $\{\psi, H\}$ — первообразные осуществления схемы соотношений R во вполне регулярном пространстве X. Докажем, что $\{\varphi, G\}$ и $\{\psi, H\}$ эквивалентны.

Действительно, так как осуществление $\{\varphi, G\}$ первообразно, то оно индуцирует $\{\psi, H\}$, т. е. существует такой непрерывный гомоморфизм χ группы G на всюду плотную подгруппу в H, что $\psi=\chi\varphi$. Аналогично существует такой непрерывный гомоморфизм θ группы H на всюду плотную подгруппу в G, что $\varphi=\theta\psi$. Из этих равенств следует: $\theta\chi\varphi=\varphi$, т. е. $\theta\chi\varphi x=\varphi x$, каков бы ни был $x \in X$. Другими словами, $\theta\chi z=z$ для всякого $z \in \varphi X$. Здесь $\theta\chi$ — непрерывный эндоморфизм группы G. Так как, в силу условия R_1 для $\{\varphi, G\}$, φX топологически порождает G, то, согласно лемме 49, $\theta\chi$ есть тождественное отображение G. Подобным же образом $\chi\theta$ есть тождественное отображение H. Следовательно, χ и θ представляют собою взаимно обратные изоморфизмы групп G и H. Так как оба эти гомоморфизма непрерывны, то χ есть топологический изоморфизм группы G на H и, в силу того, что $\psi=\chi\varphi$, $\{\varphi, G\}$ эквивалентно $\{\psi, H\}$.

5. Один частный случай осуществления заслуживает нашего особого внимания. Мы охарактеризуем этот случай, формулируя

Определение 21. Пусть $\{\varphi, G\}$ — осуществление схемы соотношений R во вполне регулярном пространстве X. Будем говорить, что $\{\varphi, G\}$ есть *строгое осуществление* R, если φX порождает G алгебраически.

Введем также соответствующее определение «строгой индукции», формулируя

Определение 22. Пусть $\{\varphi, G\}$ и $\{\psi, H\}$ — осуществления некоторой схемы соотношений. Будем говорить, что $\{\varphi, G\}$ *строго индуцирует* $\{\psi, H\}$, если существует непрерывный гомоморфизм χ топологической группы G на H такой, что $\psi=\chi\varphi$.

Прежде всего имеет место

ТЕОРЕМА 14. *Пусть $\{\varphi, G\}$ — строгое осуществление схемы соотношений R во вполне регулярном пространстве. Если χ — непрерывный гомоморфизм G на топологическую группу H, то $\{\chi\varphi, H\}$ есть строгое осуществление R.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 11 и может быть опущено.

Для упрощения формулировки наших дальнейших результатов, касающихся строгого осуществления, введем на время понятие «строго первообразного осуществления».

Определение 23. $\{\varphi, G\}$ есть *строго первообразное осуществление* R, если $\{\varphi, R\}$ есть строгое осуществление R, строго индуцирующее всякое другое строгое осуществление R.

Мы имеем следующие результаты:

ТЕОРЕМА 15. *Первообразное осуществление схемы соотношений во вполне регулярном пространстве строго первообразно.*

ТЕОРЕМА 16. *Строго первообразное осуществление схемы соотношений во вполне регулярном пространстве единственно с точностью до эквивалентности.*

Из этих теорем видно, что понятие строго первообразного осуществления по существу совпадает с понятием первообразного осуществления.

Для доказательства теоремы 15 заметим, что первообразное осуществление $\{\varphi, F/H\}$ схемы R, построенное в лемме 50, является строгим, что вытекает из самого доказательства этой леммы. Рассуждая, как в соответствующем месте этого доказательства, можно показать, что $\{\varphi, F/H\}$ строго индуцирует всякое строгое осуществление R. Таким образом, $\{\varphi, F/H\}$ является строго первообразным осуществлением R и, так как всякое первообразное осуществление R, согласно теореме 13, эквивалентно $\{\varphi, F/H\}$, то всякое первообразное осуществление R строго первообразно.

Доказательство теоремы 16 подобно доказательству теоремы 13 и может быть опущено.

6. Так как первообразное осуществление схемы соотношений во вполне регулярном пространстве единственно с точностью до эквивалентности, то соответствующая топологическая группа единственна с точностью до топологического гомоморфизма. Этот результат можно формулировать следующим образом.

Определение 24. Пусть R — некоторая схема соотношений во вполне регулярном пространстве. Условимся говорить, что R *определяет* топологическую группу G, если существует такое отображение φ, что $\{\varphi, G\}$ есть первообразное осуществление R.

Следствие 4. *Всякая схема соотношений во вполне регулярном пространстве определяет некоторую топологическую группу.*

Следствие 5. *Топологическая группа, определяемая схемой соотношений во вполне регулярном пространстве, единственна с точностью до топологического изоморфизма.*

Следствие 4 вытекает из теоремы 12, следствие 5 — из теоремы 13.

7. Установим некоторые простые результаты, касающиеся топологических групп, определенных схемами соотношений.

ТЕОРЕМА 17. *Всякая топологическая группа может быть определена схемой соотношений в некотором вполне регулярном пространстве.*

Доказательство. Пусть G — произвольная топологическая группа. По теореме 5, G топологически изоморфна топологической фактор-группе некоторой свободной топологической группы. Пусть G топологически изоморфна F/H, где F — свободная топологическая группа вполне регулярного пространства X, H — некоторый замкнутый нормальный делитель топологической группы F. Положим $R = \alpha^{-1}H$, где α — свободное отображение над X. Тогда $\alpha R = H$ и H есть наименьший замкнутый нормальный делитель в F, содержащий αR. Пусть Φ — естественный гомоморфизм F на F/H; определим отображение φ пространства X в F/H посредством равенства (2). Из леммы 50 следует, что $\{\varphi, F/H\}$ является первообразным осуществлением R. Следовательно, R определяет топологическую группу F/H, и так как G топологически изомофна F/H, R определяет и G.

ТЕОРЕМА 18. *Пустая схема соотношений во вполне регулярном пространстве X определяет свободную топологическую группу этого пространства.*

Доказательство. Положим в лемме 50 $R = \Lambda$. Тогда $\alpha R = \Lambda$, $H = (1(F))$ и фактор-группа F/H топологически изоморфна F. С другой стороны, $\{\varphi, F/H\}$ есть первообразное осуществление R, т. е. Λ. Следовательно, F/H есть топологическая группа, определяемая посредством Λ, а так как F/H топологически изоморфна F, то Λ определяет F.

§ 8. Свободные абелевы топологические группы

1. Установим теперь аналог теоремы 1 для абелевых топологических групп.

Пусть X — произвольное множество, а F_X^* — свободная абелева группа со свободным базисом X. Всякий элемент $z \in F_X^*$ однозначно представляется в виде

$$\prod_{x \in X} x^{\lambda(x)}, \tag{138}$$

где λ — целочисленная функция в X такая, что $\lambda(x) = 0$ почти для всех $x \in X$ *. Функция λ зависит от z и будет обозначаться λ_z. Очевидно,

$$\lambda_{zt^{-1}} x = \lambda_z x - \lambda_t x, \tag{139}$$

$$\lambda_{1(F^*)} x = 0, \tag{140}$$

каковы бы ни были элемент $x \in X$ и элементы $z \in F_X^*$, $t \in F_X^*$.

Пусть f — произвольная действительная функция в X. Определим в F_X^* функцию N_f^* равенством

$$N_f^* z = \left| \sum_{x \in X} (\lambda_z x) fx \right| \qquad (z \in {}_X), \tag{141}$$

где сумма в правой части имеет смысл, так как, каков бы ни был z, $\lambda_z x = 0$ почти для всех x.

ЛЕММА 51. *Функция N_f^* в группе F_X^*, определенная равенством* (141), *есть норма в F_X^*.*

Доказательство. В силу (140), N_f^* удовлетворяет условию N_1. Далее, N_f^* удовлетворяет условию N_2, потому что

$$\begin{aligned} N_f^*(zt^{-1}) &= \left| \sum_{x \in X} (\lambda_{zt^{-1}} x) fx \right| && [(141)] \\ &= \left| \sum_{x \in X} (\lambda_z x - \lambda_t x) fx \right| && [(139)] \\ &\leqslant \left| \sum_{x \in X} (\lambda_z x) fx \right| + \left| \sum_{x \in X} (\lambda_t x) fx \right| \\ &= N_f^* z + N_f^* t. && [(141)] \end{aligned}$$

ЛЕММА 52. *Если f — действительная функция в X, то $N_f^* x = |fx|$ для всех $x \in X$.*

В самом деле,

$$\lambda_x y = \begin{cases} 1 \text{ при } y = x, \\ 0 \text{ при } y \in X \setminus ( ), \end{cases} \tag{142}$$

---

* т. е. для всех $x \in X$ за исключением, может быть, конечного числа.

откуда, согласно (141),

$$N_f^* x = \left| \sum_{y \in X} (\lambda_x y) f y \right| = | f x | .$$

ЛЕММА 53. *Если f — действительная функция на X, то $N_f^*(xy^{-1}) = |fx - fy|$ для всякой пары $\{x, y\}$ элементов из X.*

Доказательство. Для случая $x = y$ это следует из условия N_1. Предположим, что $x \neq y$. Тогда

$$\lambda_{xy^{-1}} t = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = x, \\ -1 & \text{при} \quad t = y, \\ 0 & \text{при} \quad t \in X \setminus (x, y), \end{cases}$$

откуда, в силу (141),

$$N_f^*(xy^{-1}) = \left| \sum_{t \in X} (\lambda_{xy^{-1}} t) f t \right| = | f x - f y | .$$

2. Рассмотрим случай, когда X — топологическое пространство. Для этого случая нам понадобится некоторое свойство непрерывности норм в F_X^*.

Определение 25. Пусть X — топологическое пространство, N — норма в F_X^*. Будем говорить, что N *согласована* с X, если $N(xy^{-1})$ — непрерывная функция пары точек $\{x, y\}$ пространства X.

Имеет место

ЛЕММА 54. *Если f — действительная непрерывная функция в X, то N_f^* согласована с X.*

Это прямо следует из предыдущей леммы.

3. ТЕОРЕМА 19. *Если X — вполне регулярное пространство, то существует абелева топологическая группа F^*, обладающая свойствами:*

Fa_1. *X есть подпространство F^*;*

Fa_2. *X топологически порождает F^*;*

Fa_3. *каково бы ни было непрерывное отображение φ пространства X в любую абелеву топологическую группу G, существует непрерывный гомоморфизм Φ группы F^* в G такой, что во всякой точке $x \in X$ выполняется равенство* (2).

Доказательство. Введем топологию в дискретную группу F_X^* таким образом, чтобы получившаяся топологическая группа обладала свойствами Fa_i $(i = 1, 2, 3)$.

Рассмотрим для этого совокупность $\mathfrak{N}$ норм в F_X^*, согласованных с X, и докажем, что $\mathfrak{N}$ является мультинормой в F_X^*.

В самом деле, $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_1, так как сумма двух согласованных норм есть, очевидно, согласованная норма.

Так как группа F_X^* абелева, то $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_2.

Пусть теперь z — какой-либо элемент из $F_X^* \setminus (1\,(F_X^*))$. По определению функции λ_z существует точка $x \in X$, для которой $\lambda_z x \neq 0$. Обозначим через A совокупность таких точек и пусть a — одна из них. Множество A конечно, и, согласно лемме 48, существует действительная непрерывная функция f в X такая, что

$$fa = 1, \tag{143}$$

$$fx = 0 \quad \text{при} \quad x \in A \setminus (a). \tag{144}$$

В силу (141)

$$N^*z = \left|\sum_{x \in X} (\lambda_z x) fx\right| = \left|\sum_{x \in A} (\lambda_z x) fx\right| = |\lambda_z a| \neq 0.$$

Согласно лемме 54, $N_f^* \in \mathfrak{N}$. Так как z — произвольный элемент множества $F_X^* \setminus (1(F_X^*)$, то тем самым доказано, что $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию M_3.

Итак, $\mathfrak{N}$ является мультинормой в F_X^* и, согласно теореме 6, определяет в F_X^* некоторую топологию. С этого момента мы припишем группе F^* эту топологию и будем считать F^* топологической группой. Покажем, что F^* обладает свойствами Fa_i $(i = 1, 2, 3)$.

Свойство Fa_1 проверяется рассуждением, вполне аналогичным соответствующей части доказательства теоремы 1. Свойством Fa_2 группа F^* обладает по самому построению. Остается проверить свойство Fa_3.

Рассмотрим какое-нибудь непрерывное отображение φ пространства X в произвольную абелеву топологическую группу G. Так как F^* — свободная абелева группа со свободным базисом X, то существует гомоморфизм Φ группы F^* в G, удовлетворяющий условию (2) во всякой точке $x \in X$. Докажем, что этот гомоморфизм непрерывен.

В самом деле, пусть P — какая-либо непрерывная норма в G. В силу леммы 8, $P\Phi$ является нормой в F^*.

Для любой пары точек $\{x, y\}$ пространства X

$$\Phi(xy^{-1}) = (\Phi x)(\Phi y)^{-1}$$
$$= (\varphi x)(\varphi y)^{-1}. \qquad [(2)]$$

Так как отображение φ и групповая операция в G непрерывны, то отсюда следует, что $\Phi(xy^{-1})$ есть непрерывная функция пары $\{x, y\}$. Далее, так как норма P непрерывна в G, то $P\Phi(xy^{-1})$ зависит от $\{x, y\}$ тоже непрерывно. Таким образом, норма $P\Phi$ согласована с X, т. е. $P\Phi \in \mathfrak{N}$.

Отсюда, согласно теореме 7, вытекает непрерывность нормы $P\Phi$ в F^*. Итак, $P\Phi \in \mathrm{am}(F^*)$, коль скоро $P \in \mathrm{am}(G)$. В силу теоремы 9, гомоморфизм Φ непрерывен.

4. Теперь мы можем развить теорию свободных абелевых топологических групп, подобную теории общих свободных топологических групп, построенной в §§ 4—6. Прежде всего мы имеем теорему единственности:

ТЕОРЕМА 20. *Если X — вполне регулярное пространство, то абелева топологическая группа со свойствами* Fa_i $(i = 1, 2, 3)$ *единственна с точностью до топологического изморфизма, переводящего самих в себя все точки пространства X.*

Доказательство может быть опущено, так как оно вполне аналогично доказательству теоремы 2.

Теоремы 19 и 20 позволяют формулировать следующее

Определение 26. Единственная абелева топологическая группа, обладающая свойствами $\mathrm{Fa}_i (i = 1, 2, 3)$, называется *свободной абелевой топологической группой* пространства X.

5. Следующая теорема соответствует теореме 3.

ТЕОРЕМА 21. *Всякое вполне регулярное пространство X образует свободный абелев базис своей свободной абелевой топологической группы, т. е. всякий элемент этой топологической группы единственным образом представляется в виде* (138), *где λ — целочисленная функция в X, равная нулю почти для всех значений аргумента.*

Это непосредственно вытекает из построения, проведенного в доказательстве теоремы 19.

6. Теореме 4 соответствует

ТЕОРЕМА 22. *Всякое вполне регулярное пространство замкнуто в своей свободной абелевой топологической группе.*

Доказательство. Пусть F^* — свободная абелева топологическая группа вполне регулярного пространства X. Докажем, что X замкнуто в F^*.

Не ограничивая общности, мы вправе считать, что F^* является как раз той топологической группой, которая строится в доказательстве теоремы 19. Пусть z — произвольная точка множества $F^* \setminus X$. Будем различать два случая:

$$\sum_{x \in X} \lambda_z x \neq 1 \tag{145}$$

и

$$\sum_{x \in X} \lambda_z x = 1. \tag{146}$$

В первом случае воспользуемся функцией f, определенной равенством $fx = 1$ $(x \in X)$. Для любого $y \in X$

$$\begin{aligned} N_f^*(zy^{-1}) &= \Big|\sum_{x \in X} \lambda_{zy^{-1}} x\Big| && [(141)] \\ &= \Big|\sum_{x \in X} (\lambda_z x - \lambda_y x)\Big| && [(139)] \\ &= \Big|\sum_{x \in X} \lambda_z x - 1\Big| && [(142)] \end{aligned} \tag{147}$$

Положим

$$N = \frac{1}{\Big|\sum\limits_{x \in X} \lambda_z x - 1\Big|} N_f^*,$$

что законно в силу (145). Согласно леммам 51 и 5, N_f^* и N будут нормами в F^*. В силу леммы 54, норма N_f^* согласована с X, а потому согласована с X и норма N. На основании (147), какова бы ни была точка $y \in X$,

$$N(zy^{-1}) \geqslant 1. \tag{148}$$

Рассмотрим теперь второй случай, характеризуемый равенством (146). В этом случае в X существует такая точка a_1, что

$$\lambda_z a_1 \neq 0. \tag{149}$$

Если положить

$$A = \underset{x}{\mathcal{E}} (\lambda_z x \neq 0), \tag{150}$$

то A конечно, и $a_1 \in A$.

Если бы множество $A \setminus (a_1)$ было пустым, то мы имели бы

$$\lambda_z x = 0 \quad (x \in X \setminus (a_1)),$$

откуда, в силу (146), $\lambda_z a_1 = 1$. Тогда из определения функции λ_z следовало бы $z = a_1$, что невозможно, так как по предположению $z \in F^* \setminus X$. Следовательно, $A \setminus (a_1) \neq \Lambda$, и существует такая точка a_2, что $a_2 \neq a_1$ и

$$\lambda_z a_2 \neq 0. \tag{151}$$

Так как пространство X вполне регулярно, то оно является хаусдорфовым пространством. Поэтому существуют такие открытые в X множества W_1 и W_2, что

$$a_i \in W_i \quad (i = 1, 2), \tag{152}$$

$$W_1 \cap W_2 = \Lambda. \tag{153}$$

Положим

$$V_i = W_i \setminus (A \setminus (a_1, a_2)) \quad (i = 1, 2). \tag{154}$$

Так как A конечно, то множества V_i открыты в X. В силу (152) — (154)

$$a_i \in V_i \quad (i = 1, 2), \tag{155}$$

$$V_1 \cap V_2 = \Lambda, \tag{156}$$

$$V_i \cap A \setminus (a_1, a_2) = \Lambda \quad (i = 1, 2). \tag{157}$$

Так как пространство X вполне регулярно, существуют такие непрерывные в X функции f_1 и f_2, что

$$f_i a_i = 1 \quad (i = 1, 2), \tag{158}$$

$$f_i x = 0 \quad \text{при} \quad x \in X \setminus V_i \, (i = 1, 2). \tag{159}$$

В силу (156),

$$X = (X \setminus V_1) \cup (X \setminus V_2). \tag{160}$$

Если $y \in X \setminus V_i$, то

$$f_i y = 0 \qquad [(159)] \tag{161}$$

$$N^*_{f_i}(zy^{-1}) = \Big| \sum_{x \in X} (\lambda_{zy^{-1}} x) f_i x \Big| \qquad [(141)]$$

$$= \Big| \sum_{x \in X} (\lambda_z x) f_i x - \sum_{x \in X} (\lambda_y x) f_i x \Big| \qquad [(139)]$$

$$= \Big| \sum_{x \in X} (\lambda_z x) f_i x \Big| \qquad [(142) \text{ и } (161)]$$

$$= \Big| \lambda_z a_i + \sum_{x \in A \setminus (a_i)} (\lambda_z x) f_i x \Big| \qquad [(150) \text{ и } (158)]$$

$$= | \lambda_z a_i |. \qquad [(155) - (157) \text{ и } (159)]$$

Отсюда, в силу (160), следует, что, какова бы ни была точка y из X, либо

$$N^*_{f_1}(zy^{-1}) = | \lambda_z a_1 |, \tag{162}$$

либо

$$N^*_{f_2}(zy^{-1}) = | \lambda_z a_2 |. \tag{163}$$

Положим $\lambda = \min(|\lambda_z a_1|, |\lambda_z q|)$. В силу (149) и (151), $\lambda > 0$, и поэтому можно образовать функцию

$$N = \frac{1}{\lambda}(N^*_{f_1} + N^*_{f_2}).$$

Согласно леммам 51 и 54, функции $N^*_{f_i}$ являются нормами в F^*, согласованными с X. Из лемм 6 и 5 следует, что N есть также норма в F^* и она также согласована с X.

Так как, каков бы ни был $y \in X$, всегда выполняется либо равенство (162), либо (163), а значения норм $N^*_{f_i}$ неотрицательны, для любого $y \in X$ справедливо неравенство (148).

Итак, в обоих случаях существует такая, согласованная с X, норма N, что всякая точка y из X удовлетворяет неравенству (148). Согласно лемме 2, это неравенство эквивалентно неравенству $N(yz^{-1}) \geqslant 1$, которое означает, что $yz^{-1} \in F^* \setminus U_N$, где U_N определено посредством (105). Итак, каков бы ни был $y \in X$, $y \in F^* \setminus U_N z$, откуда следует (132). N является нормой в F^*, согласованной с X, т. е. $N \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — мультинорма, построенная в доказательстве теоремы 19. Так как эта мультинорма определяет F^* как топологическую группу, то U_N является окрестностью единицы $1(F^*)$ в F^*, а $U_N z$ — окрестностью точки z в F^*.

Мы доказали, что всякая точка z множества $F^* \setminus X$ обладает окрестностью, содержащейся в этом множестве. Это значит, что $F^* \setminus X$ открыто в F^*, следовательно, X замкнуто в F^*.

7. Из последней теоремы вытекают следствия, вполне аналогичные следствиям 2 и 3, а именно

Следствие 6. *Свободная абелева топологическая группа вполне регулярного, но не нормального, пространства, не нормальна.*

Следствие 7. *Существуют ненормальные абелевы топологические группы.*

8. В области абелевых топологических групп также имеет место аналог теоремы Dyck'а.

Определение 27. F^* называется *свободной абелевой топологической группой*, если существует такое пространство, что F^* является его свободной абелевой топологической группой.

ТЕОРЕМА 23. *Всякая абелева топологическая группа топологически изоморфна топологической фактор-группе некоторой свободной абелевой топологической группы.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 5 и может быть опущено.

9. Между свободной топологической группой и свободной абелевой топологической группой вполне регулярного пространства существует простая связь, которую выражает

ТЕОРЕМА 24. *Существует открытый непрерывный гомоморфизм β свободной топологической группы F вполне регулярного пространства X на свободную абелеву топологическую группу F^* того же пространства такой, что*

$$\beta x = x \qquad (164)$$

для всякой точки $x \in X$, и что ядром гомоморфизма β является коммутант группы F.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно допустить, что F и F^* — топологические группы, построенные в доказательствах теорем 1 и 19. В силу свойства Fa_1 группы F^*, тождественное отображение пространства X может рассматриваться как непрерывное отображение X в F^*. Пользуясь свойством F_3 группы F, мы можем заключить, что существует непрерывный гомоморфизм β топологической группы F в F^*, удовлетворяющий условию (164) при любом $x \in X$. В силу (164), $\beta X = X$. Так как, согласно теоремам 3 и 21, X порождает алгебраически F и F^*, то отсюда следует, что $\beta F = F^*$. Итак, β есть непрерывный гомоморфизм топологической группы F на F^*. Докажем, что β является открытым гомоморфизмом.

В самом деле, пусть P — такая действительная функция в F^*, что $P\beta \in \mathrm{am}(F)$. Согласно лемме 9, P является нормой в F^*. В силу (164),

$$P(xy^{-1}) = P((\beta x)(\beta y)^{-1}) = P\beta(xy^{-1}) \quad (x \in X,\ y \in X);$$

следовательно, $P(xy^{-1})$ — непрерывная функция пары точек $\{x, y\}$ из X. Другими словами, норма P согласована с X (см. определение 25), т. е. $P \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — мультинорма, определяющая F^*. Из теоремы 7 следует, что P непрерывна в F^*. Следовательно, $P \in \mathrm{am}(F^*)$, коль скоро $P\beta \in \mathrm{am}(F)$ и, в силу теоремы 10, β — открытый гомоморфизм.

Пусть C — коммутант группы F. Рассматривая F и F^* как дискретные группы и учитывая, что F — свободная группа со свободным базисом X, а F^* — свободная абелева группа со свободным абелевым базисом X, заключаем, в силу известной теоремы [(7); S. 66], что существует гомоморфизм Φ группы F на F^*, удовлетворяющий условию (4) для любого $x \in X$, и такой, что

$$\Phi^{-1} 1 (F^*) = C. \qquad (165)$$

Пусть T — совокупность элементов z из F, для которых $\Phi z = \beta z$. В силу (4) и (164), $X \subset T$. С другой стороны, T является подгруппой F. Действительно, если $z \in T$ и $t \in T$, то $\Phi z = \beta z$ и $\Phi t = \beta t$, откуда $\Phi(zt^{-1}) = (\Phi z)(\Phi t)^{-1} = (\beta z)(\beta t)^{-1} = \beta(zt^{-1})$, так как Φ и β суть гомоморфизмы; следовательно, $zt^{-1} \in T$. Так как X порождает F алгебраически, $T = F$, следовательно, $\Phi z = \beta z$ при любом $z \in F$, т. е. $\Phi = \beta$. Из (165) получаем: $\beta^{-1} 1 (F^*) = C$; тем самым теорема полностью доказана.

Следствие 8. *Коммутант свободной топологической группы замкнут в ней.*

Следствие 9. *Свободная абелева топологическая группа вполне регулярного пространства топологически изоморфна топологической фактор-группе свободной топологической группы того же пространства по ее коммутанту.*

Следствие 9 получается в силу известной теоремы об открытых непрерывных гомоморфизмах [(8); теорема 12].

10. Свободная абелева топологическая группа вполне регулярного пространства может быть просто определена некоторой схемой соотношений в этом пространстве. Формулируем

Определение 28. Совокупность слов в X вида $\{\{x, 1\}, \{y, 1\}, \{x, -1\}, \{y, -1\}\}$ будем называть *схемой коммутативности в* X.

Имеет место

ТЕОРЕМА 25. *Свободная абелева топологическая группа вполне регулярного пространства определяется схемой коммутативности этого пространства.*

Доказательство. Пусть R — схема коммутативности во вполне регулярном пространстве X, F — свободная топологическая группа пространства X, F^{*} — его свободная абелева топологическая группа. Множество αR, где α — свободное отображение над X, состоит из элементов группы F вида $xyx^{-1}y^{-1}$, где $x \in X$, $y \in X$. Коммутант C группы F есть наименьший нормальный делитель F, содержащий все такие элементы. Так как, согласно следствию 8, множество C замкнуто в F, C является наименьшим замкнутым нормальным делителем топологической группы F, содержащим αR.

Пусть Φ — естественный гомоморфизм F на F/C. Определим отображение φ пространства X в F/C равенством (2). Согласно лемме 50, $\{\varphi, F/C\}$ — первообразное осуществление R. Следовательно, F/C определяется посредством R, и так как, в силу следствия 9, F^{*} топологически изоморфно F/C, F^{*} также определяется посредством R.

§ 9. Нерешенные проблемы

1. Теория свободных топологических групп, развитая в настоящей статье, приводит к некоторым интересным вопросам, остающимся пока открытыми. Наиболее важные из них подсказываются аналогией между дискретными и топологическими группами — аналогией, которая служила руководящей идеей настоящей работы. Так, например, для дискретных групп имеет место весьма важная теорема, согласно которой две свободные группы изоморфны тогда и только тогда, когда их базисы эквивалентны в теоретико-множественном смысле ([5]). Естественным аналогом теоретико-множественной эквивалентности является понятие гомеоморфизма. Поэтому естественно поставить вопрос, следует ли из топологического изоморфизма свободных топологических групп двух пространств гомеоморфизм этих пространств. Итак, формулируется следующая

Проблема 1. Доказать или опровергнуть предложение: свободные топологические группы двух пространств топологически изоморфны тогда и только тогда, когда эти пространства гомеоморфны.

Аналогичная проблема возникает и для свободных абелевых топологических групп:

Проблема 2. Доказать или опровергнуть предложение: свободные абелевы топологические группы двух пространств топологически изоморфны тогда и только тогда, когда эти пространства гомеоморфны.

В силу следствия 9, положительное решение проблемы 2 дало бы положительное решение проблемы 1. Решение обеих этих проблем, видимо, весьма трудных, было бы существенным шагом вперед в теории топологических групп.

2. Есть еще одна важная теорема о дискретных свободных группах, аналог которой мной не доказан. Теорема эта утверждает, что всякая подгруппа свободной группы является свободной группой ([5]). Аналогичный результат имеет место и для свободных абелевых групп.

Естественно поставить вопросы о справедливости аналогичных утверждений в области свободных топологических групп. Эти вопросы формулируются так: верно ли, что всякая замкнутая подгруппа свободной (свободной абелевой) топологической группы является свободной (свободной абелевой) топологической группой?

На оба эти вопроса мы дадим сейчас отрицательные ответы.

Пусть F — свободная (свободная абелева) топологическая группа вполне регулярного пространства X, C — аддитивная группа целых чисел с тривиальной топологией. Определим отображение ε пространства X в абелеву топологическую группу C равенством

$$\varepsilon x = 1 \quad (x \in X).$$

Это отображение, очевидно, непрерывно. Поэтому, согласно свойству F_3 (Fa_3) свободной (свободной абелевой) топологической группы F, существует непрерывный гомоморфизм E топологической группы F в топологическую группу C такой, что

$$Ex = 1 \quad (x \in X).$$

Допустим, что пространство X непусто и пусть $a \in X$. Тогда $Ea = 1$ и, так как E — гомоморфизм, $E(a^n) = n$ при всяком целом n. Следовательно, $EF = C$, т. е. E — отображение топологической группы F на топологическую группу C. Но последняя несвязна, а отображение F непрерывно. Следовательно, топологическая группа F также несвязна. Таким образом, мы получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 26. *Свободная (свободная абелева) топологическая группа непустого вполне регулярного пространства несвязна.*

Принимая во внимание, что свободная (свободная абелева) топологическая группа пустого пространства состоит только из единичного элемента, получаем

Следствие 10. *Всякая свободная (свободная абелева) топологическая группа, содержащая больше одной точки, несвязна.*

Допустим теперь, что хотя бы одна из компонент пространства X содержит более одной точки. Тогда, в силу свойства F_1 (Fa_1) свободной (свободной абелевой) топологической группы F, последняя также имеет компоненту, содержащую более одной точки. Так как эта топологическая группа топологически однородна, всякая ее компонента содержит более одной точки. Рассмотрим, в частности, компоненту K, содержащую единичный элемент топологической группы F. В силу хорошо известных теорем, K есть замкнутый нормальный делитель F. Таким образом, K — связная топологическая группа, содержащая более одной точки. Согласно следствию 10, K не может быть свободной (свободной абелевой) топологической группой. Мы пришли к следующему результату.

ТЕОРЕМА 27. *Если вполне регулярное пространство имеет компоненту, содержащую более одной точки, то его свободная (свободная абелева) топологическая группа имеет замкнутый нормальный делитель, не являющийся свободной (свободной абелевой) топологической группой.*

Эта теорема и содержит отрицательные ответы на поставленные выше вопросы.

3. Отрицательное решение проблемы нормальности подсказывает дальнейшие вопросы, касающиеся нормальности топологических групп. Именно, естественно поставить вопрос, из каких алгебраических свойств топологических групп вытекает нормальность? Но сначала мы должны точно установить, что подразумевается под термином «алгебраическое свойство топологической группы». Формулируем для этого

Определение 29. Будем говорить, что Q есть *алгебраическое свойство топологических групп*, если всякая топологическая группа, изоморфная какой-либо группе, обладающей свойством Q, сама обладает этим свойством.

Например, счетность и коммутативность — алгебраические свойства топологических групп; связность же не является алгебраическим свойством.

Известно, что всякое счетное регулярное пространство нормально. Так как топологические группы суть регулярные пространства, то *всякая счетная топологическая группа нормальна*. Таким образом, счетность — одно из алгебраических свойств групп, обусловливающих нормальность. Можно предполагать, что это существенно единственное свойство такого рода. Выражаясь более точно, можно предполагать, что всякая несчетная дискретная группа допускает ненормальную топологию. Таким образом, ставится

Проблема 3. Доказать или опровергнуть предложение: всякая несчетная дискретная группа допускает ненормальную топологию.

Частично эту проблему решил Е. Ливенсон, который доказал теорему:

Всякая несчетная абелева группа допускает ненормальную топологию.

4. Можно также поставить вопрос, какие группы допускают нормальную топологию? Но этот вопрос очень прост. Действительно, введем понятие «тривиальной» топологической группы, приняв следующее

Определение 30. Топологическая группа G *тривиальна*, если всякое подмножество G открыто в G.

Мы видим, что *всякая дискретная группа допускает тривиальную топологию* и что *эта топология нормальна*. Итак, всякая дискретная группа допускает нормальную топологию.

Так как существуют ненормальные топологические группы, то *нормальность — неалгебраическое свойство топологических групп.*

5. Естественно поставить вопрос, какие дискретные группы допускают нетривиальную топологию? Вопрос этот, конечно, весьма важен для теории топологических групп.

Конечные дискретные группы допускают, очевидно, только тривиальную топологию. Можно предполагать, что всякая бесконечная группа допускает нетривиальную топологию.

Проблема 4. Доказать или опровергнуть предложение: всякая бесконечная дискретная группа допускает нетривиальную топологию.

6. Весьма важный класс топологий образуют связные топологии. Естественно поставить вопрос, какие дискретные группы допускают связную топологию?

Прежде всего нужно заметить, что всякая связная топологическая группа, содержащая более одной точки, имеет мощность $\geqslant 2^{\aleph_0}$. Действительно, всякое связное вполне регулярное пространство, содержащее более одной точки, имеет мощность $\geqslant 2^{\aleph_0}$ *. Итак, необходимым условием существования связной топологии для дискретной группы H, содержащей более одной точки, является неравенство $p(H) \geqslant 2^{\aleph_0}$, где $p(X)$ — мощность множества X. Сначала я предполагал, что это условие и достаточно, т. е. что справедливо следующее предложение: всякая дискретная группа мощности $\geqslant 2^{\aleph_0}$ допускает связную топологию. В действительности эта гипотеза неверна, как показывает следующий

Пример. Пусть H — прямое произведение $\mathfrak{m}$ групп второго порядка и одной группы третьего порядка. Здесь $\mathfrak{m}$ — произвольное кардинальное число. Покажем, что H не допускает связной топологии.

В самом деле, совокупность K элементов x из H, удовлетворяющих условию $x^2 = 1\,(H)$, образует, очевидно, подгруппу, замкнутую относительно любой топологии в H. Ясно, далее, что H является прямым произведением K и группы третьего порядка. Следовательно, H разбивается на три смежных класса $K_i\,(i = 1, 2, 3)$ относительно K и, так как K замкнуто в H относительно всякой топологии, то эти смежные классы также замкнуты в H относительно всякой топологии. Положим $A = K_1$, $B = K_2 \bigcup K_3$. Тогда $H = A \bigcup B$, причем $A \bigcap B = \Lambda$, $A \neq \Lambda$, $B \neq \Lambda$ и множества A и B замкнуты в H относительно любой топологии. Таким образом, всякая топология группы H несвязна.

Если $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, то $p(H) = \mathfrak{m}$. Итак, при $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$ мы имеем пример дискретной группы мощности $\geqslant 2^{\aleph_0}$, не допускающей связных топологий.

Формулируем

Определение 31. Дискретная группа H *безусловно несвязна*, если всякая ее топология несвязна.

Так как всякая конечная группа порядка > 1, очевидно, безусловно несвязна, то из приведенного выше примера можно получить следующий результат:

ТЕОРЕМА 28. *Каково бы ни было кардинальное число* $\mathfrak{m} > 1$, *существует безусловно несвязная дискретная группа мощности* $\mathfrak{m}$.

7. Наш пример безусловно несвязной дискретной группы наводит нас на мысль формулировать следующее

Определение 32. Подмножество A дискретной группы H *безусловно замкнуто* в H, если оно замкнуто относительно всякой топологии в H.

Следующая теорема может быть легко доказана.

ТЕОРЕМА 29. *Если группа G имеет безусловно замкнутую истинную подгруппу индекса $< 2^{\aleph_0}$, то G безусловно несвязна.*

---

* Это следует непосредственно из определения полной регулярности.

Пусть, в самом деле, H будет такой подгруппой группы G. Рассмотрим произвольную топологию группы G. Подгруппа H замкнута в этой топологии и потому существует пространство правых смежных классов H в G. Это пространство вполне регулярно и содержит более одной точки, но менее чем $2^{\aleph_0}$ точек. Поэтому оно несвязано, Так как естественное отображение топологической группы G на это пространство непрерывно, эта топологическая группа тоже несвязна, что и требовалось доказать.

Можно ожидать, что и обратная теорема верна. Таким образом, мы имеем следующую проблему.

Проблема 5. Доказать или опровергнуть предложение: если всякая безусловно замкнутая истинная подгруппа группы G имеет индекс $\geqslant 2^{\aleph_0}$, то G допускает связную топологию.

На первый взгляд это предложение кажется сомнительным, так как трудно представить себе дискретную группу, все элементы которой были бы конечного и ограниченного порядка и которая допускала бы связную топологию. В действительности такие группы существуют, как мы покажем в другой статье ([11]).

8. В нашем примере безусловно несвязной группы мы определили безусловно замкнутое множество посредством «уравнения» $x^2 = 1\,(H)$. Очевидно, что всякое «уравнение» вида $f(a_1, \ldots, a_m, x) = 1\,(G)$, где $a_1, \ldots, a_m$ — постоянные элементы дискретной группы G, x — «неизвестное», а f — «функция», т. е. произведение степеней «аргументов» $a_1, \ldots, a_m, x$, определяет в G некоторое безусловно замкнутое подмножество. Будем называть подмножество G элементарно алгебраическим, если оно может быть так определено. Будем говорить, что подмножество в G есть алгебраическое множество, если оно является пересечением конечных сумм элементарно алгебраических множеств.

Так как конечные суммы безусловно замкнутых множеств суть безусловно замкнутые множества и то же справедливо для любых пересечений безусловно замкнутых множеств, всякое алгебраическое подмножество G безусловно замкнуто. Можно предполагать, что таким образом исчерпываются все безусловно замкнутые множества. Эта гипотеза приводит нас к следующей проблеме:

Проблема 6. Доказать или опровергнуть предложение: всякое безусловно замкнутое подмножество дискретной группы есть алгебраическое множество.

Частично эта проблема решена М. Перельманом, доказавшим, что всякое безусловно замкнутое подмножество абелевой группы является алгебраическим множеством.

Во время подготовки этой статьи к печати автор решил другой частный случай проблемы 6, доказав предложение: всякое безусловно замкнутое подмножество счетной группы является алгебраическим множеством ([12]).

Поступило
9. XII. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Weyl A., Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Paris 1938.
[2] Tychonoff A., Über die topologische Erweiterungen von Räumen, Math. Ann., 102 (1929), 544—561
[3] Kolmogoroff A., Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, Studia mathematica, 5 (1934), 29—33.
[4] Hyers D. H., Pseudonormed linear spaces and abelian groups, Duke Math. Journ., 5 (1939), 628—634.
[5] Schreier O., Die Untergruppen der freien Gruppen, Abh. math. Sem. Hamburg. Univ., 5 (1927), 161—183.
[6] Dyck W., Gruppentheoretische Studien, Math. Ann., 20 (1882), 1—44
[7] Reidemeister K., Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig, 1932.
[8] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Москва, 1938.
[9] Kakutani Sh., Proc. Imp. Akad. Japan, 12:4 (1936), 82—84.
[10] Birkhoff G., Compositio mathematica, 3:3 (1936), 427—430.
[11] Марков А. А., О существовании периодических связных топологических групп, Известия АН, серия матем., 8 (1944), 225—232.
[12] Марков А. А., О безусловно замкнутых множествах, Доклады АН, 44 (1944), No. 5, 196—197.

A. MARKOFF. ON FREE TOPOLOGICAL GROUPS

SUMMARY

1. Definition 1. Let X be a subset of a topological group G. We say that X *generates* G *topologically* if there exists no proper closed subgroup of G containing X.

THEOREM 1. *Let X be a completely regular space. There exists then a topological group F possessing the following properties:*

F_1. *X is a subspace of F;*

F_2. *X generates F topologically;*

F_3. *whatever be a mapping φ of X into any topological group G, there exists a continuous homomorphism Φ of the topological group F into the topological group G such that*

$$\Phi x = \varphi x \tag{1}$$

for every point x of X.

THEOREM 2. *The topological group F possesing the properties* F_1, F_2 *and* F_3 *is unique up to topological isomorphisms carrying every point of X into itself.*

Definition 2. The unique topological group F with the properties F_1, F_2 and F_3 is called the *free topological group of the space X.*

THEOREM 3. *Every completely regular space forms a free basis (in the algebraic sense) of its free topological group.*

THEOREM 4. *Every completely regular space is closed in its free topological group.*

Corollary 1. *The free topological group of a completely regular, but non-normal space, is non-normal.*

Corollary 2. *There exist non-normal topological groups.*

Definition 3. G is a *free topological group*, if there exists a completely regular space such that G is free topological group of this space

THEOREM 5. *Every topological group is topologically isomorphic to a topological quotient group of a free topological group.*

2. The fundamental notions used in the proofs of the above results are those of a «norm» and a «multinorm» in a group defined as follows:

Definition 4. Let N be a real function in a group G. We say that N is a *norm* in G if the following conditions are fulfilled:

N_1. $N1(G)=0$;

N_2. $N(xy^{-1})\leqslant Nx+Ny \quad (x\in G,\ y\in G)$.

$1(G)$ denotes here the unit element of the group G.

Definition 5. Let $\mathfrak{N}$ be a set of norms in G. We say that $\mathfrak{N}$ is a *multinorm* in G if the following conditions are fulfilled:

M_1. $N_1+N_2\in\mathfrak{N}$, whenever $N_1\in\mathfrak{N}$, $N_2\in\mathfrak{N}$;

M_2. for any $N\in\mathfrak{N}$ and $a\in G$ the function N_a in G determined by the equality

$$N_a x = N(a^{-1}xa)$$

belongs to $\mathfrak{N}$;

M_3. for every element a of the group G different from $1(G)$ there exists a norm $N\in\mathfrak{N}$ such that $Na\neq 0$.

By means of a well known Pontrjagin's theorem on complete systems of neighbourhoods of the unit element in a topological group it is easy to prove

THEOREM 6. *If $\mathfrak{N}$ is a multinorm in a group G, then a topology can be defined in G such that the totality of sets*

$$U_N = \underset{x}{\mathcal{E}}\,(Nx<1),$$

where N runs through $\mathfrak{N}$, constitutes a complete system of neighbourhoods of the unit element.

In virtue of this theorem, every multinorm in the group G determines a topology in this group, converting G into a topological group. It is not difficult to prove

THEOREM 7. *Every norm, that belongs to the multinorm $\mathfrak{N}$ determining the topological group G, is continuous in this topological group.*

The question arises whether any topological group can be determined by a multinorm. With the use of a construction due to Kakutani it is possible to answer the question in the affirmative. Namely, the following theorem is valid:

THEOREM 8. *The totality of continuous norms in a topological group is a multinorm determining this topological group.*

The following theorems are proved that characterize the continuous, as well as the open, homomorphisms of topological groups in terms o multinorms.

THEOREM 9. *A homomorphism Φ of a topological group G into a topological group H is continuous if and only if $P\Phi$ is a continuous norm in G, whenever P is a continuous norm in H.*

THEOREM 10. *A homomorphism Φ of a topological group G onto a topological group H is an open homomorphism if and only if P is a continuous norm in H, whenever P is such a real function in H that $P\Phi$ is a continuous norm in G.*

3. Theorem 1 can be proved as follows. We construct the free group F with the free basis X and consider the norms in F satisfying the following condition:

C. $N(a^{-1}xy^{-1}a)$ is a continuous function of the pair of points $\{x,y\}$ of X, whenever a is an element of F.

Such norms in F are said to be consistent with X. It is possible to show that the totality of norms in F consistent with X is a multinorm in F. The only difficulty is to verify the condition M_3, which can be done by means of a construction of some special norms in F. This being done, the remaining presents no difficulty.

The set $\mathfrak{N}$, being a multinorm in F, introduces a topology into the group G, which can thus be considered as a topological group. It is easy to see that F possesses the properties F_1, F_2, F_3.

Theorem 2 can be easily proved. The validity of theorem 3 follows from the construction carried out in the proof of theorem 1. Theorem 4 is proved by means of the special norms in the free group already used in the proof of theorem 1. Theorem 5 is easily proved by means of theorem 10.

4. Using the notion of the free topological group it is possible to develop the theory of topological groups determined by relations between the points of the generating space. This can be done as follows.

Definition 6. Let X be an arbitrary set. Under a *word* in X we shall understand an arbitrary system $\{\{x_i,\varepsilon_i\}\}_{i=1}^{m}$, where m is a non-negative integer, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i=1, \ldots, m)$.

Definition 7. By a *scheme* in X we shall mean an arbitrary set of words in X.

Definition 8. Let R be a scheme in a completely regular space X, φ be a continuous mapping of the space X into a topological group G. We shall say that the pair $\{\varphi,G\}$ is a *realization* of R, if the following conditions are fulfilled:

R_1. φX generates G topologically;

R_2. $\prod_{i=1}^{m}(\varphi x_i)^{\varepsilon_i} = 1\,(G)$, for any $\{\{x_i, \varepsilon_i\}\}_{i=1}^{m} \in R$.

It is easy to prove

THEOREM 11. *If $\{\varphi, G\}$ is a realization of a scheme R in a completely regular space X and χ is a continuous homomorphism of a topological group G onto an everywhere dense subgroup of a topological group H, then $\{\chi\varphi,H\}$ is a realization of the scheme R.*

This result suggests the following

Definition 9. Let $\{\varphi,G\}$ and $\{\psi, H\}$ be realizations of the same scheme. We say that $\{\varphi, H\}$ *induces* (*is equivalent to*) $\{\psi, H\}$ if there exists a continuous homomorphism (a topological isomorphism) χ of the topological group G onto an everywhere dense subgroup of H (onto H) such that $\psi = \chi\varphi$.

Among all realizations of a fixed scheme there exists such one that induces evere other realization of this scheme. This realization is unique up to equivalence. To put these results more rigorously we formulate

Definition 10. $\{\varphi, G\}$ is a *primary realization* of the scheme R, if this realization induces every other realization of R.

The following theorems are true:

THEOREM 12. *Every scheme in a completely regular space has a primary realization.*

THEOREM 13. *The primary realization of any scheme in a completely regular space is unique up to equivalence.*

The following definition determines an important class of realizations:

Definition 11. Let $\{\varphi, G\}$ be a realization of a scheme R. We say that $\{\varphi, G\}$ is a *strict realization* of R if φX generates G in the algebraic sense.

To the notion of «strict realization» there correspond the notions of «strict induction» and «strictly primary realization», which are defined as follows:

Definition 12. Let $\{\varphi, G\}$ and $\{\psi, G\}$ be realizations of the same scheme. We say that $\{\varphi, G\}$ *induces* $\{\psi, G\}$ *strictly* if there exists a continuous homomorphism χ of the topological group G onto the topological group H such that $\psi = \chi\varphi$.

Definition 13. $\{\varphi, G\}$ is a *strictly primary realization* of the scheme R if $\{\varphi, G\}$ is a strict realization of R that induces strictly every other strict realization of this scheme.

We have the following theorems:

THEOREM 14. *If $\{\varphi, G\}$ is a strict realization of the scheme R and χ is a continuous homomorphism of the topological group G onto a topological group H, then $\{\chi\varphi, H\}$ is a strict realization of R.*

THEOREM 15. *The primary realization of an arbitrary scheme in a completely regular space is a strictly primary realization.*

THEOREM 16. *The strictly primary realization of any scheme in a completely regular space is unique up to equivalence.*

These results show that the notion of a strictly primary realization essentially coincides with that of a primary realization.

Since the primary realization of a scheme in a completely regular space is unique up to equivalence, the corresponding topological group is unique up to topological isomorphism.

Definition 14. We say that the scheme R in a completely regular space *determines* the topological group G, if there exists a mapping φ such that $\{\varphi, G\}$ is a primary realization of R.

We further have

Corollary 3. *Every scheme in a completely regular space determines a topological group.*

Corollary 4. *The topological group determined by a scheme in a completely regular space is unique up to topological isomorphism.*

It is easy to prove the following theorems:

THEOREM 17. *Every topological group can be determined by a scheme in a completely regular space.*

THEOREM 18. *The free topological group of a completely regular space is determined by the empty scheme.*

5. The results analogous to theorems 1—5 are valid for abelian topological groups. It is possible to prove the following theorems:

THEOREM 19. *Let X be a completely regular space. There exists then an abelian topological group F^* with the properties:*

Fa_1. *X is a subspace of* F^*;

Fa_2. *X generates* F^* *topologically;*

Fa_3. *whatever be a continuous mapping* φ *of the space X into an arbitrary abelian topological group G, there exists a continuous homomorphism* Φ *of the topological group* F^* *into the group G such that the equality* (1) *is satisfied for every point x of the space X.*

THEOREM 20. *The topological group* F^* *with the properties* Fa_1, Fa_2, Fa_3 *is unique up to topological isomorphism, which leaves invariant all points of the space X.*

These theorems enable us to formulate

Definition 15. The unique abelian topological group F^* with the properties Fa_1, Fa_2, Fa_3 is called the *free abelian topological group* of the space X

We have the following results:

THEOREM 21. *Every completely regular space forms a free abelian basis in the algebraic sense of its free abelian topological group.*

THEOREM 22. *Every completely regular space is closed in its free abelian topological group.*

Corollary 5. *The free abelian topological group of a completely regular, but non-normal, space is non-normal.*

Corollary 6. *There exist non-normal abelian topological groups.*

Definition 16. G is a *free abelian topological group*, if there exists a completely regular space X such that G is the free abelian topological group of X.

We have

THEOREM 23. *Every abelian topological group is topologically isomorphic to a topological quotient group of a free abelian topological group.*

The following theorem shows that there exists a simple connexion between the free topological group of a completely regular space and the free abelian topological group of the same space.

THEOREM 24. *There exists an open continuous homomorphism* β *of the free topological group F of a completely regular space X onto the free abelian topological group* F^* *of the same space, which leaves invariant every point of X and is such that its kernel is the commutant of F.*

Corollary 7. *The commutant of every free topological group is closed in this topological group.*

Corollary 8. *The free abelian topological group of a completely regular space is topologically isomorphic to the topological quotient group of the free topological group of the same space by the commutant of the last topological group.*

The free abelian topological group of a completely regular space can be determined by a simple scheme in this space. In fact, introduce

Definition 17. The totality of words in X of the form $\{\{x, 1\}, \{y, 1\}, \{x, -1\}, \{y, -1\}\}$ is called the *commutativity scheme in X.*

We have

THEOREM 25. *The free abelian topological group of a completely regular space is determined by the commutativity scheme in this space.*

6. Several interesting problems in the theory of topological groups remain at present unsolved.

Problem 1. To prove or to refute the assertion: the free topological groups of two completely regular spaces are topologically isomorphic, if and only if these spaces are homeomorphic.

Problem 2. To prove or to refute the analogous assertion on free abelian topological groups.

The interesting Nielsen — Schreier theorem asserts that every subgroup of a free group is a free group. An analogous result holds for free abelian groups. These theorems cannot be transferred in the domains of free topological groups (resp. free abelian topological groups). In fact, the following facts can be easily proved.

THEOREM 26. *The free (free abelian) topological group of a non-empty completely regular space is disconnected.*

Corollary 9. *Every free (free abelian) topological group, containing more than one point, is disconnected.*

THEOREM 27. *If a component of the completely regular space X contains more than one point, then the free (free abelian) topological group of X possesses a closed, connected, invariant subgroup, containing more than one point.*

Problem 3. To prove or to refute the assertion: every uncountable group admits a non-normal topology*.

Definition 18. The topological group G is *trivial* if every it subset is open.

Problem 4. To prove or to refute the assertion: every infinite group admits a non-trivial topology.

Definition 19. The group is *unconditionally disconnected* if every its topology is disconnected.

THEOREM 28. *Whatever be a cardinal number $\mathfrak{m} > 1$, there exists an unconditionally disconnected group of power $\mathfrak{m}$.*

Definition 20. The subset A of the group G is called *unconditionally closed* if it is closed with respect to any topology in H.

THEOREM 29. *If a group G possesses an unconditionally closed proper subgroup of index $< 2^{\aleph_0}$, then G is unconditionally disconnected.*

Problem 5. To prove or to refute the proposition: if every unconditionally closed proper subgroup of a group G is of index $\geqslant 2^{\aleph_0}$, then G admits a connected topology.

Every «equation» $f(a_1, \ldots, a_m, x) = 1\,(G)$, where $a_1, \ldots, a_m$ are some fixed elements of the group G, x—a «variable» and f—a «function», i. e. a product of powers of $a_1, \ldots, a_m, x$, determines an unconditionally closed subset of the group G. The subsets of G that can be determined in this manner, will be called elementary algebraic subsets. Any intersection of finite sums of elementary algebraic subsets of the group G will be called an *algebraic* subset of the group.

Problem 6. To prove or to refute the assertions: every unconditionally closed subset of a group G is an algebraic subset of this group**.

---

* In case of abelian groups this assertion was proved by E. Livenson.

** In case of abelian groups this assertion was proved by M. Perelman. In case of countable groups this was proved by the author during the publication of this paper.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 65–78 Série mathématique

А. Г. КУРОШ

СИЛОВСКИЕ ПОДГРУППЫ НУЛЬМЕРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе дано определение силовских подгрупп в топологических группах и доказана теорема (§ 5), обобщающая теорему Силова, доказанную для бесконечных групп автором совместно с Дицманом и Узковым, и теорему Ван-Данцига, относящуюся к нульмерным компактным группам со второй аксиомой счетности.

На развитие теории топологических групп пока весьма незначительное влияние оказывают идеи и методы общей (т. е. алгебраической) теории групп, хотя последнюю можно считать теорией специального типа топологических групп, а именно групп дискретных. Несомненно, что пересмотр богатого содержания, накопленного в общей теории групп, с точки зрения возможности распространения его на более широкие типы топологических групп, мог бы привести к возникновению нового направления в теории топологических групп, в котором некоторые из крупных результатов общей теории групп нашли бы, быть может, свое естественное место. В настоящей работе с этой точки зрения рассматривается теория силовских подгрупп.

Теорема Силова о сопряженности силовских подгрупп, играющая в теории конечных групп очень большую роль, была распространена на бесконечные группы в совместной с А. П. Дицманом и А. И. Узковым работе автора ([1]), в которой доказана теорема: если в группе G содержится силовская p-подгруппа, обладающая конечным числом сопряженных подгрупп, то все силовские p-подгруппы группы G сопряжены между собой и их число сравнимо с 1 по модулю p. Позже Бэр ([2]) дал новое доказательство этой теоремы. В настоящей работе указанная теорема распространяется на один класс топологических групп, несколько более широкий, чем класс групп, обладающих полной системой окрестностей единицы, составленной из нормальных делителей (теорема 1). Следует заметить, что ограничение рассматриваемых топологических групп предположением, что окрестности единицы являются подгруппами или даже нормальными делителями, будет, вероятно, естественным для тех вопросов теории топологических групп, которые возникают из общей теории групп.

Ван-Данциг ([3]) дает для случая компактных нульмерных топологических групп со второй аксиомой счетности определение силовских p-подгрупп, использующее аппроксимируемость этих групп конечными группами, но в действительности эквивалентное (в случае рассматрива-

емых им групп) общему определению, данному в настоящей работе; он доказывает также, что в указанном случае все силовские p-подгруппы сопряжены между собой. Теорема 3, основная в настоящей работе, обобщает как эту теорему Ван-Данцига, так и тот частный случай теоремы 1, когда окрестности единицы являются нормальными делителями.

Теорема 2 относится к общей теории групп и служит некоторым обобщением теоремы из работы ([1]).

В дальнейшем будет предполагаться знакомство читателя с гл. 3 книги Л. С. Понтрягина ([4]).

§ 1

Элемент a топологической группы G будет называться p-элементом (p — простое число), если последовательность степеней

$$a,\ a^{p},\ a^{p^2},\ \ldots,\ a^{p^n},\ \ldots \tag{1}$$

сходится к единице, т. е. если во всякой окрестности единицы лежат почти все (все, кроме конечного числа) элементы последовательности (1). Всякий элемент, порядок которого есть степень числа p, будет, очевидно, p-элементом; обратно, всякий p-элемент или имеет порядком степень p, или же его порядок бесконечен.

Топологическая группа G будет называться топологической p-группой, если все ее элементы являются p-элементами. В дискретном случае это определение превращается в обычное определение (алгебраической) p-группы. С другой стороны, всякая p-группа будет при любой топологизации топологической p-группой.

Всякая (не обязательно замкнутая) подгруппа топологической p-группы будет топологической p-группой. Это следует из того, что открытые множества в подгруппе являются пересечениями с подгруппой открытых множеств самой группы.

Всякая фактор-группа топологической p-группы по замкнутому нормальному делителю будет топологической p-группой. Это следует из существования непрерывного гомоморфизма между группой и ее фактор-группой по замкнутому нормальному делителю.

Отсюда следует, что *если топологическая p-группа G содержит замкнутую подгруппу H конечного индекса, то этот индекс будет степенью числа p.* В самом деле, пересечение H и всех подгрупп, с нею сопряженных, будет замкнутым нормальным делителем N конечного индекса. Фактор-группа G/N конечна и одновременно является топологической p-группой, поэтому ее порядок есть степень числа p. Индекс подгруппы H будет, однако, делителем порядка группы G/N.

Если окрестности единицы топологической группы G являются подгруппами и G отлична от единицы, то G не может быть одновременно p-группой и q-группой при $p \neq q$. Действительно, если для элемента a группы G можно указать такие натуральные числа k и l, что элементы a^{p^k} и a^{q^l} содержатся в заданной окрестности единицы U, и если x и y таковы, что $p^k x + q^l y = 1$, то, так как U — подгруппа,

$$(a^{p^k})^x (a^{q^l})^y = a \subset U.$$

Подгруппа (не обязательно замкнутая) топологической группы G будет называться p-**подгруппой**, если все ее элементы являются p-элементами в G. Всякая p-подгруппа будет, очевидно, топологической p-группой в смысле топологии, индуцированной в ней топологией самой группы.

Объединение всякой возрастающей последовательности p-подгрупп будет p-подгруппой. Отсюда следует существование во всякой топологической группе G максимальных p-подгрупп, которые будут называться **силовскими** p-**подгруппами** группы G.

Элемент топологической группы, сопряженный с p-элементом, сам будет p-элементом. Действительно, пусть a будет p-элемент топологической группы G. Возьмем элемент $g^{-1}ag$ и произвольную окрестность единицы U. Множество gUg^{-1} открытое и содержит 1, а поэтому содержит почти все элементы a^{p^n}. Тогда в U содержатся почти все элементы $g^{-1}a^{p^n}g=(g^{-1}ag)^{p^n}$.

Отсюда следует, что подгруппа, сопряженная с p-подгруппой, сама будет p-подгруппой и поэтому *подгруппа, сопряженная с силовской p-подгруппой, сама будет силовской p-подгруппой.* Действительно, свойство p-подгруппы быть максимальной сохраняется при трансформировании.

Если p-элементы a и b перестановочны между собой, то их произведение ab будет p-элементом. Действительно, если дана окрестность единицы U, то существует такая окрестность единицы V, что $V^2 \subset U$, и такое число k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ будет $a^{p^k} \subset V$, $b^{p^k} \subset V$. Отсюда $(ab)^{p^k}=a^{p^k}b^{p^k} \subset V^2 \subset U$.

С другой стороны, *если a есть p-элемент, то a^{-1} также будет p-элементом.* В самом деле, для любой окрестности единицы U существует такая окрестность единицы V, что $V^{-1} \subset U$. Есть такое k_0, что для всех $k \geqslant k_0$ будет $a^{p^k} \subset V$. Следовательно, $(a^{-1})^{p^k} \subset V^{-1} \subset U$.

Отсюда следует, что *если a есть p-элемент топологической группы, то циклическая подгруппа $\{a\}$ будет p-подгруппой этой группы.* Далее, *в абелевой топологической группе совокупность всех p-элементов будет подгруппой*, т. е. *эта группа обладает единственной силовской p-подгруппой.*

В дальнейшем будет использована следующая лемма, относящаяся к общей теории топологических групп.

ЛЕММА 1. *Нормализатор N замкнутой подгруппы H топологической группы G есть замкнутая подгруппа.*

Действительно, пусть элемент a принадлежит к замыканию подгруппы N. Возьмем произвольный элемент h из H и положим $c=a^{-1}ha$. Для всякой окрестности V элемента c существует, ввиду определения топологической группы, такая окрестность W элемента a, что

$$W^{-1}hW \subset V.$$

Окрестность W содержит элемент b из N, а поэтому элемент $b^{-1}hb$ принадлежит к V и одновременно к H. Таким образом, всякая окрест-

ность элемента c содержит элемент из H, откуда, ввиду замкнутости H, следует $c \subset H$. Этим доказано, что $a^{-1}Ha \subseteq H$. Такие же рассуждения для элемента a^{-1} вместо a покажут, что $aHa^{-1} \subseteq H$, т. е. $a^{-1}Ha = H$, откуда $a \subset N$.

§ 2

Следующая лемма относится к алгебраической теории групп и является общей леммой для доказательства теорем такого типа, как основная теорема из работы (1).

ЛЕММА 2. *Пусть в группе G дана система подгрупп $\mathfrak{S}$, а в ней выбрана подгруппа P, нормализатор которой есть N, причем выполняются следующие условия (p — фиксированное простое число):*

I. *Всякая подгруппа, сопряженная с подгруппой из $\mathfrak{S}$, содержится в $\mathfrak{S}$.*

II. *N не содержит отличных от P подгрупп из $\mathfrak{S}$.*

III. *Если Q — произвольная подгруппа из системы $\mathfrak{S}$ и индекс в Q пересечения $N \cap Q$ конечен, то он есть степень числа p.*

IV. *P обладает конечным числом сопряженных подгрупп.*

При этих условиях все подгруппы системы $\mathfrak{S}$ сопряжены с P и их число сравнимо с единицей по модулю p.

Доказательство может быть проведено методом, использованным при доказательстве основной теоремы из работы (1). Мы применим, однако, метод, примененный для доказательства этой теоремы в работе (2).

Пусть Q будет произвольная подгруппа из $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}$ — система подгрупп, сопряженных с P и отличных от Q (если Q и P сопряжены), P' — некоторая подгруппа из $\mathfrak{M}$, $P' \overset{*}{=} g^{-1}Pg$. Число подгрупп, сопряженных с P' при помощи элементов из Q, конечно, ввиду IV, и равно индексу в Q пересечения $g^{-1}Ng \cap Q$, т. е., в силу I и III будет степенью числа p. Эта степень не будет нулевой, так как, на основании I и II, из $g^{-1}Ng \supseteq Q$, т. е. $N \supseteq gQg^{-1}$, следовало бы $Q = P'$ в противоречие с определением системы $\mathfrak{M}$. Подгруппа, сопряженная с P' при помощи элемента из Q, не может совпасть с Q, снова ввиду $P' \neq Q$, поэтому вся система подгрупп, сопряженных с P' при помощи элементов из Q, принадлежит к $\mathfrak{M}$. Заставляя P' пробегать всю систему $\mathfrak{M}$, мы находим (так как Q — подгруппа), что $\mathfrak{M}$ распадается на непересекающиеся подсистемы, причем число подгрупп в каждой из этих подсистем есть положительная степень числа p.

Отсюда — общее число подгрупп, входящих в систему $\mathfrak{M}$, делится на p. Полагая $Q = P$, мы получаем, что число подгрупп, сопряженных с P, сравнимо с единицей по модулю p. Если бы, наконец, в системе $\mathfrak{S}$ содержалась подгруппа R, которая с P не сопряжена, то, полагая $Q = R$, мы получили бы, что число подгрупп, сопряженных с P, делится на p, т. е. пришли бы к противоречию.

Возвращаемся к рассмотрению топологических групп.

ЛЕММА 3. *Элемент a топологической группы G тогда и только тогда будет p-элементом, если для всякой окрестности единицы U можно найти в множестве aU такой p-элемент $b = au, u \subset U$, и подобрать*

такое натуральное число n_0, *что для всех* $n \geqslant n_0$ *имеют место включения* *

$$\prod_{j=0}^{p^n-1} (a^{-j}ua^j) \subset U.$$

Доказательство. Если a — p-элемент, то при любом U в качестве элемента b можно взять самый элемент a, т. е. $u=1$, и положить $n_0=1$. Обратно, пусть для элемента a выполняются условия леммы и пусть V будет произвольной окрестностью единицы. Существует такая окрестность единицы U, что $UU^{-1} \subset V$, а для этой окрестности можно найти p-элемент $b=au$, удовлетворяющий условиям леммы при некотором n_0. Существует такое n_1, что при $n \geqslant n_1$ будет $b^{p^n} \subset U$, т. е.

$$(au)^{p^n} = a^{p^n} \prod_{j=0}^{p^n-1} (a^{-j}ua^j) \subset U.$$

Поэтому при $n \geqslant \max(n_0, n_1)$

$$a^{p^n} \subset UU^{-1} \subset V,$$

т. е. a есть p-элемент.

ЛЕММА 4. *Пусть в топологической группе G даны p-подгруппы A и B, из которых первая есть нормальный делитель. Элемент $c=ab$, где $a \subset A$, $b \subset B$, тогда и только тогда будет p-элементом, если для всякой окрестности единицы U можно указать натуральные числа m_0 и n_0 со следующими свойствами:*

(1) $b^{-p^{m_0}} \subset U$;

(2) *для всех* $n \geqslant n_0$ *имеют место включения*

$$\prod_{j=0}^{p^n-1} (c^{-jp^{m_0}} b^{-p^{m_0}} c^{jp^{m_0}}) \subset U.$$

Доказательство. Пусть c будет p-элемент и пусть дана произвольная окрестность единицы U. Так как b^{-1} есть p-элемент, то существует такое m_0, что $b^{-p^{m_0}} \subset U$. Далее, так как A — нормальный делитель, то $c^{p^{m_0}} = a_1 b^{p^{m_0}}$, $a_1 \subset A$, откуда

$$a_1 = c^{p^{m_0}} b^{-p^{m_0}}.$$

Существует такая окрестность единицы V, что $V^{-1}V \subset U$. Элементы c и a_1 являются p-элементами, поэтому существует такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ будет $c^{p^{m_0+n}} \subset V$, $a_1^{p^n} \subset V$. Однако,

$$a_1^{p^n} = c^{p^{m_0+n}} \prod_{j=0}^{p^n-1} (c^{-jp^{m_0}} b^{-p^{m_0}} c^{jp^{m_0}}).$$

* Здесь, как и в формулировке следующей леммы, возрастанию индекса j соответствует расположение множителей справа налево.

Отсюда следует, что интересующее нас произведение входит в $V^{-1}V$ и поэтому в U.

Обратно, пусть дана произвольная окрестность единицы V. Берем такую окрестность единицы U, что $UU^{-1} \subset V$. и для нее подбираем числа m_0 и n_0, удовлетворяющие условиям (1) и (2) леммы. Так как $c^{p^{m_0}} = a_1 b^{p^{m_0}}$, $a_1 \subset A$, то $a_1 = c^{p^{m_0}} b^{-p^{m_0}}$. Существует такое n_1, что при $n > n_1$ будет $a_1^{p^n} \subset U$, т. е.

$$(c^{p^{m_0}} b^{-p^{m_0}})^{p^n} = c^{p^{m_0+n}} \prod_{j=0}^{p^n-1} c^{-jp^{m_0}} b^{-p^{m_0}} c^{jp^{m_0}}) \subset U.$$

Таким образом, при $n \geqslant \max(n_0, n_1)$

$$c^{p^{m_0+n}} \subset UU^{-1} \subset V,$$

т. е. c есть p-элемент.

§ 3

Пусть в топологической группе G можно выбрать полную систему окрестностей единицы, являющихся подгруппами. Это будет система Σ подгрупп $U, V, \ldots$ со следующими свойствами [([4]), § 17]:

(α) Пересечением всех подгрупп системы Σ будет единичная подгруппа.

(β) В пересечении любых двух подгрупп из Σ содержится некоторая третья подгруппа из этой системы.

(γ) Для всякой подгруппы U из Σ и всякого элемента a из G существует в Σ такая подгруппа V, что $a^{-1}Va \subset U$.

Легко видеть, что из условия (γ) следует, что для всякой подгруппы U из Σ, всякого элемента a из G и всякого натурального числа k_0 существует в Σ такая подгруппа V, что для всех k, $0 \leqslant k \leqslant k_0$, будет $a^{-k}Va^k \subset U$. Следующее условие будет, таким образом, естественным усилением условия (γ):

(γ') Для всякой подгруппы U из Σ и всякого элемента a из G существует в Σ такая подгруппа V, что для всех $k \geqslant 0$ будет

$$a^{-k}Va^k \subset U.$$

Назовем топологическую группу вполне нульмерной, если в ней можно выбрать полную систему окрестностей единицы, являющихся подгруппами и удовлетворяющих условию (γ'). *К числу вполне нульмерных групп принадлежат все топологические группы, обладающие полной системой окрестностей единицы, состоящей из нормальных делителей*, причем, как показывают примеры, эти два класса топологических групп не совпадают. С другой стороны, не всякая топологическая группа, обладающая полной системой окрестностей единицы, являющихся подгруппами, будет вполне нульмерной. Легко видеть, что *всякая подгруппа вполне нульмерной группы сама вполне нульмерна.*

ЛЕММА 5. *Во всякой вполне нульмерной группе G множество всех p-элементов замкнуто.*

Действительно, пусть элемент a принадлежит к замыканию множества p-элементов группы G. Если U — произвольная окрестность единицы, то через V обозначим окрестность единицы, удовлетворяющую условию (γ') по отношению к окрестности U и элементу a. В окрестности aV элемента a содержится p-элемент $b = av$, $v \subset V$, причем при любом j имеет место включение $a^{-j}va \subset U$ и поэтому при любом n

$$\prod_{j=0}^{p^n-1} (a^{-j}va^j) \subset U,$$

т. е., по лемме 3, a будет p-элементом.

Так как замыкание подгруппы есть подгруппа, то отсюда следует, что *всякая силовская p-подгруппа вполне нульмерной группы замкнута.*

ЛЕММА 6. *Если вполне нульмерная группа G содержит p-подгруппы A и B, причем A — нормальный делитель, то произведение AB будет p-подгруппой.*

Действительно, возьмем элемент $c = ab$, $a \subset A$, $b \subset B$, и произвольную окрестность единицы U, а затем выберем окрестность единицы V, удовлетворяющую условию (γ') по отношению к элементу c и окрестности U. Существует такое m_0, что $b^{-p^{m_0}} \subset V$. Поэтому при любом n имеет место включение

$$\prod_{j=0}^{p^n-1} (c^{-jp^{m_0}}\, b^{-p^{m_0}}\, c^{jp^{m_0}}) \subset U,$$

т. е., по лемме 4, c будет p-элементом.

ТЕОРЕМА 1. *Если вполне нульмерная топологическая группа G содержит силовскую p-подгруппу P, обладающую конечным числом сопряженных подрупп, то все силовские p-подгруппы этой группы сопряжены между собой, а их число сравнимо с единицей по модулю p.*

Доказательство. Применим лемму 2, взяв в качестве $\mathfrak{S}$ систему всех силовских p-подгрупп группы G. Справедливость условия I доказана в § 1. Для доказательства условия II заметим, что P будет нормальным делителем в своем нормализаторе N и, оставаясь силовской p-подгруппой в N, должна, ввиду леммы 6, содержать все p-подгруппы из N. Докажем условие III. По следствию из леммы 5 подгруппа P замкнута, поэтому, по лемме 1, замкнута и подгруппа N. Отсюда следует замкнутость пересечения N с замкнутой силовской p-подгруппой Q, т. е., по доказанному в § 1, индекс подгруппы $N \cap Q$ в Q будет степенью числа p. Наконец, условие IV содержится в формулировке теоремы.

§ 4

Следующая теорема относится к общей теории групп и является обобщением основной теоремы из работы ([1]).

ТЕОРЕМА 2. *Если группа G содержит p-подгруппу A, обладающую конечным числом сопряженных подгрупп, то для всякой p-подгруппы B группы G можно указать хотя бы одну подгруппу, сопряженную с A и порождающую вместе с B p-подгруппу.*

Доказательство. Присоединяем к подгруппе A такие сопряженные с нею подгруппы $A^1, \ldots, A^{(k)}$, что подгруппа $C = \{A, A^1, \ldots, A^{(k)}\}$ остается p-подгруппой, но ни одну из сопряженных с A подгрупп больше нельзя добавить с сохранением этого свойства. Всякая подгруппа, сопряженная с C, порождается подгруппами, сопряженными с A, поэтому C обладает лишь конечным числом сопряженных подгрупп, причем никакие две подгруппы, сопряженные с C, не порождают вместе p-подгруппу.

Возьмем теперь произвольную p-подгруппу Q и обозначим через $\mathfrak{M}$ систему тех подгрупп, сопряженных с C, нормализатор которых не содержит Q. Если $C' \subset \mathfrak{M}$, то число подгрупп, сопряженных с C' при помощи элементов из Q, конечно и будет положительной степенью числа p: это число равно индексу в Q пересечения Q с нормализатором подгруппы C', но это пересечение отлично от Q. Если $C'' = q^{-1}C'q$, $q \subset Q$, подгруппа C'' принадлежит к $\mathfrak{M}$: если бы нормализатор подгруппы C'' содержал Q, то обратным трансформированием мы получили бы, что Q входит и в нормализатор подгруппы C'. Теперь легко видеть, что система $\mathfrak{M}$ распадается на непересекающиеся подсистемы подгрупп, сопряженных между собою при помощи элементов из Q, а поэтому общее число подгрупп, входящих в $\mathfrak{M}$, делится на p.

Возьмем в качестве Q подгруппу C. Нормализатор никакой подгруппы C', сопряженной с C и отличной от нее, не может содержать C, так как иначе C и C' порождали бы вместе p-подгруппу, что невозможно. Таким образом, в этом случае система $\mathfrak{M}$ состоит из всех подгрупп, сопряженных с C, кроме самого C, а поэтому общее число подгрупп, сопряженных с C, сравнимо с единицей по модулю p.

Возьмем, наконец, в качестве Q заданную p-подгруппу B. В систему $\mathfrak{M}$, построенную для этого случая, не могут входить все подгруппы, сопряженные с C, так как их число сравнимо с 1 по модулю p, а число подгрупп, входящих в $\mathfrak{M}$, должно делиться на p. Существует, следовательно, такая подгруппа C', сопряженная с C, что ее нормализатор содержит B, а тогда $\{C', B\}$ будет p-подгруппой; тем более всякая подгруппа, сопряженная с A и входящая в C', будет порождать вместе с B p-подгруппу.

Теорема доказана. Одновременно доказано следующее: *если группа G содержит p-подгруппу A, обладающую конечным числом сопряженных подгрупп, причем ни одна из сопряженных с A подгрупп не порождает вместе с A p-подгруппу, то число подгрупп, сопряженных с A, сравнимо с 1 по модулю p.*

§ 5

Снова возвращаемся к рассмотрению топологических групп. Пусть в топологической группе G дана замкнутая подгруппа H. В класс $\mathfrak{K}_H$ подгрупп, сопряженных с H, следующим образом вводим топологию: берем в пространстве G любое открытое множество U, трансформируем его элементами подгруппу H и обозначаем подмножество класса $\mathfrak{K}_H$ через U^*. Систему всех U^*, построенных при помощи всех открытых

множеств U из G, считаем базой открытых множеств пространства $\mathfrak{K}_H$. Этим, как легко доказать, используя замкнутость H и лемму 1, в $\mathfrak{K}_H$ вводится топология, которая не зависит от того, какая из подгрупп, входящих в $\mathfrak{K}_H$, будет выбрана в качестве H. Пространство $\mathfrak{K}_H$, так определенное, будет гомеоморфно пространству смежных классов группы G по нормализатору подгруппы H [(4), § 18]. В дальнейшем, говоря *о классе сопряженных между собою замкнутых подгрупп*, мы всегда будем предполагать, что он указанным выше способом превращен в топологическое пространство.

Предположим теперь, что топологическая группа G обладает полной системой окрестностей единицы U_α, являющихся нормальными делителями. Обозначим дискретную группу G/U_α через G^α. Если H — подгруппа группы G, то ее образ при естественном гомоморфном отображении G на G^α обозначим H^α; таким образом, $H^\alpha = HU_\alpha/U_\alpha$.

ЛЕММА 7. *Если подгруппы H_1 и H_2 сопряжены в G, то подгруппы H_1^α и H^α сопряжены в G^α. Обратно, если подгруппа $\overline{H}$ сопряжена с H^α в G^α, то есть такая подгруппа H_0, сопряженная с H в G, что $H_0^\alpha = \overline{H}$.*

Первое утверждение основано на гомоморфизме естественного отображения G на G^α. Для доказательства второго утверждения возьмем в смежном классе по U_α, трансформирование которым переводит H^α в $\overline{H}$, произвольный элемент g. Если мы положим $H_0 = g^{-1}Hg$, то $H_0^\alpha = \overline{H}$.

Теперь мы примем, что H — замкнутая подгруппа группы G и поэтому класс $\mathfrak{K}_H$ будет топологическим пространством. Обозначим через $\mathfrak{K}_H^\alpha$ класс подгрупп группы G^α, сопряженных с H^α. Если мы поставим в соответствие всякой подгруппе H_0 из $\mathfrak{K}_H$ ее образ H_0^α в G^α, то получим, ввиду леммы 7, отображение φ_α класса $\mathfrak{K}_H$ на весь класс $\mathfrak{K}_H^\alpha$, однозначное в одну сторону.

ЛЕММА 8. *Полный прообраз $\varphi_\alpha^{-1}(M)$ любого подмножества M из класса $\mathfrak{K}_H^\alpha$ при отображении φ_α будет замкнутым подмножеством в классе $\mathfrak{K}_H$.*

Действительно, равенство $H_1^\alpha = H_2^\alpha$ равносильно равенству $H_1U_\alpha = H_2U_\alpha$. Отсюда следует, что если подгруппа H_1 из $\mathfrak{K}_H$ не входит в $\varphi_\alpha^{-1}(M)$, то для всех H_0 из $\varphi_\alpha^{-1}(M)$ будет $H_1U_\alpha \neq H_0U_\alpha$. Трансформируя подгруппу H_1 всеми элементами открытого нормального делителя U_α, мы получаем открытое подмножество класса $\mathfrak{K}_H$, содержащее H_1 и имеющее пустое пересечение с $\varphi_\alpha^{-1}(M)$: из $u^{-1}H_1u \cdot U_\alpha = H_0U_\alpha$, где $u \subset U_\alpha$, $H_0 \subset \varphi_\alpha^{-1}(M)$, вытекало бы $H_1U_\alpha = H_0U_\alpha$.

Таким образом, отображение φ_α будет непрерывным отображением пространства $\mathfrak{K}_H$ на дискретное множество $\mathfrak{K}_H^\alpha$. Отсюда следует, что *если пространство $\mathfrak{K}_H$ бикомпактно, то для всякого α множество $\mathfrak{K}_H^\alpha$ конечно.*

ЛЕММА 9. *Подгруппа P тогда и только тогда будет p-подгруппой группы G, если для всякого α подгруппа P^α есть p-подгруппа группы G^α.*

В самом деле, пусть P будет p-подгруппой в G и $a \subset P$. Тогда существует такое n_α, что $a^{p^{n_\alpha}} \subset U_\alpha$, а поэтому смежный класс aU_α имеет в G^α порядок p^{n_α}. Обратно, пусть $a \subset P$ и пусть для всякого α имеется такое n_α, что $(aU_\alpha)^{p^{n_\alpha}} \subset U_\alpha$. Отсюда следует, что $a^{p^{n_\alpha}} \subset U_\alpha$, т. е. a будет p-элементом.

Нашей целью является следующая теорема, в дискретном случае превращающаяся в теорему 2, но на нее опирающаяся.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть топологическая группа G обладает полной системой окрестностей единицы, являющихся нормальными делителями, и пусть в G дана такая замкнутая p-подгруппа P, что класс $\mathfrak{K}_P$ сопряженных с нею подгрупп бикомпактен. Тогда для всякой p-подгруппы Q группы G можно указать такую подгруппу P_1, сопряженную с P, что подгруппа $\{P_1, Q\}$ будет p-подгруппой группы G* *.

Доказательство. Ввиду следствия из леммы 8 класс $\mathfrak{K}_P^\alpha$ при всяком α конечен. С другой стороны, подгруппа Q^α будет, по лемме 9, p-подгруппой в G^α, а поэтому, по теореме 2, в $\mathfrak{K}_P^\alpha$ существуют такие подгруппы, которые вместе с Q^α порождают p-подгруппу группы G^α. Обозначим через $\mathfrak{M}_\alpha$ систему всех подгрупп из $\mathfrak{K}_P^\alpha$, обладающих этим свойством.

Пусть $U_\beta \subset U_\alpha$. Возьмем любую подгруппу из системы $\mathfrak{M}_\beta$ и запишем ее в виде P_0^β, причем ее прообраз P_0 в $\mathfrak{K}_P$ не будет, конечно, однозначно определен. Таким образом, $\{P_0^\beta, Q^\beta\}$ есть p-подгруппа в G^β, но так как $\{P_0^\beta, Q^\beta\} = \{P_0, Q\}^\beta$, то порядок всякого элемента из $\{P_0, Q\}$ по модулю U_β есть степень числа p. Это тем более имеет место по модулю U_α, поэтому $\{P_0, Q\}^\alpha = \{P_0^\alpha, Q^\alpha\}$ есть p-подгруппа в G^α, т. е. подгруппа P_0^α принадлежит к $\mathfrak{M}_\alpha$. Если подгруппа P_1 также является прообразом подгруппы P_0^β, т. е. $P_1^\beta = P_0^\beta$, откуда $P_1 U_\beta = P_0 U_\beta$, то тем более $P_1 U_\alpha = P_0 U_\alpha$, т. е. $P_1^\alpha = P_0^\alpha$.

Мы определим, следовательно, в одну сторону однозначное отображение $\pi_{\beta\alpha}$ системы $\mathfrak{M}_\beta$ в систему $\mathfrak{M}_\alpha$, полагая $\pi_{\beta\alpha}(P_0^\beta) = P_0^\alpha$. Если $U_\gamma \subset U_\beta \subset U_\alpha$, то отображение $\pi_{\gamma\alpha}$ совпадает с результатом последовательного выполнения отображений $\pi_{\gamma\beta}$ и $\pi_{\beta\alpha}$. Если мы будем считать систему всех конечных множеств $\mathfrak{M}_\alpha$ частично упорядоченной, полагая $\mathfrak{M}_\beta > \mathfrak{M}_\alpha$ при $U_\beta \subset U_\alpha$, то оказывается возможным применить результаты работы автора ([5]): можно так выбрать в каждой из систем $\mathfrak{M}_\alpha$ по одной подгруппе $P^{(\alpha)}$, что при $\mathfrak{M}_\beta > \mathfrak{M}_\alpha$ будет $\pi_{\beta\alpha}(P^{(\beta)}) = P^{(\alpha)}$ **

* Как указал автору Н. А. Леднев, таким же методом, как в тексте, может быть доказана теорема, параллельная теореме 3: можно требовать лишь компактность класса $\mathfrak{K}_p$, но предполагать, что в группе G выполняется первая аксиома счетности (20.III. 1945).

** В работе ([5]) рассматривается лишь случай отображения на все множество. Покажем, сохраняя обозначения работы ([5]), как этот результат можно распространить на наш более общий случай. Пусть дана частично упорядоченная система конечных множеств A_α и их проекций $\pi_{\beta\alpha}$, но предположим теперь, что $\pi_{\beta\alpha}$ есть отображение A_β в A_α, а не обязательно на A_α. Во всяком множестве A_α существуют, как легко доказать, элементы x, обладающие прообразом во всяком A_β, $A_\beta > A_\alpha$; систему таких элементов обозначим через A'_α. При отображении $\pi_{\beta\alpha}$ множество A'_β отображается на все множество A'_α: если ни один из прообразов $y_1, \ldots, y_k$ в A_β элемента x из A'_α не принадлежит к A'_β, то существует такое $A_\gamma > A_\beta$, в котором ни один из этих элементов не имеет прообраза; тогда, однако, в A_γ не будет прообраза и для x. Теперь остается применить результаты работы ([5]) к системе множеств A'_α.

Множество S_α тех подгрупп P_0 из $\mathfrak{K}_P$, которые имеют своим образом при отображении φ_α подгруппу $P^{(\alpha)}$, т. е. для которых $P_0^\alpha = P^{(\alpha)}$, непусто и, по лемме 8, замкнуто. Если $U_\beta \subset U_\alpha$, то $S_\beta \subset S_\alpha$: если $P_0 \subset S_\beta$, т. е. $P_0^\beta = P^{(\beta)}$, то

$$P_0^\alpha = \pi_{\beta\alpha}(P_0^\beta) = \pi_{\beta\alpha}(P^{(\beta)}) = P^{(\alpha)},$$

т. е. $P_0 \subset S_\alpha$. Отсюда следует, что пересечение любого конечного числа множеств S_α непусто, а поэтому, ввиду бикомпактности класса $\mathfrak{K}_P$, пересечение их всех также непусто. Существует, следовательно, такая подгруппа P_1, сопряженная с P, что для всех α будет $P_1^\alpha = P^{(\alpha)}$.

Подгруппа $\{P_1, Q\}$ будет p-подгруппой группы G. Действительно, $P_1^\alpha = P^{(\alpha)} \subset \mathfrak{M}_\alpha$, т. е. $\{P_1^\alpha, Q^\alpha\} = \{P_1, Q\}^\alpha$ будет p-подгруппой в G^α при всяком α, а поэтому, по лемме 9, $\{P_1, Q\}$ будет p-подгруппой в G.

Теорема 3 доказана. Из нее вытекает, в силу следствия из леммы 5, что *если топологическая группа G обладает полной системой окрестностей единицы, являющихся нормальными делителями, и если в G содержится бикомпактный класс сопряженных силовских p-подгрупп, то все силовские p-подгруппы группы G сопряжены между собой.*

Частным случаем этого последнего результата будет тот случай теоремы 1 настоящей работы, когда окрестности единицы — нормальные делители (само собою разумеется, без высказывания о числе силовских подгрупп), а поэтому и соответствующая теорема для алгебраического случая. С другой стороны, так как в компактной группе всякий класс сопряженных замкнутых подгрупп будет компактным [(4), теорема 11 и ее следствия], то из указанного выше результата вытекает и теорема Ван-Данцига (3) о сопряженности силовских p-подгрупп в компактной нульмерной группе со второй аксиомой счетности (всякая такая группа обладает, как известно, системой окрестностей единицы, составленной из нормальных делителей).

Математический институт при Московском гос. университете

Поступило 8.XII.1943

ЛИТЕРАТУРА

1 Dietzmann A. P., Kurosch A. und Uzkow A. I., Sylowsche Untergruppen von unendlichen Gruppen, Мат. сб., 3 (1938), 179—185.

2 Baer R., Sylow theorems for infinite groups, Duke Math. J., 6 (1940), 598—614.

3 Dantzig D. van, Zur topologischen Algebra, III, Comp. Math., 3 (1936), 408—426.

4 Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, ГОНТИ, 1938.

5 Курош А. Г., К теории частично упорядоченных систем конечных множеств, Мат. сб., 5 (1939), 343—346.

A. KUROSH. THE SYLOW SUBGROUPS OF ZERO-DIMENSIONAL TOPOLOGICAL GROUPS

SUMMARY

§ 1

An element a of a topological group G will be called p-element (p is a prime) if the sequence

$$a, a^p, a^{p^2}, \ldots, a^{p^n}, \ldots$$

converges to the unit element. A topological group will be called topological p-group, when all its elements are p-elements. Analogously, a subgroup (not necessarily closed) of a topological group G will by called p-subgroup, when all its elements are p-elements in G. Maximal p-subgroups of a group G will be called its Sylow p-subgroups. For the discrete case this notion coincides with that of the Sylow p-subgroup introduced in the paper (1) of the author, together with Dietzmann and Uzkow. Every abelian topological group possesses a unique Sylow p-subgroup.

LEMMA 1. *The normalizer of a closed subgroup in any topological group is a closed subgroup.*

§ 2

The following lemma refers to the algebraic theory of groups and yields a general scheme for the proof of the theorems similar to the fundamental theorem in (1).

LEMMA 2. *Suppose $\mathfrak{S}$ is a system of subgroups of the group G, P is a fixed subgroup in $\mathfrak{S}$, N is the normalizer of P. Let the following conditions be fulfilled (p is a fixed prime):*

(i) *Every subgroup conjugate to a subgroup from $\mathfrak{S}$ belongs itself to $\mathfrak{S}$.*

(ii) *N contains no subgroup from $\mathfrak{S}$ different from P.*

(iii) *If Q is a subgroup from $\mathfrak{S}$ such that the index of $N \cap Q$ in Q is finite, then this index is a power of p.*

(iv) *P possesses only a finite number of conjugate subgroups.*

Under these conditions all the subgroups of the system $\mathfrak{S}$ are conjugate to P and their number is congruent to 1 modulo p.

Lemmas 3 and 4 deal with topological groups and give the conditions that the totality of all p-elements of a group be closed and that the product of the two p-subgroups, one of which is invariant, be also a p-subgroup.

§ 3

A topological group G is said to be completely zero-dimensional if G possesses a complete system of neighbourhoods Σ of the unit element consisting of subgroups such that for every subgroup $U \in \Sigma$ and every element $a \in G$ there exists a subgroup $V \in \Sigma$ with the property $a^{-k} V a^k \subset U$ for all $k \geqslant 0$.

LEMMA 5. *In every completely zero-dimensional group the set of all p-elements is closed.*

Hence follows the closedness of the Sylow p-subgroups in completely zero-dimensional groups.

LEMMA 6. *If A and B are p-subgroups of a completely zero-dimensional group and A is an invariant subgroup, then AB is a p-subgroup.*

Lemmas 2, 5 and 6 imply

THEOREM 1. *If a completely zero-dimensional topological group G contains a Sylow p-subgroup P possessing a finite number of conjugate subgroups, then all Sylow p-subgroups of G are conjugate and their number is congruent to 1 modulo p.*

§ 4

The following theorem refers to the general theory of groups and is a generalization of the fundamental theorem in (1).

THEOREM 2. *If a group G contains a p-subgroup A possessing a finite number of conjugate subgroups, then for every p-subgroup B of G there is at least one subgroup conjugate to A which generates, together with B, a p-subgroup. If, moreover, no one of the subgroups conjugate to A generates, together with A, a p-subgroup, then the number of subgroups conjugate to A is congruent to 1 modulo p.*

§ 5

Suppose H is a closed subgroup of a topological group G and $\mathfrak{K}_H$ is the class of subgroups conjugate to H. We take any open set U in the space G and transform the subgroup H by elements of U.

The resulting subset of $\mathfrak{K}_H$ will be denoted by U^*. If the system of all U^* so obtained is taken as a basis of open sets in $\mathfrak{K}_H$, the latter becomes a topological space.

The fundamental theorem of the paper is the following

THEOREM 3. *Suppose that the topological group G possesses a complete system of neighbourhoods of the unit element that all are invariant subgroups and there is a closed p-subgroup P in G such that the class $\mathfrak{K}_P$ of subgroups conjugate to P is bicompact. Then for every p-subgroup Q of G there exists a subgroup P_1 conjugate to P such that $\{P_1, Q\}$ is a p-subgroup of G.*

This theorem gives, in the case of discrete groups, the first assertion of theorem 2. It follows of theorem 3 that *if a topological group G possesses a complete system of neighbourhoods of the unit element that all are invariant subgroups and G contains a bicompact class of conjugate Sylow p-subgroups, then all the Sylow p-subgroups of the group G are conjugate.*

This result is a generalization of van Dantzig's theorem on the conjugateness of the Sylow p-subgroups in a compact zero-dimensional group with the second countability axiom, because every class of conjugate closed subgroups in a compact zero-dimensional group is compact. The definition of the Sylow p-subgroups given by van Dantzig ([3]) is equivalent to that of ours for the class of compact zero-dimensional groups.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 79–112 Série mathématique

С. П. ФИНИКОВ

ПАРА ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, РАССЛОЯЕМЫХ ДВУМЯ СЕМЕЙСТВАМИ КРИВЫХ

(*Представлено академиком* Н. Н. Лузиным)

В работе рассматривается пара линейчатых поверхностей со взаимно однозначным соответствием образующих и семейство кривых на каждой поверхности так, что соприкасающаяся плоскость к любой кривой в точке пересечения с какой-нибудь образующей проходит через соответствующую образующую другой поверхности. Доказывается, что каждую пару можно дополнить семейством пар так, чтобы образовалась расслояемая пара конгруэнций.

1. Пусть L, L' — две линейчатых поверхности, между прямолинейными образующими которых установлено взаимно однозначное соответствие. Пару (L, L') будем называть расслояемой, если на каждой поверхности можно провести семейство ∞^1 кривых C (соответственно, C') так, чтобы соприкасающиеся плоскости, проведенные к кривым каждой поверхности в точках их пересечения с одной прямолинейной образующей (например, l проходили через соответствующую образующую (например, l') другой поверхности.

Легко привести пример такой пары. Рассмотрим расслояемую пару конгруэнций K, K'. По определению расслояемости (1) каждая из них несет семейство ∞^1 поверхностей Σ или Σ', так что касательные плоскости, проведенные к каждой поверхности семейства каждой конгруэнции, в точках пересечения их с одним и тем же лучом этой конгруэнции, проходят через соответствующий луч другой конгруэнции. Как известно, эти два семейства поверхностей образуют систему Bianchi [по терминологии Terracini (2)], а именно — всякая прямая, соединяющая пару точек двух поверхностей Σ и Σ', лежащих на соответствующих лучах l, l', касается обеих поверхностей, ибо, по самому определению расслояемости, является пересечением их касательных плоскостей, так что любую пару поверхностей Σ, Σ' можно рассматривать как фокальные поверхности некоторой новой конгруэнции; сверх того (что гораздо важнее), все эти ∞^2 конгруэнции являются конгруэнциями W; именно: если считать соответственными на всех поверхностях Σ, Σ' те точки, которые лежат на соответствующих лучах l, l' пары конгруэнций K, K', то асимптотические линии на всех поверхностях Σ, Σ' соответствуют друг другу.

Следовательно, существует два семейства по ∞^1 линейчатых поверхностей L конгруэнции K, которые для краткости можно назвать асим-

птотическими и каждая из которых несет на себе те асимптотические линии C всех поверхностей Σ, которые соответствуют какой-нибудь выбранной асимптотической C_1 на одной из этих поверхностей, Σ_1. Такая поверхность L образована, очевидно, теми лучами конгруэнции K, которые пересекают линию C_1. Каждой такой поверхности L соответствует в конгруэнции K' асимптотическая линейчатая поверхность L', несущая асимптотические линии C' всех поверхностей Σ', соответствующих линиям C.

Нетрудно заметить, что такие две поверхности L и L' образуют расслояемую пару. Действительно, соприкасающаяся плоскость любой асимптотической C совпадает с касательной плоскостью ее поверхности Σ и, следовательно, проходит через соответствующий луч l' конгруэнции K', т. е. через соответствующую образующую поверхности L'; то же можно сказать относительно асимптотических C', лежащих на поверхности L'. Их соприкасающиеся плоскости пройдут через соответствующую образующую l поверхности L.

Если конгруэнции K, K' расслояемой пары — гиперболические, то поверхности L, L' — косые линейчатые (не развертывающиеся).

Если конгруэнции K, K' параболические, то одно семейство асимптотических расслояющих поверхностей Σ, Σ' соответствует тому семейству асимптотических на фокальных поверхностях конгруэнций K, K', касательные к которым образуют эти конгруэнции. Линейчатые поверхности L, L' конгруэнций K, K', которые несут соответствующие друг другу асимптотические из этого семейства, очевидно, будут развертывающимися.

2. Другой пример расслояемых пар поверхностей L, L' приводит нас к вопросу о расслояемых парах кривых ([3]).

Две кривые (M_1) и (M_2), между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие, образуют расслояемую пару, если к каждой паре соответствующих точек можно присоединить линейный комплекс, имеющий касание 2-го порядка с каждой из этих кривых, который, для краткости, мы назовем соприкасающимся линейным комплексом пары. Общий касательный линейный комплекс (касание 1-го порядка), находящийся в инволюции (в смысле Koenigs'а) с соприкасающимся, кладется в основу нулевой системы Ξ. К каждой точке P соприкасающейся плоскости m_1 кривой (M_1) присоединена в нулевой системе Ξ плоскость, проходящая через прямую M_1P; аналогично, точке Q соприкасающейся плоскости m_2 кривой (M_2) присоединена плоскость, содержащая прямую M_2Q.

Эти плоскости огибают два семейства линейчатых поверхностей (P) и (Q); каждая плоскость касается огибающей в своем центре (точки P или Q). Прямолинейные образующие поверхностей (P) образуют пучок с центром в точке M_1 и плоскостью m_1; образующие поверхностей (Q) составляют пучок с центром M_2 и плоскостью m_2. Кривая (M_1) является общей асимптотической всех поверхностей (P), которые, следовательно, все касаются друг друга вдоль линии (M_1); аналогично, все поверхности (Q) касаются вдоль асимптотической (M_2). Наконец, любые две поверхности (P) и (Q) служат фокальными поверхностями некоторой конгруэнции V

Каждой поверхности (P_i) можно присоединить сопряженную ей поверхность (Q_i), так что соответствующие образующие все время пересекаются в точке N_i, лежащей, конечно, на линии пересечения соприкасающихся плоскостей $m_1 m_2$.

Касательная плоскость у этих поверхностей (P_i), (Q_i) в точке N_i общая; это — плоскость $N_i M_1 M_2$, соответствующая точке N_i в нулевой системе линейного комплекса Ξ. Следовательно, обе сопряженных поверхности касаются друг друга вдоль линии (N_i). Замечательно, что эта плоскость является соприкасающейся плоскостью кривой (N_i), которая служит общей асимптотической — подобно линии (M_1) — для любых двух поверхностей (P).

Эта аналогия обращается в полное тождество. Если взять любые две кривые (N_1), (N_2), то они обладают общим соприкасающимся линейным комплексом (касание 2-го порядка), тем же касательным комплексом Ξ в инволюции с соприкасающимся и той же нулевой системой. Они тоже образуют расслояемую пару. Их расслояющие поверхности (R) описаны прямыми двух пучков с центрами в точках N_1, N_2 и плоскостями $N_1 M_1 M_2$, $N_2 M_1 M_2$. Поверхности (P_1), (P_2), (Q_1), (Q_2) входят в семейство поверхностей (R).

Поверхности (R) тоже соединяются в сопряженные пары, соответствующие образующие которых все время пересекаются в точках M_i на оси $M_1 M_2$, а сами поверхности касаются друг друга вдоль линии (M_i), которая является их общей асимптотической. Замечательно, что семейство кривых (M_i) не зависит от выбора пары кривых (N_1), (N_2). Обратно, любые две кривые (M_a), (M_b) образуют расслояемую пару с тем же соприкасающимся линейным комплексом и той же нулевой фундаментальной системой. Расслояющие поверхности собираются в сопряженные пары, которые касаются вдоль тех же кривых (N_i), их общих асимтотических.

Совокупность ∞^2 поверхностей, служащих для расслоения любой пары кривых (M_a), (M_b), совпадает с совокупностью ∞^2 поверхностей (R_i), которые мы получаем, рассматривая всевозможные пары кривых (N_α), (N_β). Это — линейчатые поверхности, описанные прямыми, соединяющими любую точку M с любой точкой N.

Две произвольные поверхности (R_i), не обладающие общей асимптотической (соответствующие образующие не пересекаются на $M_1 M_2$ или на $N_1 N_2$), служат фокальными поверхностями некоторой конгруэнции W.

Следовательно, рассматриваемое семейство ∞^2 поверхностей (R) образует двумерную систему Bianchi, которую естественно назвать системой 2-го рода. Это — совокупность ∞^2 поверхностей и ∞^4 конгруэнций W, но без закрепленного соответствия точек: если точка M_1 первой поверхности соответствует в конгруэнции W (лежит на одном луче) точке M_2 второй поверхности и точке M_3 третьей, а точка M_2 второй поверхности соответствует точке M_4 четвертой, то в конгруэнции с фокальными поверхностями из третьей и четвертой поверхности точка M_3 будет соединяться лучом конгруэнции с точкой M_4^*, отличной от точки M_4.

Нетрудно видеть, что соприкасающиеся плоскости кривых (M) в точках, лежащих на образующей $M_1 M_2$, проходят через образующую $N_1 N_2$, а

соприкасающиеся плоскости кривых (N) в точках пересечения с прямой N_1N_2 все содержат прямую M_1M_2; следовательно, пара линейчатых поверхностей L, L', описанных образующими M_1M_2, N_1N_2, расслоется семействами кривых (M) и (N).

Пара кривых $(M_1), (M_2)$ со взаимно однозначным соответствием точек, если даже откинуть особые случаи, когда соприкасающаяся плоскость одной (или обеих) из кривых проходит через соответствующую точку другой кривой, могут дать два расположения. Соответствующие касательные обеих кривых могут скрещиваться или пересекаться.

Если касательные кривые $(M_1), (M_2)$ скрещиваются, то то же самое имеет место для любой пары кривых (M) или кривых (N), и поверхности L, L', описанные прямыми M_1M_2, N_1N_2, — косые линейчатые.

Если соответствующие касательные кривых (M) и (N) пересекаются, например, в точке S прямой N_1N_2, то соответствующие им касательные любой из кривых (M) пройдут через ту же точку S, касательные всех кривых (N) сойдутся в одной точке T прямой M_1M_2. Поверхности L,L' — развертывающиеся, и точки T и S описывают их ребра возврата.

3. В первой главе настоящей работы после установления (n° 4) основной системы уравнений, определяющей расслояемую пару поверхностей, мы показываем, что она всегда несет два семейства кривых, попарно расслояемых, и двумерное многообразие линейчатых поверхностей, составляющих систему Bianchi 2-го рода. Обращаясь (nn° 5 и 6) к двум случаям расслояемой пары косых линейчатых или развертывающихся поверхностей, мы даем геометрическую характеристику каждой из них. Косые линейчатые поверхности образуют расслояемую пару, если они служат фокальными поверхностями некоторой конгруэнции W. Характеристика развертывающихся поверхностей пары более сложно выражается: соприкасающаяся плоскость каждого из их ребер возврата проходит через соответствующую точку другого ребра возврата (одномерная аналогия конгруэнции W). Любые две расслояющие кривые разных семейств образуют пару того же вида.

Во второй главе мы обращаемся к основной задаче о продолжении расслояемой пары косых линейчатых поверхностей в расслояемую пару конгруэнций. Непосредственное применение теоремы Cartan'а о существовании интегрального многообразия системы Пфаффа, проходящего через заданный интегральный элемент, оказывается невозможным, ибо касательный элемент 1-го порядка, соответствующий заданной паре линейчатых поверхностей, является особым интегральным элементом для двумерной задачи. Таким образом, приходится для данного случая решать заново задачу Cartan'а. Она приводит к ортономной системе уравнений в частных производных Riquier.

При подходящем задании пары точек A_1, A_2 и A_3, A_4 на каждой из соответствующих образующих так, чтобы лучи A_1A_3, A_2A_4 описывали новую пару расслояемых линейчатых поверхностей, существует с произволом одной функции одного аргумента расслояемая пара конгруэнций, которая включает в себе заданную пару линейчатых поверхностей в качестве асимптотических линейчатых поверхностей (поверхностей, образованных лучами обеих конгруэнций, пересекающих одну серию

соответствующих друг другу асимптотических на всех расслояющих поверхностях пары), причем выбранные на образующих точки A_i будут совпадать с фокусами луча. При этом одна точка A_1 может быть взята произвольно (одна функция одного аргумента), три остальных ею определяются.

Тем же методом решаются дополнительные вопросы о проведении через данную расслояемую пару линейчатых поверхностей расслояемой четверки конгруэнций (две расслояемые пары, описанные противоположными сторонами косого четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$)—произвол двух функций одного аргумента. Аналогично находим, что произвольная расслояемая пара линейчатых поверхностей включается в сопряженную пару конгруэнций с произволом двух функций одного аргумента.

Наконец, третья глава посвящена включению расслояемой пары развертывающихся поверхностей в расслояемую пару параболических конгруэнций. Здесь вопрос стоит значительно сложнее, но включение всегда возможно, и включающая пара конгруэнций вполне определена.

Глава I

4. Пусть A_1A_2 и A_3A_4 — две соответствующие образующие линейчатых поверхностей L, L'. Проективные перемещения тетраэдра (A_i) с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4, определяются уравнениями

$$dA_i = \omega_i^1 A_1 + \omega_i^2 A_2 + \omega_i^3 A_3 + \omega_i^4 A_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

где ω_i^k — линейные формы Пфаффа от дифференциала независимого параметра.

Если пара L, L' расслояема, то существует семейство кривых (M) на поверхности L и семейство кривых (N) на поверхности L', так что соприкасающиеся плоскости их в точках пересечения с лучом A_1A_2 или, соответственно, с лучом A_3A_4 проходят через луч A_3A_4 — для первой кривой или луч A_1A_2 — для второй.

Пусть эти кривые описываются точками

$$M = A_1 + \mu A_2, \quad N = A_3 + \nu A_4.$$

Так как из формул (1) следует

$$\begin{aligned} dM &= A_1(\omega_1^1 + \mu\omega_2^1) + A_2(\omega_1^2 + \mu\omega_2^2 + d\mu) + A_3(\omega_1^3 + \mu\omega_2^3) + A_4(\omega_1^4 + \mu\omega_2^4), \\ dN &= A_1(\omega_3^1 + \nu\omega_4^1) + A_2(\omega_3^2 + \nu\omega_4^2) + A_3(\omega_3^3 + \nu\omega_4^3) + A_4(\omega_3^4 + \nu\omega_4^4 + d\nu); \end{aligned}$$

то условия пересечения касательной $(M\,dM)$ с ребром A_3A_4 и $(N\,dN)$ с ребром A_1A_2

$$(M\,dM\,A_3A_4) = 0, \quad (N\,dN\,A_1A_2) = 0$$

запишутся в виде уравнений

$$\left.\begin{aligned} d\mu &= \mu^2\omega_2^1 + \mu(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \omega_1^2, \\ d\nu &= \nu^2\omega_4^3 + \nu(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \omega_3^4. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} dM &= (A_1+\mu A_2)(\omega_1^1+\mu\omega_2^1)+A_3(\omega_1^3+\mu\omega_2^3)+A_4(\omega_1^4+\mu\omega_2^4),\\ dN &= A_1(\omega_3^1+\nu\omega_4^1)+A_2(\omega_3^2+\nu\omega_4^2)+(A_3+\nu A_4)(\omega_3^3+\nu\omega_4^3). \end{aligned}\right\} \qquad (2^*)$$

Соприкасающаяся плоскость кривой (M) пройдет через ребро A_3A_4, если

$$(M\,d^2M\;A_3A_4)=0$$

или, в силу предыдущих уравнений,

$$\{M, (\omega_1^3+\mu\omega_2^3)\,dA_3+(\omega_1^4+\mu\omega_2^4)\,dA_4,\; A_3,\; A_4\}=0$$

или, с помощью формул (1),

$$\begin{vmatrix} 1 & (\omega_1^3+\mu\omega_2^3)\,\omega_3^1+(\omega_1^4+\mu\omega_2^4)\,\omega_4^1 \\ \mu & (\omega_1^3+\mu\omega_2^3)\,\omega_3^2+(\omega_1^4+\mu\omega_2^4)\,\omega_4^2 \end{vmatrix}=0$$

или, если приравнять нулю коэффициенты при степенях μ

$$\begin{aligned} &\omega_2^3\omega_3^1+\omega_2^4\omega_4^1=0,\\ &\omega_1^3\omega_3^2+\omega_1^4\omega_4^2=0,\\ &\omega_1^3\omega_3^1+\omega_1^4\omega_4^1=\omega_2^3\omega_3^2+\omega_2^4\omega_4^2. \end{aligned}$$

Аналогично, соприкасающаяся плоскость кривой (N) содержит прямую A_1A_2, если

$$\begin{aligned} &\omega_4^1\omega_1^3+\omega_4^2\omega_2^3=0,\\ &\omega_3^1\omega_1^4+\omega_3^2\omega_2^4=0,\\ &\omega_3^1\omega_1^3+\omega_3^2\omega_2^3=\omega_4^1\omega_1^4+\omega_4^2\omega_2^4. \end{aligned}$$

Таким образом, пара линейчатых поверхностей L, L' расслояема, если компоненты движений тетраэдра $\{A_i\}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\omega_2^3\omega_3^1+\omega_2^4\omega_4^1=0, &&\omega_1^3\omega_3^2+\omega_1^4\omega_4^2=0,\\ &\omega_4^1\omega_1^3+\omega_4^2\omega_2^3=0, &&\omega_3^1\omega_1^4+\omega_3^2\omega_2^4=0,\\ &\omega_1^3\omega_3^1-\omega_2^4\omega_4^2=0, &&\omega_1^4\omega_4^1-\omega_2^3\omega_3^2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Система (3) содержит 8 независимых форм Пфаффа: ω_1^3, ω_1^4, ω_2^3, ω_2^4, ω_3^1, ω_3^2, ω_4^1, ω_4^2. С другой стороны, из 6 уравнений системы только 3 независимы: если из двух форм ω_1^3 и ω_1^4, например, вторая отлична от нуля (обе формы одновременно могут обращаться в нуль только при особо неудачном выборе точки A, когда она описывает ребро возврата поверхности L) и из двух форм ω_3^1 и ω_3^2 хотя бы вторая не нуль, то система (3) равносильна уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1^3=x\omega_1^4, &&\omega_2^3=y\omega_1^4, &&\omega_2^4=-z\omega_1^4,\\ &\omega_3^1=z\omega_3^2, &&\omega_4^1=y\omega_3^2, &&\omega_4^2=-x\omega_3^2, \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

где x, y, z — новые неизвестные функции.

Так как при этом одну из форм, например, ω_1^4, можно выбором параметра σ привести к виду $\omega_1^4=d\sigma$, то произвольная расслояемая пара линейчатых поверхностей зависит от четырех произвольных функций одного аргумента.

Действительно, наиболее общий тетраэдр пространства зависит от $4\cdot 4=16$ параметров; из них 4 параметра определяют нормирование четырех вершин. При подходящем нормировании, например, все формы ω_i^i можно привести к нулю.

Далее, для определения линейчатых поверхностей (A_1A_2), (A_3A_4) несущественно, как выбрать точки A_1 и A_2 на первом луче, A_3, A_4 — на втором.

Так как ω_1^2, ω_2^1 определяют перемещения точек A_1, A_2 по лучу A_1A_2, а формы ω_3^4, ω_4^3 — перемещения точек A_3, A_4 по лучу A_3A_4, то подходящим выбором этих точек на их лучах можно и эту четверку форм свести к нулю: достаточно, например, взять два частных решения системы (2) и поместить A_1, A_2, A_3, A_4 в соответствующие точки M_1, M_2, N_1, N_2.

Таким образом, остается только 8 форм, отличных от нуля, которые уравнениями (3′) выражены через $\omega_1^4 = d\sigma$, $\omega_3^2 = \lambda\, d\sigma$ и три новых переменных x, y, z, т. е. через 4 произвольных функции от σ, именно λ, x, y, z.

5. Остановимся теперь на случае косых линейчатых поверхностей (не развертывающихся) и покажем, что они служат фокальными поверхностями некоторой конгруэнции W.

Возьмем на луче A_1A_2 произвольную точку

$$P = A_1 + pA_2.$$

Касательная плоскость к поверхности (A_1A_2) в этой точке определяется точками

$$(A_1\, A_2\, dP) = \{A_1,\ A_2,\ A_3\ (\omega_1^3 + p\omega_2^3) + A_4\,(\omega_1^4 + p\omega_2^4)\}.$$

Эта плоскость пересекает луч A_3A_4 в точке

$$Q = A_3 + qA_4,$$

где q связано с p уравнением

$$\{A_1,\ A_2,\ A_3 + qA_4,\ A_3\,(\omega_1^3 + p\omega_2^3) + A_4\,(\omega_1^4 + p\omega_2^4)\} = 0$$

или

$$pq\omega_2^3 + q\omega_1^3 - p\omega_2^4 - \omega_1^4 = 0. \tag{4}$$

Обратно, условие, что касательная плоскость к поверхности (A_3A_4) в точке Q проходит через точку P, получается из уравнения (4) заменой p на q и указателей 1 и 2 на 3 и 4:

$$pq\omega_4^1 - q\omega_4^2 + p\omega_3^1 - \omega_3^2 = 0. \tag{4a}$$

Оба условия совпадают, прямая PQ лежит в обеих касательных плоскостях и, следовательно, касается обеих поверхностей, если имеет место пропорциональность

$$\frac{\omega_2^3}{\omega_4^1} = \frac{\omega_1^3}{-\omega_4^2} = \frac{-\omega_2^4}{\omega_3^1} = \frac{\omega_1^4}{\omega_3^2}. \tag{5}$$

Эта пропорциональность удовлетворена в силу уравнений (3) и сама приводит к этим уравнениям; стоит только ввести x, y, z с помощью первых трех из этих уравнений, чтобы получить из уравнений (5) вторые три из уравнений (3′). Остается показать, что конгруэнция, описанная лучами PQ, является конгруэнцией W, но это очевидно: точкам P, лежащим на прямой A_1A_2, соответствуют точки Q прямой A_3A_4; следовательно, прямолинейные образующие соответствуют друг другу,

а так как фокальные сети всегда соответствуют, то в инволюциях сопряженных направлений имеются уже две общих сопряженных пары (фокальная и одна пара совпавших сопряженных направлений — асимптотические направления прямолинейных образующих) и все пары сопряженных направлений — общие, т. е. конгруэнция W.

Можно и непосредственно обнаружить, что криволинейные асимптотические тоже соответствуют на поверхностях L, L'. Чтобы проще провести выкладки, воспользуемся более удобным тетраэдром. Мы видели, что каждая поверхность несет семейство кривых (M) или (N). Выберем произвольные две кривые (M_1), (M_2) и две кривые (N_3), (N_4) и поместим точки A_1, A_2, A_3, A_4 в точки M_1, M_2, N_3, N_4.

Так как теперь уравнения (2) должны удовлетворяться значениями $\mu=\nu=0$, $\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\nu}=0$, то

$$\omega_1^2=\omega_2^1=\omega_4^3=\omega_3^4=0.$$

С другой стороны, если нормировать точки A_i подходящим образом, то можно добиться, чтобы

$$\omega_1^1=\omega_2^2=\omega_3^3=\omega_4^4=0.$$

Пользуясь еще формулами (3′), мы представим таблицу компонент в виде

$$\left.\begin{aligned} dM_1&=\omega_1^4(xN_3+N_4),\\ dM_2&=\omega_1^4(yN_3-zN_4),\\ dN_3&=\omega_3^2(zM_1+M_2),\\ dN_4&=\omega_3^2(yM_1-xM_2). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Уравнение асимптотических для поверхностей L напишется в виде

$$(M_1\, M_2\, Q\; d^2P)=0$$

или

$$\{M_1,\ M_2,\ N_3+qN_4,\ dM_2\,dp+\omega_1^4(x+py)\,dQ\}=0$$

или

$$(x+py)\,dq=(z+qy)\,dp, \quad \omega_1^4=0.$$

Первое уравнение переходит само в себя, если от поверхности L перейти к поверхности L' и, следовательно, заменить p на q и x на z.

6. Покажем теперь, что любая пара кривых (M) или (N) расслояема. Воспользуемся тетраэдром $(M_1M_2N_3N_4)$ с таблицей компонент (6). Если мы обозначим через (AB) внешнее произведение двух точек A, B, т. е. шесть линейно независимых миноров матрицы, составленной из координат этих точек, определяющих прямую AB, и через

$$\sum c\,(AB)=0$$

уравнение линейного комплекса с коэффициентами c_{ik} (индексы опущены) и текущими координатами луча (AB), то комплекс, имеющий касание 2-го порядка с кривыми (M_1) и (M_2), т. е. содержащий по три бесконечно близких касательных, будет определяться из условий

$$\left.\begin{aligned} &\sum c(M_1\,dM_1)=0, \quad \sum c(M_2\,dM_2)=0, \\ &\sum c(M_1\,d^2M_1)=0, \quad \sum c(M_2\,d^2M_2)=0, \\ &\sum c(dM_1\,d^2M_1)+\sum c(M_1\,d^3M_1)=0, \\ &\sum c(dM_2\,d^2M_2)+\sum c(M_2\,d^3M_2)=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

В силу уравнений (6) первые два условия принимают вид

$$x\sum c(M_1N_3)+\sum c(M_1N_4)=0, \quad y\sum c(M_2N_3)-z\sum c(M_2N_4)=0.$$

Так как из уравнений (6) имеем

$$d^2M_1=(xN_3+N_4)\,d\omega_1^4+\omega_1^4N_3\,dx+\omega_1^4\omega_3^2(xz+y)\,M_1,$$
$$d^2M_2=(yN_3-zN_4)\,d\omega_1^4+\omega_1^4(N_3\,dy-N_4\,dz)+\omega_1^4\omega_3^2(xz+y)\,M_2,$$

то вторые два условия принимают вид

$$\sum c(M_1N_3)=0, \quad \sum c(M_2N_3)\,dy-\sum c(M_2N_4)\,dz=0.$$

Если $dy:dz=y:z$, то

$$(M_2\,dM_2\,d^2M_2)=0,$$

т. е. эти три точки лежат на одной прямой, линия (M_2)—прямая и поверхности L, L' имеют общую направляющую прямую. Оставляя этот случай в стороне, имеем

$$\sum c(M_1N_3)=\sum c(M_1N_4)=\sum c(M_2N_3)=\sum c(M_2N_4)=0 \tag{8a}$$

и третьи условия, определяющие общий соприкасающийся (касание 2-го порядка) линейный комплекс, принимают вид

$$-\omega_1^4\sum c(N_3N_4)+\omega_3^2\sum c(M_1M_2)=0. \tag{8b}$$

Если отнесем комплекс к тетраэдру $(M_1M_2N_3N_4)$, так что каждая из вершин M_i, N_j имеет только одну координату — единицу, а все остальные нули, то наши уравнения примут вид

$$c_{13}=c_{14}=c_{23}=c_{24}=0, \quad \omega_1^4c_{34}=\omega_3^2c_{12}$$

и в местных координатах (x_i); (y_i) комплекс определится уравнением

$$(x_1y_2-x_2y_1)+\frac{\omega_3^2}{\omega_1^4}(x_3y_4-x_4y_3)=0. \tag{9}$$

Нетрудно теперь заметить, что полученный комплекс имеет касание 2-го порядка с каждой кривой

$$M=M_1+\mu M_2,$$

где μ удовлетворяет уравнению (2). При нашем выборе вершин тетраэдра в силу формул (6) все члены правой части обращаются в нуль и μ является произвольным постоянным параметром. Поэтому первое условие

$$\sum c(M\,dM)=\sum c(M_1+\mu M_2,\ dM_1+\mu\,dM_2)=0$$

удовлетворено в силу уравнений (6) и (8a).

Так как

$$d^2M = dM\,\frac{d\omega_1^4}{\omega_1^4} + \omega_1^4\,\{N_3\,(dx + \mu\,dy) - N_4\mu\,dz\} + \omega_1^4\,\omega_3^2\,(xz + y)\,M,$$

то удовлетворено и второе условие

$$\sum c\,(M\,d^2M) = 0.$$

Наконец, третье условие

$$\sum c\,(dM\,d^2M) + \sum c\,(M\,d^3M) = 0$$

может быть заменено в силу (8a) уравнением

$$(\omega_1^4)^2 \sum c\,\{N_3\,(x + \mu y) + N_4\,(1 - \mu z),\ N_3\,(dx + \mu\,dy) - N_4\mu\,dz\} +$$
$$+ \omega_1^4\,\omega_3^2 \sum c\,\{M_1 + \mu M_2,\ M_1\,(z\,dx + \mu z\,dy - \mu y\,dz) +$$
$$+ M_2\,(dx + \mu\,dy + \mu x\,dz)\} = 0,$$

которое приведет нас к уравнению (8b), умноженному на

$$\omega_1^4\,\{(1 - \mu z)\,(dx + \mu\,dy) + \mu\,(x + \mu y)\,dz\}.$$

Так как таблица (6) переходит сама в себя от замены M на N и значков 1 и 2 на 3 и 4 и такое же преобразование выдерживает уравнение комплекса (9), то доказанное свойство распространяется и на все кривые $(N) \equiv (N_3 + \nu N_4)$ при произвольном, но постоянном, согласно уравнениям (2), значении ν. Все кривые (M) и (N) имеют общий соприкасающийся линейный комплекс.

7. Касательный линейный комплекс в инволюции с комплексом (9) определяется уравнением

$$x_1y_2 - x_2y_1 - \frac{\omega_3^2}{\omega_1^4}\,(x_3y_4 - x_4y_3) = 0. \tag{10}$$

Если здесь рассматривать (x_i) как местные координаты некоторой заданной точки, а (y_i) — как текущие координаты, то это уравнение определит плоскость, соответствующую в нулевой системе комплекса точке (x_i) — центру плоского элемента с плоскостью (10).

Совокупность всех этих плоских элементов образует многообразие четырех измерений. Можно ли его расслоить на ∞^2 многообразий касательных элементов одной поверхности?

Рассмотрим центр нашего элемента

$$P = M_1x_1 + M_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4.$$

Все перемещения его определяются дифференциалом dP, который с помощью формул (6) принимает вид

$$dP = M_1\,\{dx_1 + \omega_3^2\,(zx_3 + yx_4)\} + M_2\,\{dx_2 + \omega_3^2\,(x_3 - xx_4)\} +$$
$$+ N_3\,\{dx_3 + \omega_1^4\,(xx_1 + yx_2)\} + N_4\,\{dx_4 + \omega_1^4\,(x_1 - zx_2)\}.$$

Если точка P описывает поверхность, для которой наш плоский элемент является касательным, то dP удовлетворяет уравнению (10). Внося сюда

вместо текущих координат y_i коэффициенты при M_i, N_j в формуле для dP, получим

$$x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1 - \frac{\omega_3^2}{\omega_1^4}(x_3\,dx_4 - x_4\,dx_3) = 0. \tag{11}$$

Это — единственное условие, накладывающееся на перемещение точки P.

Мы можем, следовательно, задать произвольное семейство поверхностей

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = C. \tag{12}$$

Полагая в силу однородности одну из координат равной единице и принимая другую за независимое переменное, можно исключить третью с помощью уравнения (12) и определить четвертую из уравнения (11) с двумя произвольными постоянными, считая в том числе и постоянное C.

Это семейство ∞^2 кривых при перемещении тетраэдра опишет семейство ∞^2 поверхностей (P), которое организует семейство ∞^4 плоских элементов в ∞^2 семейств по ∞^2 плоских элементов, касательных в своем центре к отдельным поверхностям (P_1). В силу коррелятивности соответствия нулевой системы комплекса, если точка P_1 лежит в плоскости элемента $\{P_2\}$, то и плоскость элемента $\{P_1\}$ проходит через центр P_2, а так как эти плоскости являются теперь касательными плоскостями поверхностей (P_1) и (P_2) в точках P_1 и P_2, то прямая P_1P_2 будет общей касательной поверхностей (P_1) и (P_2); иначе говоря, эти две поверхности служат фокальными поверхностями конгруэнции (P_1P_2).

Если в качестве семейства поверхностей (12) выбрать пучок плоскостей с осью N_3N_4

$$x_2 = \lambda x_1, \quad \lambda = \text{const},$$

то уравнение (11) будет иметь интегралом

$$x_4 = \mu x_3$$

— второй пучок плоскостей с осью M_1M_2. Их пересечением являются лучи линейной конгруэнции с директрисами M_1M_2, N_3N_4. Они-то и описывают ∞^2 расслояющих поверхностей (P). Все они — линейчатые и соответствуют своими прямолинейными образующими. Конгруэнции, фокальными поверхностями которых они служат, представляют собою конгруэнции W, и мы получаем систему Bianchi.

8. Допустим теперь, что поверхность L — развертывающаяся поверхность и ребро возврата описывается точкой A_1, а касательной плоскостью является плоскость $A_1A_2A_3$. Тогда внешние произведения точек (по Грассману) равны нулю

$$(dA_1, A_1, A_2) = 0, \quad (dA_2, A_1, A_2, A_3) = 0,$$

и уравнения (1) нам дадут

$$\omega_1^3 = \omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^4 = 0. \tag{13a}$$

Внося это в уравнения (3), получим

$$\omega_2^3\omega_3^1 = 0, \quad \omega_4^2\omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^3\omega_3^2 = 0.$$

Если $\omega_2^3 = 0$, то dA_2 тоже помещается на прямой A_1A_2; следовательно, $d(A_1A_2)$ пропорционально (A_1A_2), т. е. прямая A_1A_2 не двигается и поверхность L вырождается в прямую. Оставляя это в стороне, имеем

$$\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^2 = 0; \tag{13b}$$

следовательно,

$$(dA_3,\ A_3,\ A_4) = 0, \quad (dA_4,\ A_3,\ A_4,\ A_1) = 0.$$

Вторая поверхность L' тоже развертывающаяся, ее ребро возврата описывается точкой A_3, касательная плоскость совпадает с плоскостью $A_1A_3A_4$.

Пара кривых (A_1), (A_3) представляет одномерную аналогию конгруэнций W, которую отмечал еще Bianchi. Обе кривые расположены так, что прямая A_1A_3, соединяющая каждую пару соответствующих точек, является линией пересечения их соприкасающихся плоскостей.

Обратно, если соприкасающиеся плоскости, проведенные в соответствующих точках каждой из двух кривых, проходят через сходственную точку другой кривой, то развертывающиеся поверхности их касательных составляют расслояемую пару линейчатых поверхностей. Действительно, помещая вершины тетраэдра A_1, A_3 в пару соответствующих точек наших кривых, а вершины A_2, A_4 — в произвольные точки их касательных, мы сейчас же придем к уравнениям (13a) — (13b), откуда система уравнений (3) прямо следует.

Нетрудно заметить, что любые две кривые (M) и (N) расслояющих пару косых линейчатых поверхностей дают пример такой пары кривых — мы видели, что соприкасающаяся плоскость кривой (M) содержит весь луч N_3N_4, а следовательно, и точку N второй кривой и обратно. Две касательных $(M_1,\ xN_3 + N_4)$, $(N_3,\ zM_1 + M_2)$ описывают расслояемую пару развертывающихся поверхностей.

Следовательно, расслояемая пара косых линейчатых поверхностей (или, если угодно, конгруэнция W с линейчатыми фокальными поверхностями) несет ∞^2 расслояемых пар развертывающихся поверхностей.

Обратно, нетрудно показать, что всякая расслояемая пара развертывающихся поверхностей несет на себе сколько угодно расслояемых пар косых линейчатых поверхностей.

Выберем вершины A_1, A_3 в точках касания лучей A_1A_2, A_3A_4 с их ребрами возврата и положим

$$B_2 = \beta A_3 + A_4, \quad B_4 = \gamma A_1 + A_2.$$

Проективные движения тетраэдра $(A_1B_2A_3B_4)$ будут определяться компонентами

$$\begin{aligned}
&\tilde\omega_1^1 = \omega_1^1 - \gamma\omega_1^2, \ \tilde\omega_1^2 = \tilde\omega_1^3 = 0, \qquad \tilde\omega_1^4 = \omega_1^2,\\
&\tilde\omega_2^1 = \omega_4^1, \ \tilde\omega_2^2 = \omega_4^4 + \beta\omega_3^4, \ \tilde\omega_2^3 = B, \ \tilde\omega_2^4 = 0,\\
&\tilde\omega_3^1 = 0, \ \tilde\omega_3^2 = \omega_3^4, \ \tilde\omega_3^3 = \omega_3^3 - \beta\omega_3^4, \ \tilde\omega_3^4 = 0,\\
&\tilde\omega_4^1 = \Gamma, \ \tilde\omega_4^2 = 0, \ \tilde\omega_4^3 = \omega_2^3, \ \tilde\omega_4^4 = \gamma\omega_1^2 + \omega_2^2,
\end{aligned}$$

где

$$\left.\begin{aligned} B &= d\beta - \beta^2\omega_3^4 + \beta(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_4^3, \\ \Gamma &= d\gamma - \gamma^2\omega_1^2 + \gamma(\omega_1^1 - \omega_2^2) + \omega_2^1. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Требуя, чтобы компоненты $\tilde{\omega}_i^k$ удовлетворяли системе (3), т. е. чтобы косые линейчатые поверхности, описанные прямыми A_1B_2 и A_3B_4, составляли расслояемую пару, мы придем к единственному уравнению

$$\omega_1^2\Gamma - \omega_3^4 B = 0, \tag{15}$$

что и доказывает наше утверждение.

9. Нетрудно заметить, что в силу формул (13a) — (13b) уравнения (2*) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} dM &= M(\omega_1^1 + \mu\omega_2^1) + A_2\mu\omega_2^3, \\ dN &= N(\omega_3^3 + \nu\omega_4^3) + A_1\nu\omega_4^1. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Следовательно, касательные всех кривых (M) сходятся в точке A_2, а касательные всех кривых (N) — в точке A_1.

Линейный комплекс, имеющий касание 2-го порядка с двумя кривыми (M_1) и (M_2), которые соответствуют двум решениям μ_1 и μ_2 уравнения (2), попрежнему удовлетворяют условиям (7) n° 6.

В силу уравнений (16) первые два условия принимают вид

$$\sum c(M_1 A_3) = 0, \quad \sum c(M_2 A_3) = 0$$

или

$$\sum c(A_1 A_3) = 0, \quad \sum c(A_2 A_3) = 0.$$

На основании равенств (13b) вторые условия (7) дадут

$$\sum c(M_1 A_4) = 0, \quad \sum c(M_2 A_4) = 0$$

или

$$\sum c(A_1 A_4) = 0, \quad \sum c(A_2 A_4) = 0.$$

Наконец, третьи условия (7) приводят к единственному уравнению

$$\omega_2^3 \sum c(A_3 A_4) - \omega_4^1 \sum c(A_1 A_2) = 0$$

и мы получаем в местных координатах (x_i), (y_i) уравнение искомого комплекса в виде

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 + \frac{\omega_4^1}{\omega_2^3}(x_3 y_4 - x_4 y_3) = 0. \tag{17}$$

Он не зависит от параметра μ и является общим соприкасающимся линейным комплексом всех кривых (M) и (N).

Фундаментальная корреляция определяется комплексом

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 - \frac{\omega_4^1}{\omega_2^3}(x_3 y_4 - x_4 y_3) = 0. \tag{18}$$

Это же уравнение определяет в текущих местных координатах плоскость элемента с центром в точке (x_i).

Перемещения центра

$$P = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4$$

определяются с помощью формул (13a), (13b) дифференциалом

$$dP = A_1 \{dx_1 + \omega_1^1 x_1 + \omega_2^1 x_2 + \omega_4^1 x_4\} + A_2 \{dx_2 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 x_2\} +$$
$$+ A_3 \{dx_3 + \omega_2^3 x_2 + \omega_3^3 x_3 + \omega_4^3 x_4\} + A_4 \{dx_4 + \omega_3^4 x_3 + \omega_4^4 x_4\}.$$

Внося эти координаты dP в уравнение (18) вместо текущих координат y_i, получим условие, что поверхность (P) имеет плоскость (18) своей касательной плоскостью, в виде уравнения

$$x_1^2 \{d\mu - \mu^2 \omega_2^1 - \mu (\omega_1^1 - \omega_2^2) + \omega_1^2\} - \frac{\omega_4^1}{\omega_2^3} x_3^2 \{d\nu - \nu^2 \omega_4^3 - \nu (\omega_3^3 - \omega_4^4) + \omega_3^4\} = 0, \quad (19)$$

где

$$\mu = \frac{x_2}{x_1}, \qquad \nu = \frac{x_4}{x_3}.$$

Следовательно, если потребовать, чтобы линия, описывающая поверхность (P) лежала в плоскости $x_2 = \mu x_1$ и содержала точку M, т. е. μ удовлетворяло уравнению (2), то уравнение (19) покажет, что она вместе лежит в плоскости

$$x_4 = \nu x_3,$$

где ν является решением второго уравнения (2). Это будет прямая линия, соединяющая одну из точек M с одной из точек N.

Глава II

10. Переходим теперь к основному вопросу этой работы: можно ли включить произвольно заданную расслояемую пару линейчатых поверхностей в состав расслояемой пары конгруэнций?

Будем рассматривать сначала пару косых линейчатых поверхностей. Оставляя точки A_1, A_2 на луче A_1A_2 вполне произвольными, поместим точки A_3 и A_4 прямой A_3A_4 в точках ее пересечения с касательными плоскостями первой поверхности (A_1A_2) соответственно в точках A_1 и A_2. Тогда, очевидно,

$$\omega_1^4 = 0, \quad \omega_2^3 = 0. \qquad (20a)$$

При этом ω_1^3, ω_2^4 отличны от нуля, иначе поверхность (A_1A_2) будет развёртывающейся и точка A_1 или A_2 — точкой касания образующей A_1A_2 с ребром возврата.

Внося значения (20a) в уравнения (3), получим

$$\omega_4^1 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_1^3 \omega_3^1 - \omega_2^4 \omega_4^2 = 0. \qquad (20b)$$

Следовательно, при данном выборе вершин тетраэдра, расслояемая пара косых линейчатых поверхностей определяется системой уравнений (20a), (20b).

Пусть теперь ребра тетраэдра A_1A_2, A_3A_4 описывают две конгруэнции расслояемой пары. Проективные движения тетраэдра (A_i) зависят от двух параметров и определяются дифференциалами

$$dA_i = \Omega_i^1 A_1 + \Omega_i^2 A_2 + \Omega_i^3 A_3 + \Omega_i^4 A_4, \tag{21}$$

где Ω_i^k — линейные формы, от двух дифференциалов, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$(\Omega_i^k)' = [\Omega_i^\alpha \Omega_\alpha^k]. \tag{22}$$

В правой части выполнено суммирование по указателю $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Если точки

$$M = A_1 + \mu A_2, \quad N = A_3 + \nu A_4$$

описывают расслояющие поверхности пары, то касательные плоскости определяются точками M, A_3, A_4 или N, A_1, A_2; следовательно, равны нулю внешние произведения точек (определители)

$$(dM\, M\, A_3\, A_4) = 0, \quad (dN\, N\, A_1\, A_2) = 0,$$

или

$$\{A_2\, d\mu + A_1(\Omega_1^1 + \mu\Omega_2^1) + A_2(\Omega_1^2 + \mu\Omega_2^2),\ A_1 + \mu A_2,\ A_3,\ A_4\} = 0,$$
$$\{A_4\, d\nu + A_3(\Omega_3^3 + \nu\Omega_4^3) + A_4(\Omega_3^4 + \nu\Omega_4^4),\ A_3 + \nu A_4,\ A_1,\ A_2\} = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned} d\mu &= \mu^2\Omega_2^1 + \mu(\Omega_1^1 - \Omega_2^2) - \Omega_1^2, \\ d\nu &= \nu^2\Omega_4^3 + \nu(\Omega_3^3 - \Omega_4^4) - \Omega_3^4. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Это те же уравнения (2), которые определяли расслояющие кривые пары линейчатых поверхностей, но теперь они содержат два дифференциала независимых переменных, а потому, чтобы уравнения допускали ∞^1 решений, должны удовлетворяться условия интегрируемости.

Дифференцируя первое уравнение (23) внешним образом, получим

$$\mu^2[\Omega_2^\alpha\Omega_\alpha^1] + \mu\{[\Omega_1^\alpha\Omega_\alpha^1] - [\Omega_2^\alpha\Omega_\alpha^2]\} - [\Omega_1^\alpha\Omega_\alpha^2] +$$
$$+ [\mu^2\Omega_2^1 + \mu(\Omega_1^1 - \Omega_2^2) - \Omega_1^2,\ 2\mu\Omega_2^1 + \Omega_1^1 - \Omega_2^2] = 0,$$

или

$$\mu^2\{[\Omega_2^\alpha\Omega_\alpha^1] + [\Omega_1^1 - \Omega_2^2,\ \Omega_2^1]\} + \mu\{[\Omega_1^\alpha\Omega_\alpha^1] - [\Omega_2^\alpha\Omega_\alpha^2] - 2[\Omega_1^2\Omega_2^1]\} -$$
$$- [\Omega_1^\alpha\Omega_\alpha^2] - [\Omega_1^2,\ \Omega_1^1 - \Omega_2^2] = 0,$$

или

$$\mu^2\{[\Omega_2^3\Omega_3^1] + [\Omega_2^4\Omega_4^1]\} + \mu\{[\Omega_1^3\Omega_3^1] + [\Omega_1^4\Omega_4^1] - [\Omega_2^3\Omega_3^2] - [\Omega_2^4\Omega_4^2]\} -$$
$$- [\Omega_1^3\Omega_3^2] - [\Omega_1^4\Omega_4^2] = 0. \tag{24a}$$

Аналогично второе уравнение (23) дает

$$\nu^2\{[\Omega_4^1\Omega_1^3] + [\Omega_4^2\Omega_2^3]\} + \nu\{[\Omega_3^1\Omega_1^3] + [\Omega_3^2\Omega_2^3] - [\Omega_4^1\Omega_1^4] - [\Omega_4^2\Omega_2^4]\} -$$
$$- [\Omega_3^1\Omega_1^4] - [\Omega_3^2\Omega_2^4] = 0. \tag{24b}$$

Чтобы уравнение (21) допускало решение с произвольным постоянным, необходимо и достаточно, чтобы уравнения (24a), (24b) удовлетворялись относительно μ и ν тождественно, т. е. чтобы коэффициенты при

степенях μ и ν обращались в нуль. Таким образом, мы приходим к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &[\Omega^3_2\Omega^1_3]+[\Omega^4_2\Omega^1_4]=0, \quad [\Omega^2_3\Omega^4_2]+[\Omega^1_3\Omega^4_1]=0,\\ &[\Omega^3_1\Omega^2_3]+[\Omega^4_1\Omega^2_4]=0, \quad [\Omega^1_4\Omega^3_1]+[\Omega^2_4\Omega^3_2]=0,\\ &[\Omega^3_1\Omega^1_3]-[\Omega^4_2\Omega^2_4]=0, \quad [\Omega^4_1\Omega^1_4]-[\Omega^3_2\Omega^2_3]=0. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Допустим теперь, что луч A_1A_2 имеет два фокуса; совместим с ними вершины тетраэдра A_1, A_2, а фокальные плоскости выберем за плоскости $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$. Тогда плоскость $A_1A_2A_3$ будет касательной плоскостью фокальной поверхности (A_1), а плоскость $A_1A_2A_4$ будет иметь такое же значение для поверхности (A_2). Следовательно,

$$(dA_1\,A_1\,A_2\,A_3)=0, \quad (dA_2\,A_1\,A_2\,A_4)=0$$

или в силу (21)

$$\Omega^4_1=0, \quad \Omega^3_2=0. \qquad (26a)$$

С другой стороны, формы Ω^3_1, Ω^4_2 теперь должны быть линейно независимы, иначе дифференциал

$$d(A_1\,A_2)=(A_1\,A_2)(\Omega^1_1+\Omega^2_2)+(A_3\,A_2)\,\Omega^3_1+(A_1\,A_4)\,\Omega^4_2$$

зависел бы только от одной независимой формы и луч описывал бы не конгруэнцию, а поверхность, что мы исключаем.

Внося значения (26a) в первые четыре уравнения (25), получим

$$[\Omega^1_4\Omega^4_2]=0, \quad [\Omega^1_4\Omega^3_1]=0, \quad [\Omega^2_3\Omega^4_2]=0, \quad [\Omega^2_3\Omega^3_1]=0,$$

откуда

$$\Omega^1_4=0, \quad \Omega^2_3=0. \qquad (26b)$$

Последние два уравнения (25) дают только одно независимое соотношение

$$[\Omega^3_1\Omega^1_3]-[\Omega^4_2\Omega^2_4]=0. \qquad (27a)$$

Наконец, дифференцируя внешним образом уравнения (26a), (26b), получим систему

$$\left.\begin{aligned} &[\Omega^2_1\Omega^4_2]+[\Omega^3_1\Omega^4_3]=0, \quad [\Omega^1_2\Omega^3_1]+[\Omega^4_2\Omega^3_4]=0,\\ &[\Omega^2_4\Omega^1_2]+[\Omega^3_4\Omega^1_3]=0, \quad [\Omega^1_3\Omega^2_1]+[\Omega^4_3\Omega^2_4]=0. \end{aligned}\right\} \qquad (27b)$$

Уравнения (26a), (26b), (27a), (27b) определяют расслояемую пару конгруэнций.

11. Задача включения расслояемой пары линейчатых поверхностей в состав расслояемой пары конгруэнций сводится к построению решения системы (26a) — (26b), (27a) — (27b), которое при некотором добавочном уравнении, наложенном на независимые переменные, совпадало бы с заданным решением системы (20a) — (20b). Согласно основной теореме Cartan'a [(1), p. 366], через всякое интегральное многообразие (не особое) $\mathfrak{M}_p$ числа измерений p проходит по крайней мере одно интегральное многообразие $\mathfrak{M}_{p+1}$ числа измерений $p+1$, если каждый интегральный элемент (не особый) $\mathcal{E}_p$ многообразия $\mathfrak{M}_p$ принадлежит хотя бы одному интегральному элементу $\mathcal{E}_{p+1}$ числа измерений $p+1$.

При этом многообразие $\mathfrak{M}_{p+1}$ — единственное, если через интегральный элемент $\mathcal{E}_p$ проходит только один интегральный элемент $\mathcal{E}_{p+1}$; многообразие $\mathfrak{M}_{p+1}$ зависит от ρ произвольных функций от $p+1$ аргументов, если семейство интегральных элементов $\mathcal{E}_{p+1}$, проходящих через любой интегральный элемент $\mathcal{E}_p$, зависит от ρ параметров.

В этой теореме существенно, чтобы рассматриваемый интегральный элемент $\mathcal{E}_p^0$, касательный к многообразию $\mathfrak{M}_p$, был не особым, т. е. чтобы через элемент $\mathcal{E}_p^0$ проходило не больше интегральных элементов $\mathcal{E}_{p+1}$, чем через любой соседний элемент $\mathcal{E}_p$, отличающийся от него на бесконечно малые приращения его координат.

Расслояемая пара конгруэнций определяется системой, содержащей уравнения Пфаффа (26a) — (26b) и квадратичные уравнения (27a) — (27b), которые включают в себе и все внешние производные от уравнений (26a) — (26b). Интегральный элемент первого порядка $\mathcal{E}_1$ определяется уравнениями (26a) — (26b). Принимая линейно независимые формы Ω_1^3, Ω_2^4 за формы, определяющие дифференциалы независимых переменных и, следовательно, задаваясь произвольными числовыми значениями их в произвольно заданной точке, мы должны положить, согласно уравнениям (26a) — (26b),

$$\Omega_1^4 = \Omega_2^3 = \Omega_4^1 = \Omega_3^2 = 0.$$

Произвольные числовые значения остальных форм, содержащихся в нашей системе,

$$\Omega_1^2,\ \Omega_2^1,\ \Omega_3^1,\ \Omega_3^4,\ \Omega_4^2,\ \Omega_4^3$$

составят 6 произвольных параметров, от которых зависит интегральный линейный элемент $\mathcal{E}_1$ нашей задачи.

С другой стороны, интегральный элемент (конечно, первого порядка) системы (20a) — (20b), определяющей расслояемую пару линейчатых поверхностей, задается значениями

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = 0$$

и произвольными значениями остальных форм ω_i^k, подчиненных единственному условию

$$\omega_1^3\omega_3^1 - \omega_2^4\omega_4^2 = 0. \qquad (28)$$

Любое интегральное многообразие $\mathfrak{M}_1$ системы (20a) — (20b) имеет такой элемент своим касательным элементом. Нетрудно заметить, что его можно принять за интегральный элемент $\mathcal{E}_1^0$ первого порядка системы (26a) — (26b); (27a) — (27b), а следовательно, многообразие $\mathfrak{M}_1$ — за интегральное многообразие этой системы.

12. Однако такой интегральный элемент $\mathcal{E}_1^0$, как легко видеть, будет особым элементом для системы (26a) — (26b), (27a) — (27b). Действительно, обозначим через

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_4^1 = \omega_3^2 = 0, \quad \omega_i^k$$

числовые значения этих форм, определяющие элемент. Они удовлетворяют условию (28). Обозначим через π_i^k числовые значения таких же форм, определяющие другой линейный элемент $\mathcal{E}_1^1$, который вместе с

элементом $\mathcal{E}_1^0$ образует интегральный элемент второго порядка $\mathcal{E}_2$, содержащий в себе $\mathcal{E}_1^0$.

Уравнения (26a) — (26b), (27a) — (27b) накладывают на величины π_i^k условие

$$\left.\begin{aligned}
&\pi_1^4=\pi_2^3=\pi_4^1=\pi_3^2=0,\\
&\pi_1^3\omega_3^1-\pi_3^1\omega_1^3-\pi_2^4\omega_4^2+\pi_4^2\omega_2^4=0,\\
&\pi_1^3\omega_3^4-\pi_3^4\omega_1^3-\pi_2^4\omega_1^2+\pi_1^2\omega_2^4=0,\\
&\pi_1^3\omega_2^1-\pi_2^1\omega_1^3-\pi_2^4\omega_4^3+\pi_4^3\omega_2^4=0,\\
&\pi_3^1\omega_4^3-\pi_4^3\omega_3^1-\pi_4^2\omega_2^1+\pi_2^1\omega_4^2=0,\\
&\pi_3^1\omega_1^2-\pi_1^2\omega_3^1-\pi_4^2\omega_3^4+\pi_3^4\omega_4^2=0.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Величины π_1^3, π_2^4 мы должны считать произвольно заданными, при единственном условии, чтобы они не были пропорциональны ω_1^3, ω_2^4, ибо через них линейно выражаются дифференциалы независимых переменных. Так как по этим же основаниям ω_1^3, ω_2^4 не могут одновременно равняться нулю, то можно считать ω_1^3 отличным от нуля и приписать ему значение

$$\omega_1^3=1.$$

Тогда первые три уравнения (29) определят π_3^1, π_3^4 и π_2^1:

$$\left.\begin{aligned}
\pi_3^1&=\pi_4^2\omega_2^4+\pi_1^3\omega_3^1-\pi_2^4\omega_4^2,\\
\pi_3^4&=\pi_1^2\omega_2^4+\pi_1^3\omega_3^4-\pi_2^4\omega_1^2,\\
\pi_2^1&=\pi_4^3\omega_2^4+\pi_1^3\omega_2^1-\pi_2^4\omega_4^3.
\end{aligned}\right\} \tag{30a}$$

Вносся эти значения в остальные уравнения (29), получим

$$\left.\begin{aligned}
\pi_4^2(\omega_4^3\omega_2^4-\omega_2^1)+\pi_4^3(\omega_4^2\omega_2^4-\omega_3^1)&=-\pi_1^3(\omega_4^2\omega_2^1+\omega_4^3\omega_3^1)+2\pi_2^4\omega_4^2\omega_4^3,\\
\pi_4^2(\omega_1^2\omega_2^4-\omega_3^4)+\pi_1^2(\omega_4^2\omega_2^4-\omega_3^1)&=-\pi_1^3(\omega_3^4\omega_4^2+\omega_3^1\omega_1^2)+2\pi_2^4\omega_1^2\omega_4^2.
\end{aligned}\right\} \tag{30b}$$

Для произвольного линейного элемента $\mathcal{E}_1(\omega_i^k)$, если

$$\omega_4^2\omega_2^4-\omega_3^1 \neq 0,$$

уравнения (30b) определят π_4^3, π_1^2, если задать произвольно π_4^2 и, следовательно, второй линейный элемент $\mathcal{E}_1(\pi_i^k)$, а вместе с ним и интегральный элемент второго порядка $\mathcal{E}_2$, содержащий в себе $\mathcal{E}_1^0$, будет определен с одним произвольным параметром.

Однако уравнение (28), имеющее место для нашего элемента $\mathcal{E}_1^0(\omega_i^k)$, приводит как раз к исключительному случаю. Уравнения (30b) теперь не будут содержать величин π_4^3, π_1^2. Исключая неизвестное π_4^2, мы придем к уравнению, связывающему π_1^3, π_2^4, т. е. дифференциалы независимых переменных

$$\omega_4^2(\omega_1^2\omega_2^1-\omega_3^4\omega_4^3)\ (\pi_1^4\omega_2^4+\pi_2^4)=0, \tag{31}$$

если только оно не исчезает тождественно, и тогда линейный элемент $\mathcal{E}_1(\pi_i^k)$, а вместе с ним и элемент второго порядка $\mathcal{E}_2$, содержащий $\mathcal{E}_1^0$, будет зависеть от двух произвольных параметров, а именно числовых значений π_4^3 и π_1^2. Таким образом, интегральный элемент $\mathcal{E}_1^0$, касательный к интегральному многообразию $\mathfrak{M}_1$, представленному расслояемой парой линейчатых поверхностей, является особым интегральным эле-

ментом системы (26а) — (26b), (27а) — (27b), к которому цитированная выше теорема Картана неприменима. Мы можем высказать только необходимое условие существования пары конгруэнций, включающей данную пару поверхностей. Оно выражается равенством

$$\omega_1^2\omega_2^1 - \omega_3^4\omega_4^3 = 0 \tag{32}$$

и касается положения точек M_1, M_2 на наших лучах M_1M_3 и M_2M_4. В дальнейшем нам придется войти в подробности для доказательства существования интегрального многообразия $\mathfrak{M}_2$, построенного на том интегральном многообразии $\mathfrak{M}_1$ нашей системы, которое представлено расслояемой парой линейчатых поверхностей.

13. Прежде всего надо установить те переменные, которые ищутся при решении системы (26а) — (26b), (27а) — (27b). Как известно, Картан рекомендует рассмотреть проективное движение наиболее общего тетраэдра в пространстве. Выражая компоненты Ω_i^k через 16 координат вершин тетраэдра, мы заведомо удовлетворим всем уравнениям структуры

$$(\Omega_i^k)' = [\Omega_i^\alpha \Omega_\alpha^k].$$

С другой стороны, приравняв нулю все встречающиеся в уравнениях (26а) — (26b), (27а) — (27b) формы Ω_i^k, мы получим вполне интегрируемую систему, ибо, как легко проверить, внешние производные всех Ω_i^k обращаются в нуль в силу уравнений самой системы. Интегралы этих уравнений и составят те переменные (в наименьшем числе), которые будут служить независимыми переменными и неизвестными функциями нашей задачи. Нетрудно заметить, что в нашем случае такими переменными будут просто неоднородные координаты вершин тетраэдра.

Нам придется, однако, отказаться от этого метода в виду некоторой сложности выкладок. Чтобы упростить запись, мы дополним нашу систему уравнениями структуры и примем в качестве неизвестных функций компоненты π_i^k, точнее говоря, коэффициенты l_i^k в их представлении через дифференциал независимого переменного

$$\pi_i^k = l_i^k\,dv.$$

При этом надо позаботиться об устранении переменных величин, несущественных для нашей задачи, чтобы не вводить в решение произвольных функций, не изменяющих расслояемой пары конгруэнций.

С этой целью мы прежде всего используем нормирование вершин A_i тетраэдра так, чтобы привести к нулю компоненты как в линейном элементе, касательном к решению, определяющему выбранную пару линейчатых поверхностей, так и в первом интегральном линейном элементе $\mathcal{E}_1(\omega)$ пары конгруэнций.

Так как интегральный элемент второго порядка $\mathcal{E}_2$ системы (27а) — (27b) содержит все линейные элементы пучка, построенного на элементах $\mathcal{E}_1^0(\omega)$ и $\mathcal{E}_1(\pi)$, и любой из линейных элементов этого пучка может быть принят за элемент $\mathcal{E}_1(\pi)$, то можно воспользоваться этим, чтобы привести к нулю одну из переменных l_i^k, для которой соответ-

ствующая переменная λ_i^k отлична от нуля. Так как ω_1^3 мы считаем не равным нулю, то положим

$$l_1^3 = 0.$$

Итак, будем искать компоненты двух интегральных линейных элементов системы (27a) — (27b) или, лучше, компоненты двух проективных перемещений тетраэдра.

Компоненты первого перемещения $\mathcal{E}_1(\omega)$ будут

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1^4 = \omega_2^3 = \omega_3^2 = \omega_4^1 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0,\\ &\omega_i^k = \lambda_i^k \alpha\, du,\ \omega_1^3 = \alpha\, du, \end{aligned}\right\} \qquad (\omega)$$

причем λ_i^k связаны уравнениями

$$\lambda_3^1 = \lambda_2^4 \lambda_4^2, \quad \lambda_1^2 \lambda_2^1 = \lambda_3^4 \lambda_4^3. \qquad (33)$$

Последнее вытекает из необходимости удовлетворить уравнение (32).

Компоненты второго перемещения $\mathcal{E}_1(\pi)$ будут

$$\pi_1^4 = \pi_2^3 = \pi_3^2 = \pi_4^1 = 0, \quad \pi_1^3 = 0, \quad \pi_i^k = l_i^k\, dv. \qquad (\pi)$$

Для $v = 0$ линейный элемент $\mathcal{E}_1(\omega)$ должен совпадать с линейным элементом пары поверхностей, т. е. все λ_i^k будут известными функциями от переменного u, а функция α обратится в единицу.

Кроме того, умножая точки A_i на подходящие функции одного v, мы не нарушим равенств $\lambda_i^i = 0$ и можем привести к нулю для $u = 0$ величины

$$l_1^1 = l_2^2 = l_3^3 = l_4^4 = 0.$$

Теперь уравнения (30a) — (30b), (33) дадут все конечные уравнения для переменных λ_i^k, l_i^k.

Вводя новые переменные x, y, z, а также ρ, мы представим их в вид

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_3^1 = \lambda_2^4 \lambda_4^2,\ \lambda_2^1 = \lambda_4^3 \rho,\ \lambda_1^2 = \frac{\lambda_3^4}{\rho},\\ &l_1^2 = y,\ l_4^3 = z,\\ &l_4^2 = 2x\lambda_4^2,\ l_2^4 = x(\lambda_2^4 - \rho),\ l_3^1 = x\lambda_4^2(\lambda_2^4 + \rho),\\ &l_3^4 = y\lambda_2^4 + x\frac{\lambda_3^4}{\rho}(\rho - \lambda_2^4),\\ &l_2^1 = z\lambda_2^4 + x\lambda_4^3(\rho - \lambda_2^4). \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Остаются уравнения структуры, которые после внесения компонент (ω) и (π) примут с помощью формул (34) следующий вид (члены, не содержащие производных, опущены):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \ln \alpha}{\partial v} = l_1^1 - l_3^3,\\ &\frac{\partial \ln \lambda_4^2}{\partial v} = 2\frac{\lambda_4^2}{\alpha}\frac{\partial x}{\partial u} + 2\frac{x}{\alpha}\frac{\partial \lambda_4^2}{\partial u} + \dots\\ &\frac{\partial \lambda_2^4}{\partial v} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial x}{\partial u}(\rho - \lambda_2^4) + \frac{x}{\alpha}\frac{\partial \lambda_2^4}{\partial u} - \frac{x}{\alpha}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \dots\\ &\frac{\partial \lambda_4^3}{\partial v} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial z}{\partial u} + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda_3^4}{\partial v}=\frac{\lambda_2^4}{\alpha}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\lambda_3^4}{\alpha\rho}(\rho-\lambda_2^4)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{1}{\alpha}\left(y-\frac{x\lambda_3^4}{\rho}\right)\frac{\partial\lambda_2^4}{\partial u}+\\
&\qquad+\frac{x}{\alpha\rho}(\rho-\lambda_2^4)\frac{\partial\lambda_3^4}{\partial u}+\frac{x}{\alpha}\frac{\lambda_3^4\lambda_2^4}{\rho^2}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\ldots,\\
&\frac{\partial\rho}{\partial v}=\frac{\rho-\lambda_2^4}{\alpha}\left[-\frac{\rho}{\lambda_3^4}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}+x\frac{\partial\ln\lambda_3^4}{\partial u}\right]+\\
&\qquad+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\lambda_2^4}{\partial u}\left(\frac{\rho y}{\lambda_3^4}-x\right)+\frac{x\lambda_2^4}{\alpha\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\ldots,\\
&\frac{\partial z}{\partial u}(\rho-\lambda_2^4)=(\rho-\lambda_2^4)\left[\frac{\lambda_4^3\rho}{\lambda_3^4}\frac{\partial y}{\partial u}-x\lambda_4^3\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\lambda_3^4\rho}{\lambda_4^3}\right]+\\
&\qquad\qquad+\left(z-\frac{y\rho\lambda_4^3}{\lambda_3^4}\right)\frac{\partial\lambda_2^4}{\partial u}+\ldots,\\
&\frac{\partial x}{\partial u}(\rho-\lambda_2^4)=-(\rho-\lambda_2^4)\frac{x}{2}\frac{\partial\ln\lambda_4^2}{\partial u}-x\frac{\partial\rho}{\partial u}+\ldots,\\
&\frac{\partial l_i^j}{\partial u}=\ldots
\end{aligned}
\right\}
\tag{35}
$$

14. Если $\rho-\lambda_2^4$ не равно нулю, то система — ортономная (по терминологии Riquier), т. е. при подходящей системе помет (coles), присвоенных переменным, при условии что помета производной равна сумме помет функции и тех независимых переменных, по которым она дифференцируется, производные, стоящие в левой части каждого уравнения, будут иметь в каждой из первых серий пометы не ниже, чем производные в правой части того же уравнения, пока не найдется такая серия, где они станут выше их. При этом пометы назависимых переменных в первой серии все равны единице, а все другие этой серии и все пометы других серий — произвольно подобранные целые числа.

Действительно, присваивая последовательно две серии помет

№	u	v	α	λ_i^k	ρ	x	y	z
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	2	0	1	1	2	1	2

мы получим для производных пометы

№	$\frac{\partial\alpha}{\partial v}$	$\frac{\partial\lambda_i^k}{\partial v}$	$\frac{\partial\rho}{\partial v}$	$\frac{\partial\lambda_i^k}{\partial u}$	$\frac{\partial\rho}{\partial u}$	$\frac{\partial x}{\partial u}$	$\frac{\partial y}{\partial u}$	$\frac{\partial z}{\partial u}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	1	1	2	1	2

очевидно, удовлетворяющие требованиям ортономности.

Система (35) — полная и пассивная (вполне интегрируемая) по терминологии Riquier, ибо каждая функция фигурирует в левой части уравнения не более одного раза.

15. Если назвать м о н о м о м, соответствующим неизвестной функции, один или несколько одночленов M, содержащих те буквы, по которым она дифференцируется в производной, стоящей в левой части уравнения, и со степенями, равными порядкам дифференцирования, то м н о ж и-

телями (variables multiplicatrices) такого монома будут называться те буквы, по которым можно дифференцировать эту производную, не рискуя встретить такой производной в левой части другого уравнения. Дополнительным мономом N^i будет называться один или несколько одночленов, которые содержат те же степени, что и моном M, всех букв, номер которых выше i и недостающие (в ряде мономов M с теми же степенями старшей буквы) степени буквы за номером i; наконец, множителями дополнительного монома N^i — все буквы с номером меньше i и те буквы с номером выше i, которые являются множителями соответствующих мономов* M.

Согласно этой терминологии, полная пассивная система в силу основной теоремы Riquier допускает одно и только одно решение, притом такое, что каждая из дополнительных производных (соответствующих дополнительному моному) сводится к произвольной регулярной функции, когда ее переменные, не являющиеся множителями дополнительного монома, принимают начальные значения, а неизвестная функция, производной которой нет в левых частях уравнений, вообще остается произвольной.

В нашем случае мы имеем:

Неизвестные функции	Их мономы M	Их множители	Мономы N^i дополнительные	Множители N^i
α, λ_i^k, ρ_i	v	v, u	1	u
x, z, l_i	u	u, v	1	v
y	—	—		

Следовательно, система (35) имеет решение и только одно, если задать

1° y, как произвольную функцию двух переменных u, v;

2° α, λ_i^k, ρ, как произвольные функции одного u для $v=0$;

3° x, z, l_i^i, как произвольные функции одного v для $u=0$.

Таким образом, можно потребовать, чтобы α, λ_i^k, ρ приняли для $v=0$ те самые значения, которые определяют расслояемую пару поверхностей, а так как к нашей системе можно присоединить уравнения (1), определяющие для произвольных u, v расслояемую пару конгруэнций, а для $v=0$ расслояемую пару наших линейчатых поверхностей, то задачу о включении пары нелинейчатых поверхностей в пару конгруэнций следует считать разрешенной.

---

* Точнее: производной $\dfrac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} u}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}$ соответствует моном $M_a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$; переменная x_i есть его множитель, если среди всех остальных мономов с теми же степенями $\gamma = x_{i+1}^{a_{i+1}} \dots x_n^{a_n}$ нет ни одного со степенью $x_i^{a_i}$ или выше; моном N^i, дополнительный к M_a, содержит целиком произведение γ на x_i^{β}, где β ниже наивысшего показателя a_i среди всех мономов M с произведением γ и не равно ни одному показателю a_i этих мономов; наконец, множителем дополнительного монома N_i является каждое из переменных $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ и те из переменных $x_{i+1}, \dots, x_n$, которые служат множителями мономов M_a.

Широта решения зависит от одной произвольной функции двух аргументов, именно от произвольно заданной функции y. Если y дано, то решение зависит от задания x и z как функции одного v для $u=0$.

По условию все l_i^i для $u=0$ должны обращаться в нуль.

16. Предыдущие рассуждения показывают, что расслояемая пара линейчатых поверхностей может быть продолжена в пару конгруэнций, если компоненты тетраэдра удовлетворяют дополнительному условию (32):

$$\omega_1^2\omega_2^1 - \omega_3^4\omega_4^3 = 0.$$

Геометрический смысл его весьма прост. Нетрудно заметить, что оно получается из условия (28):

$$\omega_1^3\omega_3^1 - \omega_2^4\omega_4^2 = 0,$$

если поменять местами указатели 2 и 3. Так как уравнение (28) определяло расслояемость пары поверхностей (A_1A_2), (A_3A_4), то условие (32) требует, чтобы поверхности, описываемые прямыми A_1A_3 и A_2A_4, тоже образовали расслояемую пару.

Таким образом, фокусы расслояемых конгруэнций помещаются в таких точках A_1, A_2, A_3, A_4 наших образующих, что не только лучи конгруэнций A_1A_2 и A_3A_4 вдоль одной асимптотической расслояющих поверхностей образуют расслояемую пару линейчатых поверхностей, но и те прямые, которые соединяют соответствующие фокусы обеих конгруэнций, если их собрать вдоль такой асимптотической, составят новую расслояемую пару поверхностей.

Нетрудно показать, что условие (32) не налагает ограничения на расслояемую пару линейчатых поверхностей. Если, сохраняя точки A_1 и A_3, мы передвинем точки A_2 и A_4 по лучам A_1A_2, A_3A_4 в новое положение

$$\bar{A}_2 = A_2 + \lambda A_1, \quad \bar{A}_4 = A_4 + \mu A_3,$$

то компоненты ω_i^k тетраэдра (для $i \gtrless k$) не изменятся, кроме

$$\bar{\omega}_2^1 = \omega_2^1 + \lambda(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \lambda^2\omega_1^2 + d\lambda,$$
$$\bar{\omega}_2^3 = \lambda\omega_1^3 - \mu\omega_2^4, \quad \bar{\omega}_4^1 = \mu\omega_3^1 - \lambda\omega_4^2,$$
$$\bar{\omega}_4^3 = \omega_4^3 + \mu(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \mu^2\omega_3^4 + d\mu\,.$$

Налагая на них условия (20a) — (20b), получим два уравнения

$$\lambda\omega_1^3 - \mu\omega_2^4 = 0, \quad \mu\omega_3^1 - \lambda\omega_4^2 = 0, \tag{36a}$$

которые в силу уравнения (28) сведутся к одному уравнению, определяющему отношение $\lambda : \mu$.

Условие (32) наложит новые требования

$$\omega_1^2\,[d\lambda + \lambda(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \lambda^2\omega_1^2] = \omega_3^4\,[d\mu + \mu(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \mu^2\omega_3^4]. \tag{36b}$$

Уравнения (36a) — (36b) определят λ и μ с произвольным постоянным. Следовательно, у произвольно заданной расслояемой пары косых

линейчатых поверхностей можно по произволу выбрать линейчатую поверхность (A_1A_3) той конгруэнции W, для которой наши поверхности служат фокальными поверхностями, и тогда вся конгруэнция W разложится на ∞^1 линейчатых поверхностей; каждая пара составит снова расслояемую пару линейчатых поверхностей. Точки пересечения соответствующих образующих любой такой пары с образующими первоначальной пары могут служить фокусами конгруэнций при продолжении той или другой пары поверхностей в пару конгруэнций.

17. При продолжении одномерной пары (пары поверхностей) в двумерную (пару конгруэнций) мы получим различные продолжения, смотря по тому, из какой пары поверхностей, описанных противоположными сторонами косого четыреугольника, мы будем исходить. Естественно поставить вопрос о существовании расслояемой четверки, т. е. двух пар конгруэнций, описанных сторонами одного косого четыреугольника и содержащих в себе обе пары линейчатых поверхностей.

Условия расслояемости пары конгруэнций (A_1A_3), (A_2A_4) получатся, очевидно, из уравнений (26a) — (26b), (27a) — (27b), если поменять местами указатели 2 и 3. Уравнения (26a) — (26b) допускают такую замену, точно так же, как и уравнение (27b). Уравнение (27a) дает добавочное условие расслояемой четверки:

$$[\Omega_1^2\Omega_2^1] - [\Omega_3^4\Omega_4^3] = 0.$$

Внося сюда компоненты перемещений $\mathcal{E}_1(\omega)$ и $\mathcal{E}_1(\pi)$, пользуясь формулами (34), получим

$$(\rho - \lambda_2^4)\left\{\lambda_4^3 y + \lambda_3^4 \frac{z}{\rho} - 2x\frac{\lambda_3^4\lambda_4^3}{\rho}\right\} = 0,$$

и так как первый множитель не может равняться нулю без вырождений пары конгруэнций, то надо потребовать обращения в нуль второго множителя. Внося в уравнения (35)

$$y = 2\frac{\lambda_3^4}{\rho}x - \frac{\lambda_3^4}{\rho\lambda_4^3}z, \tag{37}$$

мы увидим, что наши уравнения попрежнему будут разрешаться относительно $\frac{\partial z}{\partial u}$. Система не потеряет свойства ортономности и пассивности и будет определять расслояемую четверку с двумя произвольными функциями одного аргумента, именно: для $u = 0$ можно по произволу задать значения x и z.

18. Иначе обстоит дело с требованием сопряженности расслояемой пары конгруэнций, содержащей данную пару поверхностей.

Пара конгруэнций сопряжена, если развертывающиеся поверхности конгруэнций пары соответствуют друг другу.

Луч A_1A_2 огибает линию (A_1) на фокальной поверхности, если произведение в смысле Грассмана трех точек равно нулю (т. е. равны нулю все миноры матрицы координат):

$$(dA_1\,A_1\,A_2) = 0.$$

В силу (26а) это равносильно условию

$$\Omega_1^3 = 0.$$

Аналогично, развертывающаяся поверхность конгруэнции $(A_3 A_4)$ с ребром возврата на фокальной поверхности (A_3) определяется уравнением

$$\Omega_3^1 = 0.$$

Обе поверхности соответствуют друг другу, если формы линейно зависимы, т. е. если

$$[\Omega_1^3 \Omega_3^1] = 0.$$

В силу (27а) отсюда следует

$$[\Omega_2^4 \Omega_4^2] = 0,$$

т. е. второе семейство развертывающихся поверхностей конгруэнции $(A_1 A_2)$ соответствует развертывающимся поверхностям конгруэнции $(A_3 A_4)$ с ребрами возврата на другой фокальной поверхности (A_4).

Внося сюда компоненты перемещений $\mathscr{E}_1(\omega)$, $\mathscr{E}_1(\pi)$, мы получим дополнительное условие сопряженности пары конгруэнций в виде

$$\alpha x \lambda_4^2 (\lambda_2^4 + \rho) = 0$$

или, устраняя те множители, обращение которых в нуль приводит к вырождению конгруэнций,

$$\lambda_2^4 + \rho = 0. \tag{38}$$

Это уравнение надо присоединить к нашей системе (34), (35).

Однако, это уравнение накладывает новое условие на компоненты линейного элемента $\mathscr{E}_1^0(\omega)$, т. е. на заданную пару линейчатых поверхностей.

Произвольную пару линейчатых поверхностей нельзя продолжить в сопряженную пару конгруэнций.

Если для $v = 0$ условие (38) удовлетворено, то искать сопряженную пару среди пар, охватывающих пару поверхностей, можно. Внося λ_2^4 по формуле (38) в уравнения (35), получим (если $\rho \neq 0$)

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 2\frac{\lambda_3^4}{\rho}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{x}{\rho}\frac{\partial \lambda_3^4}{\partial u} + \left(\frac{x\lambda_3^4}{\rho} - \frac{1}{2}y\right)\frac{\partial \ln \rho}{\partial u} + \ldots$$

Система не потеряет свойства ортономности и пассивности и будет определять пару сопряженных конгруэнций, проходящую через заданную пару поверхностей, с двумя произвольными функциями одного аргумента, например, значениями x и z для $u = 0$, если для $u = 0$ значения y привести к единице соответствующим выбором параметра.

19. Если уравнения (37) и (38) имеют место одновременно, то построенная двумерная пара будет расслояемой четверкой, у которой одна пара конгруэнций сопряженная. Нетрудно заметить, что и другая пара будет тоже сопряжена. Действительно, новые условия соответствия развертывающихся поверхностей конгруэнций $(A_1 A_2)$ и $(A_3 A_4)$ имеют вид

$$[\Omega_1^2 \Omega_2^1] = 0, \quad [\Omega_3^4 \Omega_4^3] = 0,$$

которые будут удовлетворять в силу уравнений (37), (38).

Глава III

20. Обратимся теперь к вопросу о включении в пару конгруэнций расслояемой пары развертывающихся поверхностей. Очевидно, такую пару можно включить только в пару параболических конгруэнций, ибо только здесь одно семейство линейчатых поверхностей конгруэнции, соответствующих асимптотическим линиям расслояющих поверхностей пары, состоит из развертывающихся поверхностей.

Итак, допустим, что конгруэнция (A_1A_2) расслояемой пары (A_1A_2), (A_3A_4) — параболическая и точка A_1 — единственный фокус луча A_1A_2, а плоскость $A_1A_2A_3$ — его фокальная плоскость

Так как $A_1A_2A_3$ одновременно касательная плоскость поверхности (A_1) и соприкасающаяся плоскость кривой (A_1), огибаемой лучом A_1A_2, которая теперь является асимптотической линией поверхности (A_1), то для всякого перемещения dA_1

$$(dA_1\, A_1\, A_2\, A_3) = 0,$$

откуда следует $\Omega_1^4 = 0$, и

$$(d^2A_1\, A_1\, A_2\, A_3) = 0 \ (\mathrm{mod}\ \Omega_1^3),$$

для перемещения касательного к лучу A_1A_2, т. е. при $\Omega_1^3 = 0$, но в таком случае второе уравнение равносильно условию

$$\Omega_1^2\, \Omega_2^4 = 0 \ (\mathrm{mod}\ \Omega_1^3).$$

Первый множитель не может обращаться в нуль, иначе точка A_1 при $\Omega_1^3 = 0$ осталась бы на месте и поверхность (A_1) вырождалась бы в линию.

Следовательно, Ω_2^4 линейно зависит от Ω_1^3. Итак, если a — множитель пропорциональности, то оба условия можно записать в виде

$$\Omega_1^4 = 0, \quad \Omega_2^4 = a\Omega_1^3,$$

а так как среди четырех форм Ω_1^3, Ω_1^4, Ω_2^3, Ω_2^4 по крайней мере две должны быть линейно независимы, иначе прямая A_1A_2 будет описывать не конгруэнцию, а линейчатую поверхность, то в нашем случае обе оставшиеся формы Ω_1^3 и Ω_2^3 линейно независимы.

Обращаясь к уравнениям (25), мы видим, что три из них дают

$$[\Omega_3^2\Omega_1^3] = 0, \quad [\Omega_3^2\,\Omega_2^3] = 0,$$

откуда

$$\Omega_3^2 = 0.$$

Остальные уравнения (25) имеют следующий вид:

$$[\Omega_2^3\,\Omega_3^1] + a\,[\Omega_1^3\,\Omega_4^1] = 0, \quad [\Omega_1^3\,\Omega_3^1] - a\,[\Omega_1^3\,\Omega_4^2] = 0, \quad [\Omega_2^3\,\Omega_4^2] + [\Omega_1^3\,\Omega_4^1] = 0.$$

Исключая $[\Omega_1^3\,\Omega_4^1]$, получим

$$[\Omega_1^3,\ \Omega_3^1 - a\Omega_4^2] = 0, \quad [\Omega_2^3,\ \Omega_3^1 - a\Omega_4^2] = 0.$$

Следовательно,

$$\Omega_3^1 = a\Omega_4^2.$$

Отсюда следует, что конгруэнция (A_3A_4)—тоже параболическая, точка A_3 — единственный фокус луча A_3A_4 и плоскость $A_3A_4A_1$ — его фокальная плоскость.

Дифференцируя внешним образом уравнения $\Omega_1^4 = 0$, $\Omega_3^2 = 0$, получим

$$[\Omega_1^3, \Omega_3^4 - a\Omega_1^2] = 0, \quad [\Omega_4^2, \Omega_3^4 - a\Omega_1^2] = 0.$$

Если Ω_1^3 и Ω_4^2 линейно независимы, то отсюда вытекает

$$\Omega_3^4 = a\Omega_1^2.$$

Так как $\Omega_1^2 = 0$ представляет собою уравнение линии, огибаемой лучом A_1A_3 на поверхности (A_1), а $\Omega_3^4 = 0$ уравнение такой же линии на поверхности (A_3), то наше предположение о независимости форм Ω_1^3 и Ω_4^2 приводит к вырождению конгруэнции (A_1A_3) в линейчатую поверхность, которая служит общей фокальной поверхностью обеих конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4), т. е. обе эти конгруэнции образованы касательными криволинейных асимптотических одной и той же линейчатой поверхности.

Пара конгруэнций определяется системой

$$\Omega_1^4 = \Omega_3^2 = 0, \quad \Omega_2^4 = a\Omega_1^3, \quad \Omega_3^4 = a\Omega_1^2, \quad \Omega_3^1 = a\Omega_4^2,$$
$$[\Omega_2^3 \Omega_4^2] + [\Omega_1^3 \Omega_4^1] = 0.$$

Оставляя этот случай пока в стороне, мы должны допустить, что

$$\Omega_4^2 = b\Omega_1^3.$$

Так как при этом уравнения $\Omega_1^3 = 0$, $\Omega_3^1 = 0$ равносильны, то развертывающиеся поверхности обеих конгруэнций пары соответствуют друг другу.

Итак, расслояемая пара параболических конгруэнций определяется системой

$$\Omega_1^4 = 0, \quad \Omega_3^2 = 0, \tag{39a}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_2^4 = a\Omega_1^3, \quad \Omega_4^2 = b\Omega_1^3, \quad \Omega_3^1 = ab\Omega_1^3, \\ &[\Omega_4^1 - b\Omega_2^3, \Omega_1^3] = 0, \quad [\Omega_3^4 - a\Omega_1^2, \Omega_1^3] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{39b}$$

Внешние производные их имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &[A\Omega_1^3] + [a\Omega_1^2 + \Omega_3^4, \Omega_2^3] = 0, \\ &[B\Omega_1^3] - [\Omega_4^1 + b\Omega_2^3, \Omega_1^2] = 0, \\ &[\Omega_4^1 + b\Omega_2^3, \Omega_3^4 + a\Omega_1^2] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{39c}$$

где

$$A = da + a(\Omega_1^1 - \Omega_2^2 - \Omega_3^3 + \Omega_4^4),$$

$$B = db + b(\Omega_1^1 + \Omega_2^2 - \Omega_3^3 - \Omega_4^4).$$

Здесь Ω_1^3, Ω_2^3 — линейно независимые формы, через которые могут быть выражены дифференциалы независимых переменных. Ω_1^4, Ω_3^2, Ω_2^4, Ω_4^2, Ω_3^1, Ω_4^1, Ω_3^4, Ω_1^2, A и B — те 10 форм, которые определяют дифференциалы восьми переменных, от которых зависит наша пара конгруэнций, и дифференциалы двух вспомогательных переменных a и b. Обращая в

нуль 10 перечисленных форм Ω_i^k, получим вполне интегрируемую систему, интегралы которой и будут переменными нашей задачи.

Система определяет пары параболических конгруэнций с пятью произвольными функциями одного аргумента.

21. С другой стороны (глава 1, § 8), при подходящем выборе тетраэдра отнесения пара линейчатых поверхностей (A_1A_2), (A_3A_4) определяется системой

$$\omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_4^2 = 0. \tag{40}$$

Требуется найти решение системы (39a) — (39c) такое, чтобы оно содержало заданное решение системы (40).

Всякое решение системы (40) определяется его интегральным линейным элементом $\mathscr{E}_1^0(\omega)$, т. е. точкой (числовые значения переменных) и системой чисел

$$\omega_1^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_4^2 = 0, \quad \omega_2^3 = 1, \quad \omega_i^k,$$

где опять формы ω_2^1, ω_4^3 остаются неопределенными, ввиду произвола в расположении вершин A_2 и A_4 на ребрах A_2A_1 и A_4A_3.

Нетрудно заметить, что линейный элемент $\mathscr{E}_1^0(\omega)$ является интегральным элементом первого порядка системы (39a) — (39c), который соответствует перемещению, определяемому уравнением $\Omega_1^3 = 0$. При этом формы A и B могут быть заданы произвольно.

Чтобы определить интегральный элемент второго порядка $\mathscr{E}_2$, содержащий элемент $\mathscr{E}_1^0(\omega)$, надо найти линейный элемент $\mathscr{E}_1(\pi)$, линейно независимый от первого (следовательно, со значением формы π_1^3, отличным от нуля), удовлетворяющий системе (39a) и находящийся в инволюции с элементом $\mathscr{E}_1^0(\omega)$, т. е. удовлетворяющий вместе с ним квадратичным уравнениям (39b), (39c).

Полагая $\pi_1^3 = 1$, получим из (39a)

$$\pi_1^4 = 0, \quad \pi_3^2 = 0, \quad \pi_1^3 = 1, \quad \pi_2^4 = a, \quad \pi_4^3 = b, \quad \pi_3^1 = ab.$$

Вносяy $\mathscr{E}_1^0(\omega)$ и $\mathscr{E}_1(\pi)$ в квадратичные уравнения (39b), (39c), получим

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_4^1 - b = 0, \quad \omega_3^4 - a\omega_1^2 = 0,\\
&A_1 + (a\omega_1^2 + \omega_3^4)\pi_2^3 - a\pi_1^2 - \pi_3^4 = 0,\\
&B_1 - (\omega_4^1 + b)\pi_1^2 + (\pi_4^1 + b\pi_2^3)\omega_1^2 = 0,\\
&(\omega_4^1 + b)(\pi_3^4 + a\pi_1^2) - (\omega_3^4 + a\omega_1^2)(\pi_4^1 + b\pi_2^3) = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

где A_1, B_1 — значение форм A, B в системе чисел первого линейного элемента $\mathscr{E}_1^0(\omega)$.

Так как числа ω_4^1, ω_3^4, ω_1^2 даны, то первые уравнения (41) определяют значения a, b. Остальные три уравнения определят π_1^2, π_3^4, π_4^1. Значения форм A, B останутся произвольными, в то время как для произвольного интегрального элемента $\mathscr{E}_1$ линейный элемент, находящийся с ним в инволюции, вполне определен.

Таким образом, линейный элемент $\mathscr{E}_1^0(\omega)$, как интегральный элемент системы (39a) — (39c), — особый, и теория Картана к нему не приложима.

22. Будем определять пару поверхностей и пару конгруэнций компонентами проективных движений связанных с ними тетраэдров.

Для тетраэдра пары поверхностей это будут компоненты линейного элемента $\mathcal{E}_1^0(\omega)$, для тетраэдра пары конгруэнций — компоненты двух линейных элементов $\mathcal{E}_1(\omega)$ и $\mathcal{E}_1(\pi)$, но теперь компоненты $\mathcal{E}_1^0(\omega)$ надо рассматривать, как функции переменного u, а компоненты $\mathcal{E}_1(\omega)$ и $\mathcal{E}_1(\pi)$, как функции двух переменных u и v. Компоненты элемента $\mathcal{E}_1(\omega)$:

$$\omega_1^4=0, \quad \omega_3^2=0, \quad \omega_1^3=0, \quad \omega_i^k=\lambda_i^k\,\alpha\,du, \quad \lambda_2^3=1. \tag{ω}$$

Компоненты элемента $\mathcal{E}_1(\pi)$:

$$\pi_1^4=0, \quad \pi_3^2=0, \quad \pi_2^3=0, \quad \pi_i^k=l_i^k\,x\,dv, \quad l_1^3=1. \tag{π}$$

При этом мы можем нормировать вершины A_i так, чтобы всюду

$$\lambda_1^1=\lambda_2^2=\lambda_3^3=\lambda_4^4=0$$

и, кроме того,

$$l_1^1=l_2^2=l_3^3=l_4^4 \quad \text{для} \quad u=0.$$

Затем мы можем ввести вместо A_2 и A_4 новые точки $A_2+\nu A_1$, $A_4+\mu A_3$ так, чтобы всюду

$$\lambda_2^1=\lambda_4^3=0$$

и, кроме того,

$$l_2^1=l_4^3=0 \quad \text{для} \quad u=0.$$

Все это и для тетраэдра поверхностей и для тетраэдра конгруэнций одновременно.

Затем можно выбрать параметры u и v так, чтобы, например,

$$\alpha=1 \quad \text{для} \quad u=0,$$

$$xl_2^4=1 \quad \text{для} \quad v=0.$$

Все функции λ_i^k для $u=0$ принимают те значения, которые они имеют для тетраэдра поверхностей; в частности, для $v=0$

$$\lambda_2^1=\lambda_4^2=0.$$

Чтобы не вводить новых неизвестных, обратимся к первоначальной системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega_1^4=0, \quad \Omega_3^2=0,\\
&[\Omega_2^4\,\Omega_4^3]=0, \quad [\Omega_2^3\,\Omega_3^1]+[\Omega_2^4\,\Omega_4^1]=0,\\
&[\Omega_1^3\,\Omega_3^1]-[\Omega_2^4\,\Omega_4^2]=0, \quad [\Omega_2^3\,\Omega_4^2]+[\Omega_1^3\,\Omega_4^1]=0,\\
&[\Omega_1^3\,\Omega_3^4]+[\Omega_1^2\,\Omega_2^4]=0, \quad [\Omega_4^2\,\Omega_3^4]+[\Omega_1^2\,\Omega_3^1]=0.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Внося сюда значения компонентов (ω) и (π), получим

$$\begin{aligned}
&\lambda_2^4=0,\\
&l_3^1-l_2^4\lambda_4^1=0, \quad \lambda_3^1-\lambda_4^2 l_2^4=0,\\
&l_4^2-\lambda_4^1=0, \quad \lambda_3^4-\lambda_1^2 l_2^4=0,\\
&\lambda_4^2 l_3^4-\lambda_3^1 l_1^2=0,
\end{aligned}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_2^4=0,\ l_3^1=l_2^4\lambda_4^1,\ l_4^2=\lambda_4^1,\ \lambda_3^1=\lambda_4^2 l_2^4,\\
&\lambda_3^4=\lambda_1^2 l_2^4,\ \lambda_4^2(l_3^4-l_2^4 l_1^2)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Последнее уравнение допускает две возможности, геометрический смысл которых мы уже отмечали выше.

Полагая первый множитель равным нулю, получим дважды взятую конгруэнцию касательных к асимптотическим линейчатой поверхности. Вводя вспомогательные неизвестные β, γ, φ, будем иметь

$$\lambda_2^4=\lambda_4^2=\lambda_3^1=\lambda_1^3=\lambda_2^1=\lambda_4^3=\lambda_1^4=\lambda_3^2=0,\ \ \lambda_i^i=0,\ \ \lambda_2^3=1,$$
$$\lambda_1^2=\beta,\ \ \lambda_4^1=\gamma,\ \ \lambda_3^4=\beta\varphi,\ \ l_2^3=0,\ \ l_1^3=1,$$
$$l_2^4=\varphi,\ l_4^2=\gamma,\ \ l_3^1=\gamma\varphi.$$

Уравнения структуры дадут дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v}=\alpha x\,(l_2^2-l_3^3),$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial v}=\frac{x}{\alpha}\,\frac{\partial l_1^2}{\partial u}-(l_1^2)^2\,x+\beta x\,(l_1^1-2l_2^2+l_3^3),$$
$$\frac{\partial \gamma}{\partial v}=\frac{x}{\alpha}\,\frac{\partial l_4^1}{\partial u}-l_4^1l_1^2x+\gamma x\,(l_4^4-l_2^2+l_3^3-l_1^1),\ \ \frac{\partial \gamma}{\partial u}=\alpha\,(2\gamma l_1^2-\beta l_4^1),$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}=\frac{x}{\alpha\beta}\,\frac{\partial l_3^4}{\partial u}-\frac{\varphi x}{\alpha\beta}\,\frac{\partial l_1^2}{\partial u}+\frac{x}{\beta}\,l_1^2\,(l_1^2\varphi-l_3^4)+\varphi x\,(l_2^2+l_3^3-l_1^1-l_4^4),$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}=\alpha\,(l_1^2\varphi+l_3^4),$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\,l_1^2\alpha x,\ \ \frac{\partial l_2^1}{\partial u}=l_2^1l_1^2\alpha,\ \ \frac{\partial l_4^3}{\partial u}=l_4^3l_1^2\alpha,$$
$$\frac{\partial l_1^1}{\partial u}=\alpha\,(\beta l_2^1+l_1^1l_1^2),\ \ \frac{\partial l_2^2}{\partial u}=\alpha\,(l_2^2l_1^2-\beta l_2^1),$$
$$\frac{\partial l_3^3}{\partial u}=\alpha\,(l_3^3l_1^2+\beta\varphi l_4^3),\ \ \frac{\partial l_4^4}{\partial u}=\alpha\,(l_1^4l_1^2-\beta\varphi l_4^3)$$

и конечное уравнение

$$l_3^4=\varphi\left(\frac{\beta}{\gamma}\,l_4^1-l_1^2\right),$$

которое позволит исключить l_3^4. Исключая, кроме того, l_4^1 и l_1^2, мы приведем систему к виду (опущены члены, не содержащие производных):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v}=\ldots$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial v}=\frac{x\sqrt{\beta\varphi}}{\alpha^2}\,\frac{\partial^2(\gamma\varphi)^{-\frac{1}{2}}}{\partial u^2}-\frac{x}{2\alpha^2}\,\frac{\partial \ln \alpha}{\partial u}\,\frac{\partial \ln \gamma\varphi}{\partial u}+\ldots$$
$$\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}=\frac{x}{\alpha^2\beta}\,\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u^2}+\frac{x}{\alpha^2\beta}\,\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\,\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}-\frac{x}{\alpha^2\beta^2}\,\frac{\partial \beta}{\partial u}\,\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}-\frac{x}{\alpha^3\beta}\,\frac{\partial \alpha}{\partial u}\,\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}+\ldots$$
$$\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}=-\frac{x}{\alpha^2\beta}\,\frac{\partial^2 \ln \gamma}{\partial u^2}-\frac{x}{2\alpha^2\beta}\,\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}\,\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}+\frac{x}{2\alpha^2\beta}\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}\right)^2+\frac{x}{\alpha^3\beta}\,\frac{\partial \alpha}{\partial u}\,\frac{\partial \ln \gamma}{\partial u}+\ldots$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}=\ldots,\ \frac{\partial l_2^1}{\partial u}=\ldots,\ \frac{\partial l_4^3}{\partial u}=\ldots,\ \frac{\partial l_i^i}{\partial u}=\ldots$$

Эта система не ортономна. Не касаясь первого и четырех последних уравнений, мы видим, что остальные три содержат в левой части производные $\frac{\partial \beta}{\partial v}$, $\frac{\partial \gamma}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, а в правой части (кроме производных первого порядка) $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}$ в первом уравнении, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}$ — во втором и $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial u^2}$ — в третьем.

Так как в первой серии помет независимые переменные u и v имеют пометы 1, то чтобы производная $\frac{\partial\beta}{\partial v}$ не предшествовала производным $\frac{\partial^2\gamma}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$, т. е. чтобы ее помета была не меньше помет этих последних, надо помету функции β дать по крайней мере на единицу выше, чем γ или φ. Чтобы во втором уравнении помета $\frac{\partial\gamma}{\partial o}$ была не ниже пометы производной $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$, придется помету γ дать тоже не меньше чем на единицу выше, чем помету переменной φ, а тогда помета производной $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ будет заведомо ниже (по крайней мере на две единицы), чем помета производной $\frac{\partial^2\gamma}{\partial u^2}$.

Если же систему разрешить относительно вторых производных $\frac{\partial^2 \ln\gamma}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial u^2}$, то начальными условиями будут значения γ и φ для $u=0$ и мы не можем потребовать, чтобы найденное решение γ и φ принимало для $v=0$ те значения, которые имеют эти функции в системе решения дифференциальных уравнений, определяющего заданную пару развертывающихся поверхностей.

Произвольную пару развертывающихся поверхностей нельзя включить в пару, составленную из дважды взятой конгруэнции касательных к криволинейным асимптотическим одной линейчатой поверхности.

23. Если в последнем уравнении (43) положить равным нулю второй множитель, то придем к системе формул

$$\lambda_1^4=\lambda_3^2=\lambda_1^3=\lambda_2^4=\lambda_2^1=\lambda_4^3=0,\quad \lambda_i^i=0,\quad \lambda_2^3=1,$$
$$\lambda_4^2=\gamma,\quad \lambda_3^1=\gamma\varphi,\quad \lambda_1^2=\beta,\quad \lambda_3^4=\beta\varphi,$$
$$l_2^3=l_1^4=l_3^2=l_2^1=l_4^3=0,$$
$$l_2^4=\varphi,\quad l_4^2=\lambda_4^1,\quad l_3^1=\varphi\lambda_4^1,\quad l_3^4=\varphi l_1^3,\quad l_1^3=1,$$

где φ — вспомогательное неизвестное.

Уравнения структуры дадут

$$\frac{\partial}{\partial u}(x\varphi)=0,\quad \frac{\partial l_1^1}{\partial u}=\frac{\partial l_2^2}{\partial u}=-\frac{\partial l_3^3}{\partial u}=-\frac{\partial l_4^4}{\partial u},$$

а так как, для $u=0$, $x\varphi=1$ и все $l_i^i=0$, то для всех значений u и v

$$x\varphi=1,\quad l_1^1=l_2^2=-l_3^3=-l_4^4.$$

Теперь те же уравнения дадут $\frac{\partial\alpha}{\partial v}=0$, а так как для $u=0$ $\alpha=1$, то и всегда

$$\alpha=1.$$

Наша система примет вид:

$$\frac{\partial\beta}{\partial v}=x\left\{\frac{\partial l_1^2}{\partial u}-(l_1^2)^2\right\},$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial v}=x\left\{\frac{\partial\lambda_4^1}{\partial u}-\lambda_4^1 l_1^2\right\},$$
$$\frac{\partial\lambda_4^1}{\partial v}=x\left\{\frac{\partial l_4^1}{\partial u}-l_4^1 l_1^3-2\lambda_4^1 l_1^1\right\},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{x^2}{\beta}(l_1^2)^2,\quad \frac{\partial x}{\partial u}=-x l_1^2,$$
$$\frac{\partial l_1^1}{\partial u}=-\gamma$$

и конечное уравнение

$$l_4^1 = \frac{\lambda_4^1 l_1^2}{\beta} - \gamma \frac{(l_1^2)^2}{\beta^2} - 2\frac{\gamma}{\beta} l_1^1,$$

которое позволит исключить l_4^1.

Если, кроме того, исключить l_1^2 с помощью уравнения

$$l_1^2 = -\frac{\partial \ln x}{\partial u},$$

то получим систему в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\beta}{\partial v} = -\frac{\partial^2 x}{\partial u^2},\\
&\frac{\partial\gamma}{\partial v} = x\frac{\partial\lambda_4^1}{\partial u} + \lambda_4^1\frac{\partial x}{\partial u},\\
&\frac{\partial\lambda_4^1}{\partial v} = -\frac{\lambda_4^1}{\beta}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - 2\frac{\gamma}{\beta^2 x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\gamma}{\beta^2 x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^3 -\\
&\qquad -\frac{1}{\beta}\frac{\partial\lambda_4^1}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\lambda_4^1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{\beta_\varepsilon x}\frac{\partial\gamma}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 +\\
&\qquad +\frac{2\gamma}{\beta^3 x}\frac{\partial\beta}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2x\frac{l_1^1}{\beta}\frac{\partial\gamma}{\partial u} + \frac{2x\gamma l_1^1}{\beta^2}\frac{\partial\beta}{\partial u} -\\
&\qquad -2\frac{\gamma l_1^1}{\beta}\frac{\partial x}{\partial u} + 2\frac{\gamma^2 x}{\beta} - 2x\lambda_4^1\,{}_1^1,\\
&\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\\
&\frac{\partial l_1^1}{\partial u} = -\gamma.
\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Эта система ортономна. Действительно, присвоим переменным (зависимым и независимым) две серии помет:

№	u	v	β	γ	λ_4^1	x	l_1^1
1	1	1	2	2	2	0	0
2	0	2	0	0	0	0	0

Считая последующей ту из двух производных, у которой первая помета больше, или, в случае равенства первых помет, ту, у которой вторая помета больше соответствующей пометы другой производной, мы распределим производные нашей системы на пять классов следующим образом:

Номер класса	Производные	Первая помета	Вторая помета
1	$\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial l_1^1}{\partial u}$	1	0
2	$\frac{\partial x}{\partial v}$	1	2
3	$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$	2	0
4	$\frac{\partial\beta}{\partial u}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial u}$, $\frac{\partial\lambda_4^1}{\partial u}$	3	0
	$\frac{\partial\beta}{\partial v}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial v}$, $\frac{\partial\lambda_4^1}{\partial v}$	3	2

При этом каждое уравнение системы (44) содержит в левой части производные более высокого класса, чем в правой. Значит, система ортономна.

Система — полная и вполне интегрируемая, ибо каждая неизвестная функция встречается один раз в левых частях уравнений системы.

Каждой неизвестной функции можно поставить в соответствие моном по ее производной в левой части уравнения, дополнительный моном и ее переменные типа множителей (multiplicatrices):

Неизвестные функции	Моном	Дополнительный моном	Переменные множители
$\beta, \gamma, \lambda_4^1, x$	v	1	u
l_1^1	u	1	v

Следовательно, существует решение системы (44) и только одно, определяемое начальными условиями

$$\text{для } v=0: \quad \beta=f_1(u),\ \gamma=f_2(u),\ \lambda_4^1=f_3(u),\ x=f_4(u)$$
$$\text{для } u=0: \quad l_1^1=f_5(v),$$

где все f_i — произвольные функции своих аргументов.

Произвольные функции β, γ, λ_4^1, x позволят включить в определяемое решение (в пару конгруэнций) при $v=0$ пару развертывающихся поверхностей, если мы выберем их равными тем функциям, которые определяют заданную пару поверхностей. Начальное значение l_1^1 для $u=0$ согласно условию, наложенному нами выше на выбор нормирования, следует положить равным нулю.

Таким образом, пара конгруэнций определяется двумя развертывающимися поверхностями, соответствующими друг другу в обеих конгруэнциях пары, единственным образом.

Московский гос. университет

Поступило 21. IX. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937, стр. 184.

[2] Terracini, Atti della Reale Accademia nazionale dei Lincei, Rendiconti, VI serie, IV (1926), 348—352.

[3] Фиников С. П., Расслояемая пара кривых, Труды Моск. пед. ин-та, 1945

[4] Goursat F., Leçons sur le problème de Pfaff, Paris, 1922.

S. FINIKOFF. COUPLE DE SURFACES LINÉAIRES STRATIFIABLES PAR DEUX FAMILLES DE COURBES

RÉSUMÉ

Soient L, L' deux surfaces linéaires aux génératrices rectilignes en correspondance biunivoque. Le couple L, L' est stratifiable, s'il existe sur chaque surface une famille de ∞^1 courbes c (ou c') telles que le plan osculateur de c mené au point où elle rencontre une génératrice l de L, passe par la génératrice homologue l' de L' et vice-versa.

Un couple stratifiable de congruences K, K' étant donné, il existe, par définition, deux familles de ∞^1 surfaces Σ et Σ' telles que le plan tangent de chaque surface Σ mené au point, où elle rencontre un rayon l de K,

passe par le rayon homologue l' de K' et vice-versa. Chaque droite qui joint deux points homologues M et M' de Σ et Σ', situés sur des rayons homologues l, l', touche les deux surfaces aux points M, M' et engendre une congruence dont Σ, Σ' sont les nappes focales.

Or il est bien connu que toutes ces ∞^2 congruences sont W. Les couples des rayons homologues l, l' de K, K' déterminent donc sur les surfaces Σ, Σ' une correspondance ponctuelle qui conserve les asymptotiques. Il existe donc deux familles de ∞^1 surfaces gauches L de K que nous appelons asymptotiques et qui portent les asymptotiques c de toutes les surfaces Σ qui correspondent à une asymptotique c_1 arbitraire moins déterminée. A chaque surface L correspond une surface linéaire asymptotique L' de K'. Les surfaces homologues L, L' portent les asymptotiques homologues c et c' de Σ et de Σ'.

Cela posé, deux surfaces homologues L, L' forment un couple stratifiable. Si les congruences K, K' du couple sont hyperboliques, les surfaces L, L' sont linéaires, gauches. Si K, K' sont paraboliques, une famille d'asimptotiques de Σ, Σ' correspond aux asymptotiques des nappes focales de K, K' dont les tangentes engendrent K, K'. Les surfaces L, L' qui portent les asymptotiques citées sont développables.

Inversement, quel que soit un couple stratifiable de surfaces L, L', on peut lui attacher une famille de ∞^1 couples qui l'englobe et compose un couple stratifiable de congruences.

Comme le même système d'équations de Pfaff détermine le couple stratifiable de congruences et celui des surfaces gauches, le premier correspondant à une multiplicité intégrale à deux dimensions, le second à celle d'une dimension on aurait pu croire que le théorème d'existence de M. Cartan démontre l'existence d'un couple stratifiable de congruences qui englobe un couple donné de L, L'. Or l'élément intégral qui correspond à un couple des surfaces asymptotiques de K, K', est un élément singulier pour le multiplicité intégrale à deux dimensions. Donc le théorème de M. Cartan ne s'applique pas. Il est intéressant de remarquer que le problème de la détermination de la multiplicité intégrale qui définit le couple K, K' au moyen d'un élément intégral singulier nous réduit à un système orthonome de M. Riquier. Le couple en question est déterminé avec une fonction arbitraire d'un argument si les surfaces L, L' sont linéaires gauches, il est déterminé uniquement si elles sont développables.

Deux surfaces gauches composent un couple stratifiable si elles sont des nappes focales d'une congruence W. La caractéristique des surfaces développables stratifiables est plus compliquée: le plan osculateur de l'arète de rebroussement de chaque surface passe par le point homologue de l'arète de rebroussement de l'autre.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 113–120 Serie mathématique

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

ПОЛНЫЕ ВЫПУКЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье доказывается: полная метрика, определенная в области на сфере посредством линейного элемента с кривизной $\geqslant K_0$ ($K_0 \leqslant 0$) реализуема посредством выпуклой поверхности в пространстве Лобачевского кривизны K_0.

1. Полной выпуклой поверхностью мы называем связную компоненту границы выпуклого тела, или, что то же самое, поверхность, ограничивающую выпуклое тело. (Граница выпуклого тела может быть несвязной, а в понятие поверхности входит связность.) К полным выпуклым поверхностям мы присоединяем дважды покрытые замкнутые выпуклые области на плоскости ([1]). Здесь, как и всюду далее (если не оговорено противное), речь идет о плоскостях, выпуклых поверхностях и т. п. в пространстве Лобачевского; мы будем иметь в виду какое-либо данное пространство Лобачевского; кривизну его мы обозначаем K_0.

Для того чтобы наглядно представить выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского, воспользуемся той его интерпретацией, в которой оно представляется внутренностью некоторого шара E в эвклидовом пространстве, а прямые Лобачевского представляются отрезками эвклидовских прямых. Тогда выпуклое тело изобразится эвклидовским выпуклым телом, у которого исключены точки, не лежащие внутри шара E. Обратно, всякое такое эвклидовски выпуклое тело будет представлять выпуклое тело в пространстве Лобачевского.

Пусть H—эвклидовски выпуклое тело, лежащее в шаре E, причем из него исключены точки, общие с поверхностью S шара E. Проектирование границы H на S из любой точки, лежащей внутри H, представляет собой гомеоморфизм. Поэтому граница H гомеоморфна открытому множеству на сфере.

Возьмем на сфере открытое множество G такое, чтобы его дополнение $S-G$ не лежало в одной плоскости. (Этого всегда можно добиться путем топологического преобразования G, если $G \neq S$.) Выпуклая оболочка множества $S-G$, если из нее исключить самое это множество, будет представлять выпуклое тело в пространстве Лобачевского. Проектируя его границу на H, мы убедимся, что она гомеоморфна G.

Эти простые соображения приводят нас, между прочим, к теореме:

ТЕОРЕМА 1. *Выпуклая поверхность в пространстве Лобачевского гомеоморфна области на сфере, и для всякой области на сфере существует гомеоморфная ей полная выпуклая поверхность в пространстве Лобачевского.*

2. Любые две точки на полной выпуклой поверхности можно соединить кратчайшей линией, длина которой дает внутреннее расстояние между этими точками. Таким образом, на полной выпуклой поверхности определяется внутренняя метрика, и поверхность оказывается метрическим пространством. Задача состоит в нахождении необходимых и достаточных условий, при которых метрическое пространство изометрично полной выпуклой поверхности («реализуется посредством такой поверхности»).

Необходимое топологическое условие дается теоремой 1: пространство должно быть гомеоморфно области на сфере. Далее, имеются еще два необходимых условия в целом. Именно, метрика полной выпуклой поверхности является «внутренней» и «полной». Первое означает, что расстояние между любыми двумя точками равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих эти точки, причем длина измеряется в метрике поверхности (или соответствующего метрического пространства). Второе означает, что всякое ограниченное в смысле метрики поверхности бесконечное множество имеет точку сгущения.

К этим условиям в целом присоединяются необходимые условия в малом: Если поверхность регулярна, то ее гауссова кривизна должна быть всюду $\geqslant K_0$. Если поверхность многогранная, то каждая ее точка имеет окрестность, изометричную конусу с полным углом вокруг вершины $\leqslant 2\pi$. Для общих выпуклых поверхностей необходимые в малом условия были указаны в другой моей заметке (1). Пользуясь введенной там терминологией, эти условия можно свести к тому, что метрика должна 1° иметь в каждой точке «касательный конус» и 2° быть «выпуклой по отношению к метрике постоянной кривизны K_0». Эти условия вместе с указанными условиями в целом оказываются также достаточными, т. е.

ТЕОРЕМА 2. *Метрика, заданная в области на сфере и удовлетворяющая всем этим условиям, реализуема посредством полной выпуклой поверхности.*

Доказательство теорем реализуемости основано на двух теоремах.

ТЕОРЕМА 3. *Если комплекс плоских многоугольников гомеоморфен сфере, и сумма углов, сходящихся в каждой его вершине, $\leqslant 2\pi$, то из этого комплекса можно «склеить» замкнутый выпуклый многогранник.*

Эта теорема дословно повторяет теорему, доказанную мною ранее (2) для случая эвклидова пространства; доказательство ее сводится к повторению доказательства, данного в (2); небольшие изменения, необходимые в некоторых деталях, делаются просто.

ТЕОРЕМА 4. *Если полные выпуклые поверхности F_n сходятся к F и точки A_n, B_n, лежащие на F_n, сходятся к A и B, то $\rho(AB) = \lim_{n\to\infty} \rho_n(A_nB_n)$, где ρ и ρ_n обозначают расстояние на F и F_n.*

Эта теорема дословно повторяет теорему, доказанную в ([2]) для случая эвклидова пространства. Здесь мы дадим ее доказательство в пространстве Лобачевского.

Допустим сперва, что поверхности F_n и F замкнуты и не вырождаются в плоские области.

(a) Пусть L_n и L кратчайшие, соединяющие точки A_n, B_n на F_n и A, B на F. Если из кривых L_n выбрать сходящуюся последовательность и обозначить ее предел через $\overline{L}$, то, как известно,

$$s(\overline{L}) \leqslant \lim_{n\to\infty} s(L_n), \tag{1}$$

где s обозначает длину. А так как, очевидно,

$$\rho(AB) \leqslant s(\overline{L}) \text{ и } \rho(A_nB_n) = s(L_n),$$

то из (1) следует, что

$$\rho(AB) \leqslant \lim_{n\to\infty} \rho(A_nB_n). \tag{2}$$

(b) Так же как в ([2]), можно доказать, что если точки X_n, Y_n, лежащие на F_n, сходятся к одной точке, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(X_n, Y_n) = 0.$$

(c) Возьмем точку O внутри F; при больших n она будет лежать также внутри F_n. Вокруг точки O возьмем единичную сферу S. Пусть λ есть проекция кратчайшей L на сферу S.

Пусть кратчайшая L имеет в точке X касательную. Пусть ds — элемент длины кратчайшей L в точке X, $r = OX$ и φ — угол между касательной в точке X и отрезком OX. Тогда если $d\sigma$ — проекция элемента длины ds на сферу S (т. е. элемент длины кривой λ), то

$$ds = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{-K_0}\,r}{\operatorname{sh}\sqrt{-K_0}}\,\frac{d\sigma}{\sin\varphi}. \tag{3}$$

Рассмотрим на поверхностях F_n кривые $\overline{L}_n$, проекции которых на S совпадают с λ. Пусть точки X_n кривых $\overline{L}_n$ лежат на радиусе OX и пусть кривые $\overline{L}_n$ имеют в этих точках касательные. Опорные плоскости к поверхностям F_n в точках X_n сходятся к опорной плоскости к поверхности F в точке X *. Отсюда следует, что $\varphi_n \to \varphi$, где φ_n — угол между OX и касательной к $\overline{L}_n$ в точке X_n. Кроме того, $OX_n = r_n \to r$.

Так как спрямляемые кривые имеют касательные почти везде, то почти везде на λ $\varphi_n \to \varphi$ и $r_n \to r$. Кроме того, $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-K_0}\,r_n}{\sin\varphi_n}$ равномерно ограничены. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_\lambda \frac{\operatorname{sh}\sqrt{K_0}\,r_n}{\operatorname{sh}\sqrt{-K_0}}\,\frac{d\sigma}{\sin\varphi_n} = \int_\lambda \frac{\operatorname{sh}\sqrt{-K_0}\,r}{\operatorname{sh}\sqrt{-K_0}}\,\frac{d\sigma}{\sin\varphi},$$

т. е.

* Точнее, предел всякой сходящейся последовательности плоскостей, опорных к F_n в точках X_n, есть плоскость, опорная к F в точке X.

$$\lim_{n\to\infty} s(\overline{L}_n) = s(L). \qquad (4)$$

Пусть $\overline{A}_n$ и $\overline{B}_n$ — концы линий L_n. Очевидно, $s(\overline{L}_n) \geqslant \rho_n(A_nB_n)$, а так как L — кратчайшая между A и B, то $s(L) = \rho(AB)$. Поэтому из (4) следует, что

$$\rho(AB) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n(\overline{A}_n\overline{B}_n). \qquad (5)$$

Но $\overline{A}_n \to \overline{A}$, $\overline{B}_n \to B$ и также $A_n \to A$ и $B_n \to B$. Поэтому, используя замечание (b), мы из (5) получим, что

$$\rho(AB) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n(A_nB_n).$$

Это вместе с (2) доказывает теорему.

Если поверхности F_n и F не замкнуты, то опишем вокруг точки A шар радиуса $2\rho(AB)$. Поверхности F_n и F вырежут из него выпуклые тела, границы которых будут замкнутыми поверхностями. В силу выбора радиуса шара, расстояния между A и B, между A_n и B_n на этих поверхностях будут те же, что на F и F_n (по крайней мере при больших n). Поэтому из доказанного для случая замкнутых поверхностей следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(A_nB_n) = \rho(AB).$$

Для случая, когда F вырождается в дважды покрытую плоскую область (или даже в часть прямой), теорема доказывается так же, как в ([2]).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть в области G на сфере задан линейный элемент с кривизной всюду $\geqslant K_0$. Если определяемая в G метрика полная, то она реализуема посредством полной выпуклой поверхности в пространстве Лобачевского кривизны K_0.*

В доказательстве мы используем две леммы о малых геодезических треугольниках. Малым мы называем треугольник, никакие две точки которого нельзя соединить двумя геодезическими, проходящими в этом треугольнике.

ЛЕММА 1. *Если ABC — малый треугольник в области G, а $A_0B_0C_0$ — треугольник со сторонами той же длины на плоскости (т. е. $A_0B_0 = AB$ и т. д.), то $\hat{A} \geqslant \hat{A}_0$, $\hat{B} \geqslant \hat{B}_0$, $\hat{C} \geqslant \hat{C}_0$.*

ЛЕММА 2. *Пусть треугольники ABC и $A_0B_0C_0$ те же, что в лемме 1. Пусть на AB и AC взяты точки X и Y, а на A_0B_0, A_0C_0 — точки X_0, Y_0, так, что $A_0X_0 = AX$, $A_0Y_0 = AY$. Положим $XY = z$ и $X_0Y_0 = z_0$ (т. е. расстояния от X до Y и от X_0 до Y_0) и пусть K — максимум гауссовой кривизны в треугольнике ABC, а d — его диаметр. Тогда*

$$\frac{|z - z_0|}{z_0} \text{ и } \frac{|z - z_0|}{z} < M(K - K_0)\, d^2,$$

где M — некоторое число, ограниченное при ограниченном d.

Доказательства этих лемм представляют формальную переделку доказательств, данных в [2] для аналогичных лемм.

Доказательство теоремы 5 мы проведем, предполагая, что область G не простирается на всю сферу. (Если G — сфера, то доказательство только упростится очевидным образом.)

В этом предположении область G можно представить в виде суммы расширяющейся последовательности геодезических многоугольников $H_1 \supset \supset H_2 \supset H_3 \ldots$ Возьмем многоугольник H_n; его граница ограничивает на G несколько областей $M_n^1, \ldots, M_n^m$, бесконечных в смысле метрики, заданной на G. Возьмем в M_n^k точку A_n^k и найдем кривую L_n^k, самую короткую из кривых, проходящих через A_n^k, лежащих в $\overline{M}_n^k$ (замыкание M_n^k) и гомологичных границе M_n^k. Из полноты метрики, заданной в G, следует, что такая кривая L_n^k существует. Она будет геодезической ломаной с углом в точке A_n^k и с углами в некоторых вершинах области M_n^k. Эти последние углы будут $> \pi$, если их измерять со стороны той части области M_n^k, которая уходит в бесконечность. (Конечно, на L_n^k может вовсе не быть углов.)

Построив такие кривые $L_n^1, \ldots, L_n^m$ во всех областях $M_n^1, \ldots, M_n^m$, мы ограничим ими геодезический многоугольник Q_n, содержащий H_n; все углы этого многоугольника, кроме, может быть, углов при вершинах A_n^k, будут $< \pi$.

Отождествим на каждой кривой L_n^k точки, равно удаленные, считая по этой кривой, от точки A_n^k. Кривые L_n^k «сложатся пополам» и многоугольник Q_n обратится в область гомеоморфную сфере. В этой области R естественно определяется метрика.

Если точка X области R не лежит в вершине никакой из линий L_n^k, то угол вокруг нее $= 2\pi$. Если же точка X лежит в вершине линии L_n^k, то угол вокруг нее $< 2\pi$, так как в вершинах линии L_n^k углы $< \pi$, кроме, может быть, вершин A_n^k; но вершины A_n^k ни с чем не отождествляются, и угол вокруг них остается $< 2\pi$.

Разобьем R на малые геодезические треугольники T^i так, чтобы сложенные пополам кривые L_n^k участвовали в триангуляции. Каждый треугольник T^i заменим плоским $\overline{T}^i$ со сторонами той же длины.

Отобразим каждый треугольник $\overline{T}^i$ гомеоморфно на треугольник T^i так, чтобы на сторонах отображение было изометрическим. Тогда из треугольников $\overline{T}^i$ составится комплекс $\overline{R}$, гомеоморфный сфере. По лемме 1, углы треугольников $\overline{T}^i$ не больше углов треугольников T^i. Поэтому сумма углов вокруг каждой вершины в комплексе $\overline{R}$ будет $\leqslant 2\pi$.

Из теоремы 3 следует, что из комплекса $\overline{R}$ можно «склеить» выпуклый многогранник P. Этот многогранник реализует метрику комплекса $\overline{R}$.

В силу введенного нами отображения треугольников $\overline{T}^i$ на T^i между сферой R и комплексом $\overline{R}$ устанавливается гомеоморфизм. Пусть точки $\overline{A}$ и $\overline{B}$ из $\overline{R}$ соответствуют при этом гомеоморфизме точкам A и B. Пусть ρ и $\overline{\rho}$ обозначают расстояния в R_n и $\overline{R}_n$. Пользуясь леммой 2, нетрудно, так же как это сделано в [2], показать, что

$$\overline{\rho}(\overline{A}\overline{B}) - |\rho(AB)| < Cd,$$

где C — некоторая постоянная, зависящая от диаметра области R и максимума кривизны в ней, а d — наибольший из диаметров треугольника $\bar{T}^t$. Это значит, что при $d \to 0$ метрики соответствующих комплексов $\bar{R}$, а значит, и многогранников P, будут сходиться к метрике ρ в области R.

Выберем из многогранников P, соответствующих всё более мелким разбиениям $(d \to 0)$, сходящуюся последовательность. По теореме 4, метрики многогранников этой последовательности будут сходиться к метрике предельной поверхности F. Эта поверхность, следовательно, реализует метрику ρ, определенную в R.

Итак, каждому многоугольнику Q_n мы поставили в соответствие замкнутую поверхность F_n. Предел сходящейся последовательности, образованной из этих поверхностей, реализует метрику, заданную во всей области G. Действительно, многоугольники Q_n с ростом n увеличиваются и границы их удаляются в бесконечность. Поэтому, если мы возьмем в G две точки A и B, то найдется такое N, что, при $n > N$, A и B будут лежать в Q_n и расстояния их до границы Q_n будут больше расстояния между ними. Тогда расстояние между A и B, измеренное в Q_n, будет то же самое, что в G, и оно будет то же самое в соответствующей области R. Значит, на поверхности F_n расстояние между соответствующими точками A_n и B_n будет то же самое. Пользуясь теоремой 3, мы получим, что и на предельной поверхности расстояние между соответствующими точками, предельными для A_n и B_n, будет то же самое, так что эта поверхность реализует метрику, заданную в G.

Доказательство реализуемости метрики, удовлетворяющей общим условиям, упомянутым в n°2, проводится по идее так же, но оно, естественно, значительно сложнее. Оно аналогично доказательству реализуемости полной выпуклой метрики (выпуклой по отношению метрики нулевой кривизны) посредством выпуклой поверхности в эвклидовом пространстве. Это последнее дано в моей книге «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» (3).

Поступило
4. X. 1944

ЛИТЕРАТУРА

1 Александров А. Д., Внутреняя метрика выпуклой поверхности в пространстве постоянной кривизны, Докл. Ак. Наук СССР, XLV (1944), № 1,

2 Александров А. Д., Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой, Мат. сб., 11 (53), (1941), 15.

3 Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, ГТТИ, 1945.

A. D. ALEXANDROFF. COMPLETE CONVEX SURFACES IN LOBACHEVSKIAN SPACE

SUMMARY

We consider a given Lobachevskian space; K_0 denotes its curvature. All further theorems and definitions deal with this space.

Under a complete convex surface we understand a connected component of the boundary of a convex solid. To the complete convex surfaces we add twice covered plane convex closed regions (1).

THEOREM 1. *A convex surface is homeomorphic to a region on a sphere and for any region on a sphere there exists a complete convex surface homeomorphic to it.*

THEOREM 2. *If a complex of plane polygons is homeomorphic to a sphere and the sum of the angles about each of its vertices is* $\leqslant 2\pi$, *then there exists a convex polyhedron liable to a subdivision isomorphic and isometric to this complex.*

The proof does not differ essentially from that given in (2) for the same theorem in the case of the Euclidian space.

THEOREM 3. *Let complete convex surfaces* F_n *converge to* F *and points* X_n *and* Y_n *lying on* F_n *converge to* X *and* Y, *then*

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(X_nY_n) = \rho(XY),$$

where ρ_n *and* ρ *denote the distances measured on* F_n *and* F.

A simple proof of this theorem is given in this paper.

THEOREM 4. *Let in a region* G *on a sphere be given a line element with the curvature* $\geqslant K_0$. *The metric defined in* G *by the line element being complete, it is realisable by means of a complete convex surface.*

Two following propositions on small geodesic triangles are used in the proof. (A triangle is small if no two of its points can be joined by two geodesics lying in this triangle.)

LEMMA 1. *If* ABC *is a small triangle in the region* G *and* $A_0B_0C_0$ *the plane triangle possessing the sides of the same lengths:* $A_0B_0 = AB$ *etc., then* $\hat{A}_0 \leqslant \hat{A}$, $\hat{B}_0 \leqslant \hat{B}$. $\hat{C}_0 \leqslant \hat{C}$.

LEMMA 2. *Let* ABC *and* $A_0B_0C_0$ *be the triangles of Lemma 1. Let* X *and* Y *be points on* AB *and* AC, *and points* X_0, Y_0 *on* A_0B_0 *and* A_0C_0 *be such that* $A_0X_0 = AX$, $A_0Y_0 = AY$. *Denote* $XY = z$, $X_0Y_0 = z_0$, K *the maximum of the Gaussian curvature in* ABC *and* d *the diameter of* ABC. *Then*

$$\frac{|z - z_0|}{z} \text{ and } \frac{|z - z_0|}{z_0} < M(K - K_0)\, d^2,$$

where M *is a number which is bounded as soon as* d *is bounded.*

The proofs of both lemmas are formal modifications of those given in (2) for the similar lemmas.

Now we will outline the proof of Theorem 4 supposing the region G not to cover the sphere (for, G being the whole sphere the proof will be evidently simplified).

Under this assumption the region G can be represented as the sum of an extending sequence of geodesic polygons $H_1, H_2, \ldots, H_m$. Take a polygone H_n; its boundary cuts out of G a number of regions $M_n^1, \ldots, M_n^m$ which are infinite in the metric given in G. Take in M_n^k a point A_n^k and find that curve L_n^k which is the shortest one among all the curves containig A_n^k, lying in $\overline{M}_n^k$ (closure!) and homologous to the boundary on M_n^k (such a curve exists owing to the completeness of the metric). The curve L_n^k is a geodesic polygon with an angle at A_n^k and, possibly, with angles at some vertices of the region M_n^k: the latters are $> \pi$, if measured in that part of M_n^k which extends to the infinity; L_n^k has no other angles and may have no angles at all.

Such curves $L_n^1, \ldots, L_n^m$ being constructed in all the regions $\overline{M}_n^1, \ldots, \overline{M}_n^m$, enclose a geodesic polygon Q_n containing H_n.

Identify on each curve L_n^k those points which lie at the same distance (measured along L_n^k) from A_n^k. The curves $L_n^1, \ldots, L_n^m$ being thus doubled, the polygon Q_n becomes a region R homeomorphic to a sphere. A metric is defined in R quite naturally. The whole angle about any vertex of the doubled L_n^k is $< 2\pi$.

Divide R into small geodesic tringles so that the lines L_n^k (doubled) take part in the triangulation. Raplace each triangle by a plane one with the sides of the same lengths. These plane triangles form, naturally, a complex homeomorphic to a sphere.

Using Lemma 1, one sees that this complex satisfies the conditions of Theorem 2 and thus there exists a convex polyhedron realising the metric of this complex.

Further, using Lemma 2, one can easely verify that the finer the triangulation of R_n the nearer metric of the corresponding complex approaches that of R_n. Thus, applying Theorem 3, the evident passage to the limit leads to a complete convex surface F_n, which realizes the metric of the region R_n. And then by letting $n \to \infty$ we come to a surface F — the limit of a convergent subsequence of the surfaces F_n — realizing the whole metric given in the initial region G.

In a recent note (¹) I have stated a set of condition which characterize «in the small» the inner metric of a convex surface in a Lobachevskian space. Now, using the terms introduced in that note, we will state a general theorem which shows that those conditions are not only necessary, but also sufficient, «in the large», as well as when connected with the necessary conditions for completeness and for homeomorphness to a spherical region.

THEOREM 5. *Let in a region G on a sphere an inner complete metric be given, which has a tangent cone at every point and is convex with respect to the metric of constant curvature K_0. There exists then a complets convex surface realizing this metric.*

Though the idea of the proof is just the same as that of the proof of Theorem 4, the details are more complicated, they do not differ essentialy from the details of the proof given in my book «Inner geometry of convex surfaces» for a similar theorem on realization in the Euclidean space.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 121—148 Serie mathematique

Ф. И. ФРАНКЛЬ

О ЗАДАЧАХ С. А. ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ СМЕШАННЫХ ДО- И СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

(*Представлено академиком* С. А. Христиановичем)

В работе исследуются: задача истечения сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками и задача о набегании сверхзвукового потока на клин, когда между головной волной и клином образуется зона дозвуковых скоростей.

Введение

В данной статье предполагается знакомство читателя с работой С. А. Чаплыгина «О газовых струях» (1), а также с методом расчета плоскопараллельных сверхзвуковых течений, данным Прандтлем и Буземаном (2) [см. также (5) и (6)]. Рекомендуется предварительное ознакомление с работой Ф. Трикоми «Об уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа» (3), методы которой, несомненно, удастся еще использовать при доказательстве существования решения рассматриваемых нами задач.

Так как везде в дальнейшем мы пользуемся обозначениями С. А. Чаплыгина, приводим здесь важнейшие для нас формулы и обозначения.

Чаплыгин пользуется методом годографа. В качестве независимых переменных он берет, во-первых, величину

$$\tau = \frac{V^2}{V_m^2}, \tag{1}$$

где V — скорость потока в данной точке, V_m — максимальная скорость, соответствующая характерной для данного потока температуре торможения T_0 (т. е. температуре, возникающей перед внесенным в поток препятствием). При этом

$$V_m^2 = 2Jgc_pT_0, \tag{2}$$

где J — постоянная Джоуля, g — ускорение тяжести, c_p — теплоемкость единицы веса при постоянном давлении и T_0 — абсолютная температура торможения.

В качестве второй независимой переменной берется угол наклона скорости θ. В этих независимых переменных в случае незавихренного потока функция тока ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right\}+\frac{1-(2\beta+1)\tau}{2\tau(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0, \tag{3}$$

где

$$\beta=\frac{1}{\varkappa-1} \tag{3a}$$

и

$$\varkappa=\frac{c_p}{c_v} \tag{3b}$$

— отношение теплоемкостей при постоянных давлении и объеме.

Значение

$$\tau=\frac{1}{2\beta+1} \tag{4}$$

отвечает критической скорости, т. е. скорости потока, равной соответствующей местной скорости звука.

При введении вспомогательной переменной

$$\sigma=\int\limits_{\tau}^{(2\beta+1)^{-1}}\frac{(1-\tau)^{\beta}}{2\tau}\,d\tau \tag{5}$$

уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}+K\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0, \tag{6}$$

где

$$K=\frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}}. \tag{7}$$

Таким образом, уравнение (6) при дозвуковых скоростях будет эллиптического, а при сверхзвуковых — гиперболического типа.

Далее, Чаплыгин рассматривает частные решения уравнения (3) вида

$$\psi_\nu(\tau,\theta)=z_\nu(\tau)\sin 2\nu\theta, \tag{8}$$

где

$$z_\nu(\tau)=\tau^\nu y_\nu(\tau), \tag{9}$$

а $y_\nu(\tau)$ — гипергеометрическая функция

$$y_\nu(\tau)=F(a_\nu,\ b_\nu;\ 2\nu+1;\ \tau), \tag{10}$$

причем

$$a_\nu+b_\nu=2\nu-\beta,\qquad a_\nu b_\nu=-\beta\nu(2\nu+1). \tag{10a}$$

В теории Чаплыгина играет существенную роль также вспомогательная функция $x_\nu(\tau)$,

$$x_\nu=1+\frac{\tau}{\nu}\frac{y'_\nu}{y_\nu}=\frac{\tau}{\nu}\frac{z'_\nu}{z_\nu}. \tag{11}$$

Рассматриваемые Чаплыгиным задачи при скорости потока, остающейся везде ниже звуковой, сводятся к задаче Дирихле и решаются при помощи рядов, составленных из частных решений вида (8). К каким краевым задачам для уравнения (3) сводятся задачи Чаплыгина при смешанных до- и сверхзвуковых течениях, оставалось неизвестным.

Опираясь на работу Трикоми [3], автору удалось найти формулировку этих задач и установить единственность их решений.

В дальнейшем автор надеется дать математически обоснованное и п актически пригодное решение поставленных задач.

§ 1. Сведение проблемы истечения сверхзвуковой струи к задачам Трикоми для уравнения С. А. Чаплыгина. Теорема единственности для этой задачи

Задача Трикоми заключается в следующем.

Пусть дано линейное уравнение в частных производных второго порядка, которое по одну сторону кривой C в плоскости независимых переменных имеет эллиптический тип, а по другую — гиперболический тип. Рассмотрим область D, ограниченную кривой L, лежащей в эллиптической области с концами, лежащими на кривой C, и характеристиками x_1 и x_2, принадлежащими к разным семействам и исходящими с концов кривой L (фиг. 1). Пусть значения решения заданы на кривых L и x_1, но не на x_2. Ищется решение в области D.

Эта краевая задача была впервые формулирована Ф. Трикоми [3] применительно к уравнению

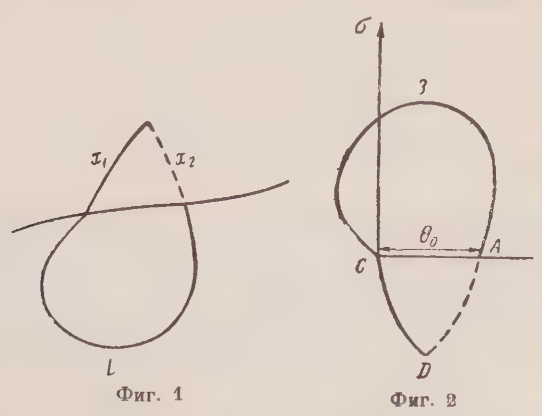
$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Трикоми доказал единственность и существование решения этой задачи.

В этом параграфе мы сведем проблему истечения сверхзвуковой струи к некоторой задаче Трикоми для уравнения С. А. Чаплыгина (см. Введение, уравнение (6)):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}+K\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \tag{2}$$

Коэффициент K при малом τ или большом σ равен единице и падает при растущем τ (убывающем σ). При $\tau=(1+2\beta)^{-1}$ (или $\sigma=0$) имеем $K=0$, а при $\tau>(1+2\beta)^{-1}$ (или $\sigma<0$) $K<0$.



Фиг. 1 Фиг. 2

Итак, уравнение (2) эллиптического типа при $\sigma>0$ и гиперболического при $\sigma<0$.

Докажем сперва единственность решения задачи Трикоми для уравнения (2).

Рассмотрим в плоскости (θ, σ) конечную область, ограниченную дугой ABC, лежащей в полуплоскости $\sigma > 0$, и характеристиками AD, CD, лежащими в полуплоскости $\sigma < 0$ (фиг. 2). Предположим, что в этой области дано решение ψ уравнения (2), равное нулю на ABC и на CD. Докажем, что это решение равно нулю во всей области.

Рассмотрим сперва решение в треугольнике и докажем, что

$$\int_0^{\theta_0} \psi \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\, d\theta \Big|_{\sigma=0} \geqslant 0. \tag{3}$$

Преобразуем уравнение

$$\iint_{ADC} \psi \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} - |K| \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) d\sigma\, d\theta = 0 \tag{4}$$

путем интегрирования по частям. Имеем

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\sigma} \psi \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}\, d\sigma &= \psi \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\Big|_0^{\sigma_1} - \int_0^{\sigma_1} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma, \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \psi \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\, d\theta &= \psi \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 d\theta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Следовательно,

$$0 = \iint_{ADC} \psi \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} - |K| \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) d\theta\, d\sigma = \int_{DA} \psi \left(-\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} d\theta - |K| \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\sigma\right) -$$

$$- \iint_{ADC} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 - |K| \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2\right] d\theta\, d\sigma + \int_0^{\theta_0} \psi \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\, d\theta \Big|_{\sigma=0}. \tag{6}$$

Вдоль характеристики DA имеем

$$\left.\begin{aligned} &d\theta - \sqrt{|K|}\, d\sigma = 0, \\ &d\sigma = \frac{d\theta}{\sqrt{|K|}}, \qquad d\theta = \sqrt{|K|}\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Следовательно,

$$\int_{DA} \psi \left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} d\theta + |K| \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\sigma\right) = \int_{DA} \sqrt{|K|}\, \psi \left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} d\sigma + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\theta\right) =$$

$$= \int \sqrt{|K|}\, \psi\, d\psi = \underbrace{\frac{\psi^2}{2}\sqrt{|K|}\Big|_{\sigma_{\min}}^{0}}_{=0} - \frac{1}{2} \int_{DA} \frac{d\sqrt{|K|}}{d\sigma} \psi^2\, d\sigma, \tag{8}$$

так что

$$\int_0^{\theta_0} \psi \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\Big|_{\sigma=0} d\theta = -\frac{1}{2} \int_{DA} \frac{d\sqrt{|K|}}{d\sigma} \psi^2\, d\sigma + \iint_{ADC} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 - |K| \left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2\right] d\theta\, d\sigma. \tag{9}$$

Вычислим теперь $\frac{d\sqrt{|K|}}{d\sigma}$:

$$\frac{d\sqrt{|K|}}{d\sigma}=\frac{1}{2\sqrt{|K|}}\,\frac{d\,|K|}{d\sigma}\left(-\frac{2\sigma}{(1-\sigma)^{\beta}}\right)=$$
$$=-\frac{\sigma}{(1-\sigma)^{\beta}\sqrt{|K|}}\,\frac{2\beta\,(2\beta+1)\,\sigma}{(1-\sigma)^{2\beta+2}}<0. \qquad (10)$$

Таким образом, для доказательства неравенства (3) остается показать, что

$$\iint\limits_{ADC}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^{2}-|K|\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{2}\right]d\theta\,d\sigma\geqslant 0. \qquad (11)$$

Для доказательства перейдем к характеристическим координатам:

$$\left.\begin{aligned} d\lambda&=d\theta+\sqrt{|K|}\,d\sigma,\\ d\mu&=d\theta-\sqrt{|K|}\,d\sigma,\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Отсюда получим определитель Якоби:

$$\frac{D\,(\lambda,\mu)}{D\,(\theta,\sigma)}=-2\sqrt{|K|}. \qquad (13)$$

Дифференциальное уравнение (3) принимает вид:

$$-4\,|K|\,\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu}+\frac{d\sqrt{|K|}}{d\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)=0. \qquad (14)$$

С другой стороны,

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^{2}-|K|\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{2}=-4\,|K|\,\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\psi}{\partial\mu} \qquad (15)$$

или

$$\iint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^{2}-|K|\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^{2}\right]d\theta\,d\sigma=-2\iint\sqrt{|K|}\,\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\,d\lambda\,d\mu, \qquad (15a)$$

где интеграл в правой части берется по площади $C'A'D'$ (фиг. 3).

Для вычисления этого интеграла перепишем уравнение (14) в следующем виде:

$$\sqrt{|K|}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}-\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)=M(\sigma)\,\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu}, \qquad (16)$$

где

$$M\,(\sigma)=\frac{4\,|K|^{3/2}}{\dfrac{d\sqrt{|K|}}{d\sigma}} \qquad (16a)$$

μ, D', A', $\mu=\lambda$, C', λ

Фиг. 3

Тогда

$$\iint\sqrt{|K|}\,\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\,d\lambda\,d\mu=\iint\sqrt{|K|}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)^{2}d\lambda\,d\mu+\iint M\,\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\,\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu}\,d\lambda\,d\mu=$$
$$=\iint\left(\sqrt{|K|}-\frac{1}{4\sqrt{|K|}}\,\frac{dM}{d\sigma}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)^{2}d\lambda\,d\mu+\frac{1}{2}\int M\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)^{2}\Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=\mu}d\mu=$$
$$=\iint\left(\sqrt{|K|}-\frac{1}{4\sqrt{|K|}}\,\frac{dM}{d\sigma}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)^{2}d\lambda\,d\mu, \qquad (17)$$

так как при малом σ

$$M=O\,(\sigma^{2}), \qquad (17a)$$

а при непрерывных $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = O\left(|\sigma|^{-1/2}\right). \tag{17b}$$

С другой стороны,

$$\sqrt{|K|} - \frac{1}{4\sqrt{|K|}}\frac{dM}{d\sigma} = \sqrt{|K|}\,\frac{(2+\beta)\tau - 2}{\beta(2\beta+1)\tau^2}. \tag{18}$$

Это выражение отрицательно, если во всем треугольнике ACD

$$\tau < \frac{2}{2+\beta}. \tag{19}$$

Последнее неравенство выражает, что *число Маха* M *должно быть меньше двух*. В самом деле, при $\tau = \frac{2}{2+\beta}$

$$M^2 = \frac{2}{\varkappa - 1}\,\frac{\tau}{1-\tau} = \frac{2}{\varkappa - 1}\,\frac{2(\varkappa-1)}{2\varkappa - 1}(2\varkappa - 1) = 4. \tag{19a}$$

Это значит, что при $\varkappa = 1{,}4$ основание θ_0 треугольника должно удовлетворять неравенству

$$\theta_0 < \bar{\theta} \cong 54^\circ. \tag{19b}$$

Необходимо ли это ограничительное условие для доказательства неравенства (3) по существу дела или же оно связано только с нашим методом доказательства, остается пока невыясненным*.

Рассмотрим теперь область ABC. Интегрированием по частям получим, как выше:

$$0 = \iint\limits_{ABC} \psi\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} + K\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) d\theta\, d\sigma = -\int_0^{\theta_0} \psi \left.\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} d\theta -$$

$$- \iint\limits_{ABC} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 + K\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2\right] d\theta\, d\sigma, \tag{20}$$

откуда

$$\int_0^{\theta_0} \psi \left.\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} d\theta \leqslant 0 \tag{21}$$

и, учитывая неравенство (3):

$$\int_0^{\theta_0} \psi \left.\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} d\theta = 0. \tag{22}$$

Из уравнений (24), (22). (11), (17a) и (19) следует теперь:

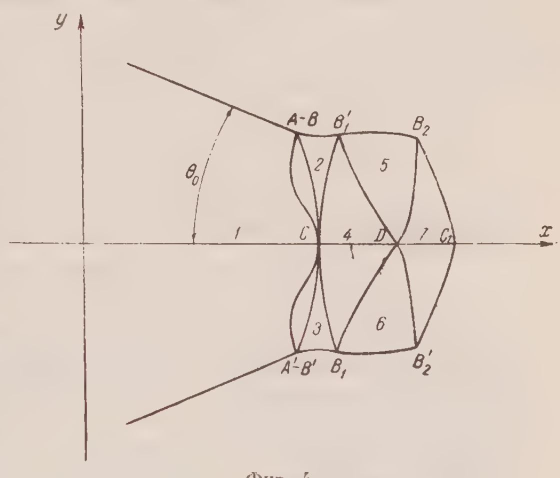
$$\psi = 0, \tag{23}$$

что и требовалось доказать.

---

* Доказательство остается в силе для любого уравнения вида (2), где K—регулярная функция от σ при $\sigma = 0$ и $\frac{dK}{d\sigma} > 0$ при $\sigma = 0$ и $K(0) = 0$, если только σ в треугольнике ADC остается достаточно малым. Применительно к уравнению (1) доказательство остается в силе для сколь угодно больших треугольников ADC. То же самое относится к доказательству единственности в целом.

Приведенное доказательство единственности применимо при условии законности встречающихся преобразований. Соответствующее дополнение к доказательству единственности мы намерены дать после исследования свойств решения нашей задачи.



Фиг. 4

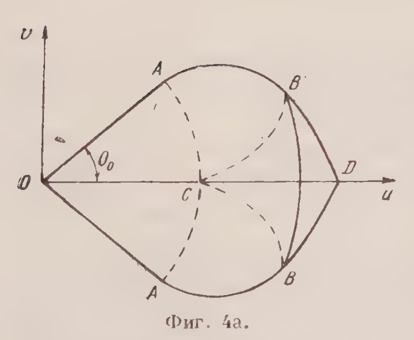
Вернемся к задаче истечения сверхзвуковой струи. Рассмотрим сосуд с симметрично расположенными стенками, заключающими между собой угол 2θ (фиг. 4а).

Мы утверждаем, что при достаточно малом давлении во внешнем пространстве задача истечения сводится к следующей задаче Трикоми: в области $OA'B'C$ (фиг. 4) ищется решение ψ по условиям

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ \quad \psi = -\frac{Q}{2} \quad \text{на } OA'B'; \\ &2^\circ \quad \psi = 0 \quad \text{на } OC. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Аналогично на границе области $OABC$ должно быть:

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ \ \psi = \frac{Q}{2} \quad \text{на } OAB; \\ &2^\circ \ \psi = 0 \quad \text{на } OC. \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$



Фиг. 4а.

Полученное решение дает отображение области $OA'B'CBAO$ на плоскость (x, y); тем самым получается область дозвуковых скоростей, линия звуковых скоростей и часть сверхзвуковой струи, примыкающая непосредственно к этой линии. Продолжение сверхзвуковой струи до бесконечности получаем по методу Прандтля и Буземана ([2]).

Докажем это. Согласно условиям (24) и (24а) радиусам OA' и OA соответствуют стенки сосуда, радиусу OC — ось симметрии сосуда. Что же касается характеристик AB и $A'B'$, то им в плоскости (x, y) соответствует по одной точке — именно края отверстия сосуда A и A'.

В самом деле, если вдоль характеристики уравнения (4) функция тока ψ постоянна, то потенциал φ также постоянен [([4]); глава I, фор-

мулы (1.15) и (1.16)]. Но если вдоль некоторой линии φ и ψ постоянны, то координаты x и y также постоянны. Остается показать, что полученное течение можно продолжать в виде струи с постоянным давлением (постоянной скоростью) на ее границах. Такое продолжение возможно, если отношение давления $\frac{p_1}{p_0}$ меньше (или равно) некоторой функции угла θ:

$$\frac{p_1}{p_0} \leqslant \frac{p_B}{p_0} = f(\theta_0) \quad (p_B \text{— давление в точке } B). \tag{25}$$

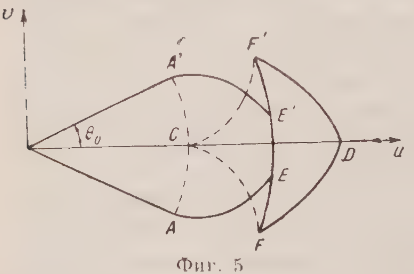
Приводим здесь табличку значений этой функции:

$\theta_0 =$	10°	20°	30°	40°	50°	54°
$f(\theta_0) =$	0,33	0,26	0,20	0,17	0,14	0,13

Рассмотрим сначала случай $p_1 = p_B$. Проведем дугу окружности BB' с центром в начале координат; а характеристики $A'B'$ и AB продолжим до их пересечения D.

Найдем теперь решение $\psi = \psi_2$ уравнения Чаплыгина в треугольнике $B'CB$, переходящее вдоль характеристики CB в предыдущее решение $\psi = \psi_1$ и равное $\left(+\frac{Q}{2}\right)$ вдоль BB'. Далее найдем решение $\psi = \psi_3$ в треугольнике $BB'C$, переходящее в решение $\psi = \psi_1$ вдоль CB' и равное $\left(-\frac{Q}{2}\right)$ вдоль $B'B$. Далее найдем решение $\psi = \psi_4$ в четырехугольнике $CB'DB$, переходящее вдоль CB в ψ_3 и вдоль CB' в ψ_2. Далее найдем решение ψ_5, равное ψ_4 вдоль $B'D$ и равное $+\frac{Q}{2}$ вдоль $B'B$ и, симметричное к последнему, решение ψ_6, равное ψ_4 вдоль BD и равное $\left(-\frac{Q}{2}\right)$ вдоль BB'. Далее найдем решение ψ_7, равное ψ_5 вдоль DB и равное ψ_6 вдоль DB' и т. д.

Области в плоскости (x, y), соответствующие этим решениям, обозначены на фиг. 4 соответствующими номерами. Таким образом, мы получаем, очевидно, струю с давлением p_B на границе.



Фиг. 5

Если давление во внешнем пространстве меньше p_B, то поступаем следующим образом (фиг. 5).

Проведем дугу окружности EE' с центром в начале координат с радиусом, соответствующим давлению $p_1 < p_B$. Точки E и E' должны лежать на продолжениях характеристик AB и $A'B'$. Пересечения этой окружности с продолжениями характеристик CB и CB' обозначим через F и F'. Проведем, наконец, через F и F' сопряженные характеристик; они пересекутся в точке D на оси u.

Найдем теперь решение ψ_2 в четырехугольнике $CBEF'$, переходящее в ψ_1 вдоль CB и равное $\frac{Q}{2}$ вдоль BEF', затем решение ψ_3 в четырехугольнике $CB'EF$, переходящее в ψ_1 вдоль CB' и равное $\left(-\frac{Q}{2}\right)$ вдоль $B'E'F'$. Далее найдем решение ψ_4 в четырехугольнике $CF'DF$, переходящее в ψ_2 вдоль CF' и в ψ_3 вдоль CF. Затем находятся два решения в треугольнике $FF'C$ и т. д., как указано в предыдущем случае.

Таким образом, получаем струю с постоянным давлением $p_1 < p_B$ на границе.

Для доказательства существоваиия установившейся непрерывной сверхзвуковой струи при истечении из сосуда требуется, следовательно, только доказать существование решения задачи Трикоми*.

Строгое доказательство существования, как уже сказано во введении, нам до сих пор дать еще не удалось. Но то обстоятельство, что решение задачи Трикоми для уравнения (1) существует и для уравнения (2) доказана единственность решения, дает все основания не сомневаться и в существовании решения задачи Трикоми для уравнения (2).

Но следует обратить внимание на то, что доказательство единственности нам удалось только для значений $\theta_0 \leqslant 54°$. Если это соответствует существу дела и если и доказательство существования удастся только для значения $\theta_0 \leqslant 54°$, то это означало бы, что истечение из симметричного бесконечного сосуда с прямыми стенками возможно в виде установившейся непрерывной сверхзвуковой струи, *если эти стенки заключают между собой угол не больше* 108°. Напрашивается предположение, что при $2\theta_0 > 108°$ истечение сверхзвуковой струи без скачков уплотнения невозможно; это предположение было бы интересно проверить экспериментально.

Что касается полученных решений, то в них линия скоростей звука исходит от краев отверстия. Обращает на себя внимание, что при $p = p_B$ характеристикам $A'B'$ и AB, а в случае $p_1 < p_B$ характеристикам $A'E'$ и AE соответствует по одной точке плоскости (x, y), а именно края отверстия. Это значит, что течение в окрестности краев отверстия имеет характер течения Прандтля — Мейера [(5); гл. III, § 7], т. е. характер обтекания угла с расширением. При этом угол отклонения границы струи по сравнению с направлением стенки должен быть не меньше, чем $\frac{\theta_0}{2}$.

---

* Это доказательство нужно, конечно дополнить доказательством того, что якобиан $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ или величина $\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 + K\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2$ для каждого из решений $\psi_1, \psi_2, \ldots$ имеет постоянный знак; в противном случае составляющие не были бы однозначными функциями координат; в этом случае следовало бы ожидать появления скачков уплотнения в струе. Нетрудно установить, к каким типам по Христиановичу [(4), § 9] принадлежат рассматриваемые течения: течение ψ_1 в своей сверхзвуковой части, а также течения ψ_2 и ψ_3 являются смешанными течениями, течение ψ_4 — течением разрежения, течения ψ_5 и ψ_6 — смешанными течениями, течение ψ_7 — течением сжатия и т. д.

Течение внутри сосуда, поскольку оно полностью определяется решением задачи Трикоми ψ_1, не зависит от внешнего давления p_1, если только $p_1 \leqslant p_B$; следовательно, расход воздуха в секунду также не зависит от p_1, что вполне соответствует общеизвестным экспериментальным фактам.

Указанными выше путями не удается, однако, найти решения, если

$$\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} p_0 > p_1 > p_B. \tag{26}$$

В этом случае задача сводится к краевой задаче, являющейся обобщением задачи Трикоми. Решение ищется в области $OCD'B'A'$.

При этом $A'B'$ и CD' — дуги эпициклоид Буземана, а $B'D'$ — дуга окружности, соответствующая заданному внешнему давлению. Точки O, A', C' — те же, что на фиг. 4а.

Краевые условия следующие:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= -\frac{a}{2} \text{ на } OA'D'B', \\ \psi &= 0 \text{ на } OC. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Единственность решения нами еще не доказана, но весьма вероятна.

В пределе при $p = p^* = \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} p_0$ указанная краевая задача переходит в задачу Дирихле, а ее решение — в решение Чаплыгина.

§ 2. Сведение задачи обтекания клина сверхзвуковым потоком в случае образования дозвуковой зоны перед клином к краевой задаче для уравнения Чаплыгина в заранее известной области плоскости скоростей. Теорема единственности для этой задачи

В рассматриваемом здесь случае энтропия за скачком уплотнения переменна; в связи с этим в уравнении Чаплыгина для потока появляется правая часть, пропорциональная производной энтропии по функции тока [(5); гл. III, § 2]. В дальнейшем мы будем пренебрегать этой правой частью, как и вообще переменностью энтропии. В связи с этим [(1); стр. 78] поток остается потенциальным, остаются в силе и уравнения Чаплыгина

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= -\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} &= K\frac{\partial\psi}{\partial\theta}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} + K\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_2} = 0. \tag{2}$$

Теперь задача обтекания клина может быть сведена к краевой задаче в области $OABDE$ плоскости (u, v) (фиг. 6). Здесь OA — отрезок оси u; AB — дуга строфоиды, дающей скорости за головной волной, лежащая внутри круга дозвуковых скоростей. Уравнение этой строфоиды [(5); гл. III, § 2]

$$\frac{v^2}{(V_1-u)^2} = \frac{u - \frac{a^{*2}}{V_1}}{\frac{2}{\varkappa+1} V_1 + \frac{a^{*2}}{V_1} - u}; \tag{3}$$

BD и ED — дуги характеристик (эпициклоид), причем B и E лежат на окружности звуковых скоростей, а OE — радиус под углом θ_0, а θ_0 — угол между сторонами клина и направлением набегающего потока.

Краевые условия таковы:

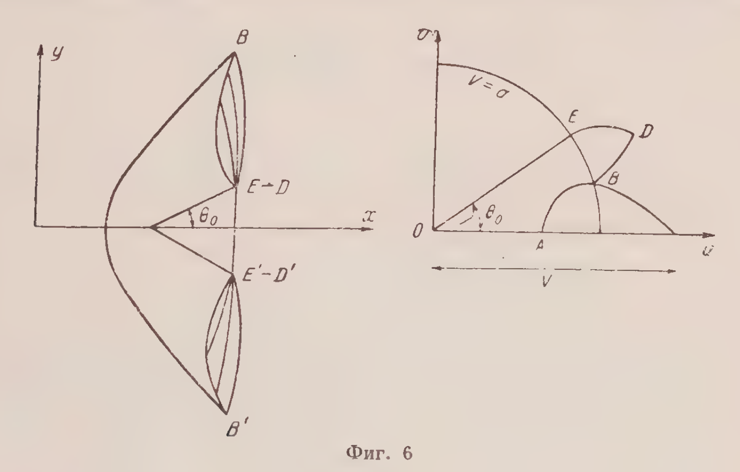
$$\psi = 0 \quad \text{на} \quad AOED, \tag{4}$$

$$\psi = \psi_B \quad \text{в точке } B, \tag{5}$$

где ψ_B считается заданным.

На дуге строфоиды должно быть выполнено такое условие, которое обеспечило бы непрерывное изменение функции тока при прохождении через головную волну.

Соответствующее отображение плоскости (u, v) на плоскости (x, y) показано на фиг. 6. Как и в задаче истечения, характеристике ED соответствует одна единственная точка $E - D$ в плоскости (x, y). У этой точки (угла у основания клина) возникают течения типа Прандтля — Мейера. Продолжение течения за линию Маха OB не представляет интереса, так как оно не влияет на течение перед этой линией (впрочем, это продолжение может быть определено методом Прандтля — Буземана).



Фиг. 6

При таких условиях в плоскости (u, v) будут, очевидно, выполнены те краевые условия в плоскости (x, y), которые вытекают из формулировки второй задачи Чаплыгина *. Значение ψ_B при этом пропорционально высоте клина. Остается еще уточнить краевые условия на дуге строфоиды AB.

Пусть ρ_1 — плотность в невозмущенном потоке и λ — угол наклона скачка уплотнения в произвольной его точке (фиг. 7). Пусть V_1 — скорость невозмущенного потока, ρ_0 — плотность в точке остановки. Напомним, что $\rho_0 \, d\psi$ означает разность расходов в двух бесконечно близких точках. Тогда вдоль скачка

$$\rho_0 \, d\psi = \rho_1 V_1 \, dy. \tag{6}$$

* Из трех условий, которые выполняются на головной волне, мы отбросили одно; но это неизбежно, поскольку мы пренебрегли изменением энтропии.

С другой стороны [([1]); т. II, стр. 41],

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos\theta}{V} d\psi + \frac{\sin\theta}{V}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} d\sigma + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} d\theta\right) =$$

$$= \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\cos\theta}{V} d\psi + \frac{\sin\theta}{V}\left(K\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} d\sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} d\theta\right). \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) следует

$$\left(\frac{1}{\rho_1 V_1} - \frac{\cos\theta}{\rho V}\right) d\psi = \frac{\sin\theta}{\rho_0 V}\left(K\frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} d\theta\right). \quad (8)$$

Далее (фиг. 8),

$$V_1 \cos\lambda = V\cos(\lambda - \theta) = V_s \quad (9)$$

(т. е. касательные скорости не меняются при прохождении через скачок) и

$$\rho_1 V_1 \sin\lambda = \rho V \sin(\lambda - \theta) \quad (10)$$

(т. е. расход не меняется при прохождении через скачок) [([5]); гл. III, § 8]. Отсюда

$$\frac{1}{\rho_1 V_1} - \frac{\cos\theta}{\rho V} = \frac{1}{\rho_1 V_1}\left(1 - \frac{\sin(\lambda-\theta)\cos\theta}{\sin\lambda}\right) \quad (11)$$

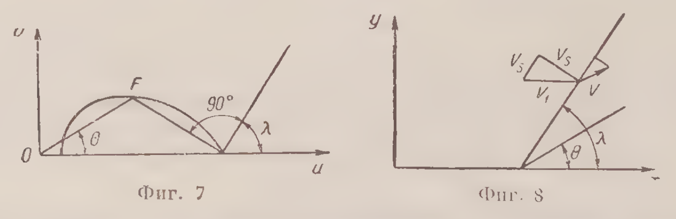
и

$$\frac{V}{\sin\theta}\left(\frac{1}{\rho_1 V_1} - \frac{\cos\theta}{\rho V}\right) = \frac{1}{\rho_1}\,\frac{\cos\lambda}{\sin\theta\cos(\lambda-\theta)}\left(1 - \frac{\sin(\lambda-\theta)\cos\theta}{\sin\lambda}\right) = \frac{\operatorname{ctg}\lambda}{\rho_1}. \quad (12)$$

Следовательно, краевое условие (8) принимает вид

$$K\frac{\partial\psi}{\partial\theta} d\sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} d\theta = \frac{\rho_0}{\rho_1}\operatorname{ctg}\lambda\, d\psi. \quad (13)$$

Так как θ вдоль строфоиды — известная функция от σ, то уравнение (13) представляет собой однородно-линейное соотношение между $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}$.



Фиг. 7 Фиг. 8

Итак, мы установили все краевые условия: они даются уравнениями (4) на *AOED*, (5) — в точке *B* и (13) на *AB*.

Докажем теперь, что *условия* (4), (5), (13) *определяют решение уравнения* (2) *в области OABDE единственным образом*, или, иначе выражаясь, что однородные условия (4) и (13) определяют функцию тока с точностью до постоянного множителя.

Для этой цели необходимо и достаточно доказать, что решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (4), (13) и (5), $\psi(B) = 0$

должно тождественно равняться нулю. Для доказательства достаточно показать, что из выполнения условия (4) вдоль AOE, (13) вдоль AB и (5) в точке B следует

$$\int_B^E \psi \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} d\theta \leqslant 0, \tag{14}$$

где интеграл берется вдоль линии $\sigma = 0$. В самом деле, в § 1 было уже доказано, что благодаря выполнению условия $\psi = 0$ вдоль ED *,

$$\int_B^E \psi \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} d\theta \geqslant 0 \tag{15}$$

и что из (14) и (15) следует

$$\psi \equiv 0. \tag{16}$$

Итак, докажем неравенство (14). Имеем:

$$0 = \iint_{OAEB} \psi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + K \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) d\theta\, d\sigma = -\iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^2 + K \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta\, d\sigma +$$
$$+ \oint \psi \left(K \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} d\theta \right) = -\iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^2 + K \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta\, d\sigma +$$
$$+ \frac{\rho_0}{\rho_1} \int_{AB} \operatorname{ctg} \lambda \cdot \psi\, d\psi - \int_B^E \psi \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} d\theta. \tag{17}$$

Следовательно,

$$\int_B^E \psi \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} d\theta = -\iint \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right)^2 + K \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta\, d\sigma + \frac{\rho_0}{2\rho_1} \int_A^B \psi^2 \frac{d\lambda}{\sin^2 \lambda} \leqslant 0. \tag{18}$$

Тем самым *теорема единственности доказана* **.

Поскольку здесь предполагалась законность произведенных преобразований, потребуется после доказательства существования решения дополнить это доказательство единственности.

К вопросу о существовании и эффективном нахождении решения надеемся вернуться в дальнейшем.

Если давление за клином больше того, которое имеет место в точке D (фиг. 6), то область в плоскости годографа и краевые условия меняются так же, как в случае истечения струи (см. примечание к § 1).

§ 3. Две леммы к теории уравнения С. А. Чаплыгина. Вопрос о возможности применения рядов типа Чаплыгина к задаче истечения сверхзвуковой струи

В этом параграфе мы доказываем две леммы к теории уравнения С. А. Чаплыгина, которые мы в дальнейшем надеемся использовать для доказательства существования решения задачи Трикоми.

---

* Конечно, при этом нужно, как и в § 1, предполагать, что в точке D будет $M \leqslant 2$ (или, что центральный угол дуги BE меньше 54°).

** Доказательство единственности применимо только, пока центральный угол дуги BE меньше 54°. В связи с этим получается также ограничение для угла θ_0 (фиг. 6); предельный угол $\theta_{0\,max}$ зависит от числа Маха набегающего потока. При $M = 1$, $\theta_{0\,max} = 54°$; при $M = \infty$, $\theta_{0\,max} = 99°$. Вопрос о том, имеет ли этот предельный угол физическое значение, остается пока открытым.

Первая из этих лемм представляет собой асимптотическую формулу для логарифмической производной функции Чаплыгина $z_\nu(\tau)$ [см. Введение, формула (11)] при $\tau=(2\beta+1)^{-1}$ и больших ν, а именно

$$\frac{z'_\nu\left(\frac{1}{2\beta+1}\right)}{z_\nu\left(\frac{1}{2\beta+1}\right)}=C\nu^{2/3}+O(1), \tag{1}$$

где C — постоянная, не зависящая от ν, а символ $O(1)$ означает ограниченную величину*.

В подготовленной к печати работе «К теории сопла Лаваля» нам удалось уточнить эту формулу. Мы получили асимптотическую формулу для больших ν:

$$\left.\frac{z'_\nu}{z_\nu}\right|_{\tau=\frac{1}{2p+1}}=C\nu^{2/3}+C_0+C_1\nu^{-2/3}+\cdots+C_k\nu^{-\frac{2k}{3}}+O(\nu^{-\frac{2k+2}{3}}).$$

В случае $\tau=\frac{1}{2\beta+1}$ эта формула является усилением неравенства, доказанного уже Чаплыгиным, именно неравенства

$$\sqrt{1-2\beta s+2\beta s^2\sqrt[3]{\frac{\beta(1+2\beta)^2}{2\nu^2}}}>x_\nu>\sqrt{1-2\beta s+\frac{\beta s^2(1+2\beta)}{\nu+1}}, \tag{2}$$

где

$$x_\nu=1+\frac{\tau}{\nu}\frac{y'_\nu}{y_\nu}=\frac{\tau}{\nu}\frac{z'_\nu}{z_\nu} \tag{2a}$$

и

$$s=\frac{\tau}{1-\tau}. \tag{2b}$$

Перейдем к доказательству уравнения (1). Согласно определению функции $z_\nu(\tau)$, функция

$$\psi_\nu=z_\nu(\tau)\sin 2\nu\theta \tag{3}$$

удовлетворяет уравнению Чаплыгина. Если переменную τ заменить переменной σ [([1]; глава V, формула (91)], то из уравнения

$$\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial\sigma^2}+K\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial\theta^2}=0 \tag{4}$$

следует

$$\zeta''_\nu(\sigma)-4\nu^2K\zeta_\nu(\sigma)=0, \tag{5}$$

где

$$\zeta_\nu(\sigma)=z_\nu(\tau). \tag{5a}$$

Напомним, что

$$z_\nu(\tau)=\tau^\nu y_\nu(\tau), \tag{6}$$

где $y_\nu(\tau)$ является решением гипергеометрического уравнения

$$\tau(1-\tau)y''_\nu+[2\nu+1+(\beta-2\nu-1)\tau]\,y'_\nu+\beta\nu(2\nu+1)\,y_\nu=0, \tag{7}$$

регулярным при $\tau=0$.

Уравнение (6) имеет еще второе независимое решение вида

$$y_\nu^{(2)}(\tau) = \tau^{-2\nu} g_\nu(\tau), \tag{8}$$

где $g_\nu(\tau)$ — регулярно при $\tau = 0$. Следовательно, уравнение (5) имеет второе независимое решение

$$\zeta_\nu^{(2)}(\sigma) = z_\nu^{(2)}(\tau) = \tau^{-\nu} g_\nu(\tau). \tag{9}$$

Из формулы для коэффициента K [§ 1, формула (4а)] вытекает, что вблизи $\sigma = 0$

$$K = a\sigma + b\sigma^2 + \ldots, \tag{10}$$

причем

$$a = 2\left(\frac{2\beta+1}{2\beta}\right)^{\epsilon\beta+1}. \tag{10а}$$

Так как при $\tau < (2\beta + 1)^{-1}$ (или $\sigma > 0$) K ограничено, то из уравнения (10) следует, что

$$|K - a\sigma| < B\sigma^2 \qquad \text{при } \sigma > 0. \tag{11}$$

Заменим теперь в дифференциальном уравнении (5) коэффициент K приближенным значением его, равным $a\sigma$. Получим уравнение

$$\bar{\zeta}_\nu'' - 4\nu^2 a\sigma \bar{\zeta}_\nu = 0. \tag{12}$$

Под $\bar{\zeta}_\nu(\sigma)$ мы будем теперь понимать то решение уравнения (12), которое при $\sigma \to \infty$ $(\tau \to 0)$ стремится к нулю и которое равно ζ_ν при $\sigma = 0$. Это решение имеет следующий вид [(3); гл. III, формула (12)]:

$$\bar{\zeta}_\nu(\sigma) = \lambda\left(\sqrt[3]{4\nu^2 a}\,\sigma\right)\frac{\zeta_\nu(0)}{\lambda(0)}, \tag{13}$$

где

$$\lambda(\xi) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi\rho - \frac{1}{3}\rho^3} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi\rho\right) d\rho. \tag{14}$$

Для дальнейшего существенно, что функция $\lambda(\xi)$ для любого положительного m удовлетворяет неравенству вида

$$|\lambda(\xi)| < \frac{c}{\xi^m} \quad (\xi > 0). \tag{15}$$

Обозначим теперь через $\delta\zeta_\nu$ функцию

$$\delta\zeta_\nu = \zeta_\nu - \bar{\zeta}_\nu. \tag{16}$$

Эта функция удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению

$$(\delta\zeta_\nu)'' - 4\nu^2 K \delta\zeta_\nu = 4\nu^2 f(\sigma), \tag{17}$$

где

$$f(\sigma) = (a\sigma - K)\,\bar{\zeta}_\nu(\sigma). \tag{17а}$$

Согласно общей теории однородных линейных дифференциальных уравнений из (17) следует

$$\delta\zeta_\nu(\sigma) = \frac{4\nu^2}{\Delta}\left\{\zeta^\nu(\sigma)\int_0^\sigma f(\sigma')\,\zeta_\nu^{(2)}(\sigma')\,d\sigma' + \zeta_\nu^{(2)}(\sigma)\int_\sigma^\infty f(\sigma')\,\zeta_\nu(\sigma')\,d\sigma'\right\} + \\ + C_1\zeta_\nu(\sigma) + C_2\zeta_\nu^{(2)}(\sigma), \tag{18}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \zeta_\nu' & \zeta_\nu^{(2)\prime} \\ \zeta_\nu & \zeta_\nu^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Легко установить, что

$$C_2 = 0. \tag{19}$$

В самом деле, при малых τ (больших σ)

$$\zeta_\nu(\sigma) = O(\tau^\nu),\ \zeta_\nu^{(2)} = O(\tau^{-\nu}),\ d\sigma = -\frac{d\tau}{2\tau}O(1), \tag{20}$$
$$f(\sigma) = O(\sigma^2) = O(\ln^2\tau) = O(\tau^{-\varepsilon}),$$

где ε — сколь угодно малая величина.

Итак,

$$\int^{\sigma} f(\sigma')\,\zeta_\nu^{(2)}(\sigma')\,d\sigma' = \int_{\tau}^{(1+2\beta)^{-1}} O(\tau'^{-\nu-1-\varepsilon})\,d\tau', \tag{21}$$

$$\int_{\sigma}^{\infty} f(\sigma')\,\zeta_\nu(\sigma')\,d\sigma' = \int_0^{\tau} O(\tau'^{\nu-\varepsilon-1})\,d\tau' = O(\tau^{\nu-\varepsilon}). \tag{22}$$

Из уравнений (18), (21), (22) следует

$$\delta\zeta_\nu(\sigma) = O(\tau^{-\varepsilon}) + C_2\zeta_\nu^{(2)}(\sigma). \tag{23}$$

Следовательно, если бы не было $C_2 = 0$, то

$$\lim_{\sigma\to\infty} \delta\zeta_\nu(\sigma) = \infty; \tag{23a}$$

что противоречит определению этой функции.

Вычислим теперь C_1. Имеем

$$\delta\zeta_\nu(0) = \frac{4\nu^2}{\Delta}\zeta_\nu^{(2)}(0)\int_0^{\infty} f(\sigma')\,\zeta_\nu(\sigma')\,d\sigma' + C_1\zeta_\nu(0) = 0. \tag{24}$$

Отсюда получим для постоянной

$$C_1 = -\frac{4\nu^2}{\Delta}\frac{\zeta_\nu^{(2)}(0)}{\zeta_\nu(0)}\int_0^{\infty} f(\sigma')\,\zeta_\nu(\sigma')\,d\sigma' \tag{25}$$

и для производной $\delta\zeta_\nu'(0)$:

$$\delta\zeta_\nu'(0) = \frac{4\nu^2}{\Delta}\left\{\zeta_\nu^{(2)\prime}(0)\int_0^{\infty} f(\sigma')\,\zeta_\nu(\sigma')\,d\sigma'\right\} + C_1\zeta_\nu'(0) =$$

$$= -\frac{4\nu^2}{\zeta_\nu(0)}\int_0^{\infty} f(\sigma')\,\zeta_\nu(\sigma')\,d\sigma' = -\frac{4\nu^2}{\lambda(0)}\int_0^{\infty}\lambda\left(\sqrt{4\nu^2 a}\,\sigma'\right)(a\sigma' - K)\,\zeta_\nu(\sigma')\,d\sigma', \tag{26}$$

так что

$$\frac{\zeta_\nu'(0)}{\zeta_\nu(0)} = \sqrt[3]{4a\nu^2}\,\frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} - \frac{4\nu^2}{\lambda(0)}\int_0^{\infty}\lambda\left(\sqrt{4a\nu^2}\,\sigma'\right)(a\sigma' - K)\,\frac{\zeta_\nu(\sigma')}{\zeta_\nu(0)}\,d\sigma'. \tag{27}$$

Однако, согласно Чаплыгину [(1); т. II, стр. 30],

$$0 \leqslant \frac{\zeta_\nu(\sigma)}{\zeta_\nu(0)} \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant (1+2\beta)^{-1} \tag{28}$$

(или $0 < \sigma$).

Следовательно,

$$\int_0^\infty \lambda\left(\sqrt[3]{4a\nu^2}\,\sigma'\right)(a\sigma' - K)\frac{\zeta_\nu(\sigma')}{\zeta(0)}\,d\sigma' \leqslant \int_0^\infty \lambda(\xi)\frac{B\xi^2}{(4a\nu^2)^{2/3}}\frac{d\xi}{(4a\nu^2)^{1/3}} = O\left(\frac{1}{\nu^2}\right). \tag{29}$$

Таким образом, согласно (27),

$$\frac{\zeta'_\nu(0)}{\zeta_\nu(0)} = \sqrt[3]{4a\nu^2}\,\frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} + O(1). \tag{30}$$

Тем самым формула (1) доказана.

Вычисление величины $\frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)}$ на основе формулы (14) и известных свойств Г-функции дает

$$\frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} = -\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\cdot 3^{1/3}. \tag{30a}$$

Вторая лемма вытекает из первой. Она заключается в следующем:

Пусть ψ — ограниченное решение уравнения (4), *определенное в области*

$$\sigma > 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0. \tag{31}$$

Предельные значения при $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$ *пусть будут*

$$\psi(\sigma, 0) = \psi(\sigma, \theta_0) = 0. \tag{32}$$

Тогда существует ядро $K(\theta, \theta')$, *не зависящее от* ψ, *особенности которого определяются уравнением*

$$K(\theta, \theta') = A\left(|\theta - \theta'|^{-1/3} - (\theta + \theta')^{-1/3} - (\theta + \theta' - 2\theta_0)^{-1/3}\right) + O(1), \tag{33}$$

которое позволяет выразить краевые значения ψ *на дуге* $\sigma = 0$ *через краевые значения* $\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}$ *при* $\sigma = 0$, *так что*

$$\psi(0, \theta) = \int_0^{\theta_0} K(\theta, \theta')\,\psi_\sigma(0, \theta')\,d\theta'. \tag{34}$$

Для выполнения уравнения (34) *требуется только, чтобы функция* $\psi_\sigma(0, \theta)$ *была с интегрируемым квадратом.*

Докажем это. Вычислим сперва ядро $K(\theta, \theta')$, предполагая его существование.

В частном случае

$$\psi = \psi_\nu = \frac{\zeta_\nu(\sigma)}{\zeta_\nu(0)}\sin 2\nu\theta \tag{35}$$

имеем

$$\left.\frac{\partial\psi_\nu}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} = \frac{\zeta'_\nu(0)}{\zeta_\nu(0)}\sin 2\nu\theta. \tag{36}$$

Вводим обозначения

$$\vartheta = \frac{\pi}{2\theta_0}\,\theta, \tag{37}$$

$$\lambda_n = \frac{\zeta_\nu'(0)}{\zeta_\nu(0)}. \tag{38}$$

Теперь уравнение (36) можно переписать в виде

$$\psi_\nu(0, \theta) = \frac{\psi_{\nu\sigma}(0, \theta)}{\lambda_n} = \int_0^{\theta_0} K(\theta, \theta')\,\psi_{\nu\sigma}(0, \theta')\,d\theta' \tag{39}$$

или

$$\frac{2\theta_0}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\theta, \theta')\sin 2n\vartheta'\,d\vartheta' = \frac{\sin 2n\,\vartheta'}{\lambda_n}, \tag{40}$$

откуда

$$K(\theta, \theta') = \frac{2}{\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\vartheta \sin 2n\vartheta'}{\lambda_n}. \tag{41}$$

Остается исследовать сходимость этого ряда. Согласно уравнению (30),

$$\lambda_n = \frac{\lambda'(0)}{\lambda(0)} = \sqrt{4a\nu^2}\,[1 + O(n^{-2/3})], \tag{42}$$

$$\frac{1}{\lambda_n} = \frac{\lambda(0)}{\lambda'(0)\sqrt[3]{4a\nu^2}}\,[1 + O(n^{-2/3})]. \tag{42a}$$

Отсюда

$$K(\theta, \theta') = \frac{2}{\theta_0}\,\frac{\lambda(0)}{\lambda'(0)\sqrt[3]{4a}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\vartheta \sin 2n\vartheta'}{\nu^{2/3}} + \sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n\vartheta \sin\,2n\vartheta'\,O(n^{-4/3}). \tag{43}$$

Второй из рядов в правой части сходится равномерно, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\vartheta \sin 2n\vartheta'}{n^{2/3}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n(\vartheta - \vartheta')}{n^{2/3}} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n(\vartheta + \vartheta')}{n^{2/3}} \tag{44}$$

может быть суммирован в явном виде.

Достаточно рассмотреть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^{2/3}} \quad (\varphi \neq 0,\ \varphi \neq 2\pi). \tag{45}$$

Из известной формулы для Г-функции

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{z-1}\,dt = \Gamma(z)$$

вытекает

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) n^{-2/3} e^{ni\varphi} = \int_0^{\infty} x^{-2/3}\,e^{-n(x-i\varphi)}\,dx, \tag{46}$$

откуда

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{n=2}^{\infty} n^{-2/3}\, e^{ni\varphi} = \int_0^{\infty} x^{-1/3}\, \frac{e^{-x+i\varphi}}{1-e^{-x+i\varphi}}\, dx; \tag{47}$$

формула (47) получается из (46) путем суммирования геометрического ряда, если учесть, что

$$|1-e^{-x+i\varphi}| \geqslant \sin\varphi \text{ при } \begin{cases} 0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2}\leqslant\varphi<2\pi \end{cases},$$

$$|1-e^{-x+i\varphi}| < \sin\varphi \text{ при } \frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2},$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\infty} x^{-1/3}\, \frac{e^{N(-x+i\varphi)}}{1-e^{-x+i\varphi}}\, dx \leqslant \frac{1}{|\sin\varphi|}\int_0^{\infty} x^{-1/3}\, e^{-Nx}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{|\sin\varphi|} N^{-2/3} \to 0 \text{ при } N\to 0$$

или, соответственно,

$$\int_0^{\infty} x^{-1/3}\, \frac{e^{N(-x+i\varphi)}}{1-e^{-x+i\varphi}}\, dx \leqslant \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) N^{-2/3}.$$

Взяв действительную часть формулы (47), получаем искомую сумму ряда (45):

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^{2/3}} = \int_0^{\infty} x^{-1/3}\, \frac{e^{-x}\cos\varphi - e^{-2x}}{1-2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}}\, dx. \tag{48}$$

Перейдем к исследованию особенностей функции (48) при $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$. Достаточно, конечно, исследовать функцию (48) вблизи $\varphi=0$. Имеем:

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^{2/3}} = \int_1^{\infty} x^{-1/3}\, \frac{e^{x}\cos\varphi - 1}{e^{2x}-2e^{x}\cos\varphi+1}\, dx +$$

$$+\int_0^{1} x^{-1/3}\, \frac{(1+x)\cos\varphi - 1}{(1+x)^2-2(1+x)\cos\varphi+1}\, dx + O(1) =$$

$$= \int_0^{1} x^{-1/3}\, \frac{(1+x)\cos\varphi - 1}{(1+x)^2-2(1+x)\cos\varphi+1}\, dx + O(1) =$$

$$= \int_0^{1} \frac{x^{2/3}\, dx}{x^2+\varphi} + O(1) = \frac{3}{\sqrt[6]{\varphi}}\int_0^{\varphi^{-1/3}} \frac{z^4 dz}{z^6+1} + O(1). \tag{49}$$

Последний интеграл проще всего вычисляется при помощи вычетов*

Далее,

$$\int_0^{\varphi^{-1/3}} \frac{z^4 dz}{z^6+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi^{-1/3}} \frac{z^4 dz}{z^6+1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2\pi i}{6}\left[e^{-\frac{\pi i}{6}} + e^{-\frac{\pi i}{2}} + e^{-\frac{5\pi i}{6}}\right] + \right.$$

$$\left. + O\left(\varphi^{1/3}\right)\right\} = \frac{\pi}{3} + O\left(\varphi^{1/3}\right). \tag{50}$$

(Первые члены здесь происходят от вычетов, а член $O(\varphi^{1/3})$ от интеграла по полуокружности радиуса $\varphi^{-1/3}$).

Итак, окончательно

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n^{2/3}} = \frac{\pi}{\sqrt[3]{\varphi}} + \frac{\pi}{\sqrt[3]{2\pi-\varphi}} + O(1), \tag{51}$$

что дает для ядра $K(\theta, \theta')$

$$K(\theta,\theta') = \frac{\lambda(0)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\lambda'(0)\, a^{1/3}}\left\{|\theta-\theta'|^{-1/3} - (\theta+\theta')^{-1/3} - \right.$$

$$\left. - (2\theta_0 - \theta - \theta')^{-1/3}\right\} + O(1). \tag{52}$$

Что полученное ядро $K(\theta, \theta')$ действительно выражает краевые значения $\psi(\theta, 0)$ через $\psi_0(\theta, 0)$, устанавливается сперва в том случае, когда ψ_0 выражается через конечный тригонометрический ряд, а в общем случае путем предельного перехода, пользуясь представлением ψ в виде ряда Чаплыгина.

Таким образом, вторая лемма доказана.

Аналогичная лемма доказана Трикоми для уравнения

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Она играет у него существенную роль при сведении рассматриваемой задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Перейдем теперь к вопросу о возможности представления решения задачи истечения при помощи рядов типа Чаплыгина.

Напомним формулировку этой задачи. Ищется ограниченное решение уравнения (3) в области плоскости (u, v) (см. фиг. 4) такое, что

$$\psi = 0 \text{ на } OC, \quad \psi = -\frac{Q}{2} \text{ на } OA'B'. \tag{53}$$

---

* За это замечание, сильно упростившее первоначальный вывод, выражаю благодарность А. Никольскому.

Рассмотрим теперь другое решение ψ' уравнения (3), определяемое уравнением

$$\psi' = \psi + \frac{Q}{2}\frac{\theta}{\theta_0}. \tag{54}$$

Это решение удовлетворяет следующим условиям Трикоми:

$$\left.\begin{aligned} \psi' &= 0 \text{ на } OC, \\ \psi' &= 0 \text{ на } OA', \\ \psi' &= \frac{Q}{2}\frac{\theta}{\theta_0} - \frac{Q}{2} \text{ на } A'B'. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Предположим, что это решение существует и что при $\sigma = 0$ $\frac{\partial\psi'}{\partial\sigma}$ удовлетворяет условию, доказанному Трикоми в случае уравнения (1)*

$$g(\theta) = \left.\frac{\partial\psi'}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=0} = O(\theta^{-1/3}) \tag{56}$$

или вообще, чтобы функция $g(\theta)$ была с интегрируемым квадратом. Тогда

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2\nu\theta, \tag{57}$$

где

$$\nu = \frac{\pi n}{2\theta_0} \tag{57a}$$

и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходится.

Тогда, согласно Чаплыгину, решение ψ' в секторе круга OCA' будет

$$\psi' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n}\frac{\zeta_\nu(\sigma)}{\zeta_\nu(0)} \sin 2\nu\theta, \tag{58}$$

где

$$\lambda_n = \frac{\zeta'_\nu(0)}{\zeta_\nu(0)}. \tag{58a}$$

В частности, на дуге CA'

$$\psi'(0, \theta) = f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n} \sin 2\nu\theta. \tag{59}$$

Как показали результаты, полученные Чаплыгиным, сходимость ряда (58) в секторе OCA' обеспечивается; в характеристическом треугольнике $CA'B'$ о сходимости ряда на основе этих результатов еще ничего нельзя сказать. Нами, однако, было доказано в другой работе (7), что при непрерывном изменении данных Коши на дуге переходной линии ($\sigma = 0$) решение уравнения Трикоми в соответствующем характеристиче-

* В случае аналитических сопел Лаваля это условие действительно имеет место.

ском треугольнике меняется непрерывно. Отсюда следует, что поставленная нами задача Трикоми решается в виде ряда

$$\psi = -\frac{Q}{2}\frac{\theta}{\theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\zeta_\nu(\sigma)}{\zeta_\nu(0)} \sin 2\nu\theta, \tag{60}$$

причем коэффициенты a_n определяются из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\zeta_\nu[\sigma(\theta)]}{\zeta_\nu(0)} \sin 2\nu\theta = \frac{Q}{2}\left(\frac{\theta}{\theta_0} - 1\right) \text{ при } \frac{\theta_0}{2} < \theta < \theta_0, \tag{61}$$

где $\sigma = \sigma(\theta)$ означает зависимость σ от θ вдоль дуги эпициклоиды.

Таким образом, наша задача при приведенных предположениях сведена к решению бесконечной системы обыкновенных линейных уравнений.

Эту систему можно было бы пытаться решить приближенно, сохраняя только конечное число членов в бесконечной сумме (61) и требуя вместе с тем этих приближенных уравнений только для конечного числа соответственно выбранных значений θ.

Поступило
16.XI.1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чаплыгин С. А., Полное собрание сочинений, т. II — «О газовых струях» АН СССР, 1933.

[2] Busemann, Gasdynamik, Handbuch d. Experimentalphysik, Bd. IV.

[3] Tricomi F., Sulle equazioni alle derivate parziali di 2° ordine, di tipo misto, Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei, ser. V, vol. XIV, fasc. VII (1923).

[4] Христианович С. А., О сверхзвуковых течениях газа, Труды ЦАГИ, вып. 543.

[5] Франкль—Христианович—Алексеева, Основы газовой динамики, Труды ЦАГИ, вып. 364.

[6] Кибель И.А. Газовая динамика (Кочин—Кибель—Розе, «Теоретическая гидромеханика», т. II).

[7] Франкль Ф. И., О задаче Коши для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с начальными данными на переходной линии, Изв. Ак. Наук СССР, 8 (1944), 195—224.

F. FRANKL. ON THE PROBLEMS OF CHAPLYGIN FOR MIXED SUB- AND SUPERSONIC FLOWS

SUMMARY

In this article two problems are extended to the case of mixed sub- and supersonic flows, which were established by S. A. Chaplygin in the case of subsonic flows in his work «On gas jets» (1902).

The first problem is that of a supersonic jet, flowing out of a vessel, bounded by flat walls. It is shown, that this problem may be reduced to a boundary problem for mixed elliptico-hyperbolic equations, given by F. Tricomi (1923). In our case, the problem is established in the plane of the hodograph relative to Chaplygin's differential equation.

The second problem is that of a supersonic flow over a wedge in the case, where there is a zone of local subsonic velocitities before the wedge. This problem is reduced to a new boundary problem, similar to that of Tricomi.

The uniqueness of solution of these two problems is proved in our paper; but the theorem of existence is not yet proved.

Several lemmas are also proved in our paper which will be useful for further research.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 145—158 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, КАК РАЗВИТИЕ ИДЕЙ ЧЕБЫШЕВА

Статья содержит изложение доклада на заседании Отделения физико-математических наук юбилейной сессии Академии Наук СССР, посвященной 220-летию Академии Наук.

§ 1. Конструктивной теорией функций мы называем направление теории функций, которое ставит себе целью дать возможно более простую и удобную основу для качественного изучения и вычисления как эмпирических функций, так и всяких функций, являющихся решениями естественно поставленных задач математического анализа (например, решений дифференциальных или функциональных уравнений). Это направление весьма близко по духу математическому творчеству Чебышева; не удивительно поэтому, что современная конструктивная теория функций в большой степени использует и развивает идеи нашего покойного великого сочлена.

Исследования Чебышева в области математического анализа, связанные с важными конкретными задачами, группируются в основном около трех проблем.

1. Проблема определения выражения, зависящего от данного конечного числа параметров, например, многочлена $P_n(x)$ степени n, из всех многочленов степени n наименее уклоняющегося от рассматриваемой функции $f(x)$ в том смысле, что уклонение, т. е. максимум модуля разности

$$E_n f(x) = \max |f(x) - P_n(x)|$$

в данном промежутке, должно быть наименьшим.

2. Задача интерполирования по способу наименьших квадратов.

3. Проблема моментов.

Первая проблема, как известно, была поставлена Чебышевым в связи с его теорией механизмов. Вторая имела целью усовершенствование способа наименьших квадратов Лежандра при построении эмпирических формул, соответствующих большому числу наблюдений, и послужила исходным пунктом для создания Чебышевым теории разложения функций по ортогональным полиномам.

Третья — проблема моментов, поставленная Чебышевым для возможно общего доказательства предельной теоремы теории вероятностей, имела целью установить, в каких пределах должна быть заключена вероятность нахождения случайной величины x в конечном промежутке (a, b), если известны математические ожидания ее последовательных степеней.

§ 2. В мою задачу не входит подробное рассмотрение отдельных результатов, полученных Чебышевым и после него другими авторами. Я хотел бы лишь вкратце обрисовать обширную область конструктивной теории функций, примыкающую к вышеуказанным трем проблемам.

В настоящее время известны вычислительные приемы, позволяющие разрешить с любой степенью точности задачу нахождения многочлена степени n, наименее уклоняющегося от произвольно заданной функции, непрерывной в данном конечном промежутке. Однако с увеличением степени n практически вычисления чрезвычайно усложняются и тогда особо важное значение получают теоретические асимптотические методы, соответствующие бесконечному возрастанию степени n и нахождению многочленов $R_n(x)$ степени n, дающих приближения того же порядка, что и наилучшие приближения $E_n f(x)$.

Как известно, пользуясь интегралом, связанным с уравнением теплопроводности, Weierstrass показал в конце прошлого столетия, что функции $f(x)$ — непрерывные в данном конечном промежутке — характеризуются тем, что они могут быть равномерно приближены при помощи многочленов возрастающих степеней, т. е. тем, что $E_n f(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, многочлены являются естественным конструктивным элементом для изучения непрерывных функций на конечном интервале, и многочлены, наименее уклоняющиеся от данной функции, потенциально содержат все ее свойства. В связи с этим особо важное значение имеет исследование качественных или экстремальных свойств многочленов, подчиненных определенным условиям. В частности, фундаментальным является классический результат Чебышева, согласно которому многочлен степени n вида

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n,$$

старший коэффициент которого равен 1, в промежутке $(-1, +1)$ не может оставаться по абсолютному значению менее, чем $\frac{1}{2^{n-1}}$; при этом единственным многочленом этого вида, для которого уклонение от нуля не превышает $\frac{1}{2^{n-1}}$, является *многочлен Чебышева*

$$\frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

Другим весьма важным для конструктивной теории функций результатом оказалась теорема А. А. Маркова, дающая ответ на вопрос, поставленный ему Менделеевым: каково наибольшее возможное абсолютное значение производной многочлена степени n в заданном промежутке, где сам многочлен не превышает по абсолютной величине единицы?

Эта новая алгебра многочленов, основанная Чебышевым, обогатилась впоследствии открытием ряда аналогичных теорем, играющих важную роль в конструктивной теории функций. На них опирается возможность установления прямой связи между наилучшими приближениями функции и ее дифференциальной природой, которая открывает общий подход к последовательному решению первой проблемы Чебышева и позволяет дать единый принцип для классификации всех непрерывных функций по степени их близости к многочленам. В частности, этим была положена основа новой теории *аналитических* функций вещественной переменной, в которой аналитическая функций $f(x)$ характеризуется особо быстрым стремлением к нулю $E_n f(x)$, а именно тем, что при возрастании n ее наилучшие приближения $E_n f(x)$ в данном промежутке убывают быстрее, чем в геометрической прогрессии со знаменателем $\rho < 1$. Точнее говоря, для того, чтобы непрерывная функция $f(x)$, заданная, например, в промежутке $(-1, +1)$, была регулярной функцией комплексной переменной внутри эллипса D с фокусами в точках $-1, +1$, сумма полуосей которого равна r, необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n f(x)} = \frac{1}{r}. \tag{1}$$

Замечательное свойство аналитической функции, выделяющее ее из общей совокупности непрерывных функций, как известно, состоит в том, что она представляет собою органическое целое, вполне определенное во всей области существования, если она задана в любом произвольно малом промежутке.

С точки зрения вышепредложенной классификации естественным продолжением непрерывной функции $f(x)$, заданной в интервале (a, b), на большую область $(a, b+\varepsilon)$ следует считать такое ее продолжение, при котором ее близость к соответствующим многочленам на расширенном промежутке была бы возможно тесной. Иными словами, наилучшие приближения $E_n[f(x); a, b+\varepsilon]$, относящиеся к расширенному промежутку $(a, b+\varepsilon)$, должны при $n \to \infty$ возможно быстрее стремиться к нулю. Благодаря одному свойству многочленов, открытому Чебышевым, было не трудно показать, что в случае (1), когда $E_n[f(x); a, b]$ не превосходят членов некоторой геометрической прогрессии со знаменателем $\rho < 1$, такое наилучшее продолжение функции $f(x)$ на несколько больший промежуток всегда возможно и притом единственным образом. Это и есть аналитическое продолжение.

Если убывание $E_n[f(x); a, b]$ не столь значительно, т. е. если $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n[f(x); a, b]} = 1$, то задача вообще не имеет единственного решения, и лишь для некоторых классов функций возможно поставить ее так, чтобы в случае существования решения оно было единственным, например, если $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n[f(x); a, b]} < 1$. Такие классы

функций называют *квазианалитическими*; они были предметом многих тонких исследований последнего времени, имеющих большую теоретическую ценность. Однако вряд ли можно ожидать, что роль квазианалитических функций в анализе будет столь же значительной, как аналитических функций.

§ 3. Напомним теперь вкратце основные результаты, относящиеся к нахождению порядка убывания и точного асимптотического значения наилучших приближений конкретно заданной функции.

Из равенства (1) легко видеть, что порядок убывания $E_n f(x)$ для аналитических функций в основном определяется полусуммой осей эллипса D, проходящего через ближайшую особую точку функции $f(x)$, а асимптотическое значение E_n зависит только от свойств особых точек функции, находящихся на периферии этого эллипса, подобно тому, как порядок убывания и асимптотическое значение коэффициентов строки Тейлора зависит от особенностей функции, лежащих на круге сходимости.

Многие оценки, относящиеся к наилучшим приближениям, получаются благодаря использованию разложения функций по многочленам Чебышева

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x);$$

здесь и далее для определенности мы будем рассматривать интервал $(-1, +1)$. Эти разложения, связанные со второй проблемой Чебышева, получаются при рассмотрении задачи обращения в минимум

$$\int_{-1}^{+1} \frac{[f(x) - R_n(x)]^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

— взвешенного квадратичного уклонения функции $f(x)$ на указанном интервале —, решением которой является

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x),$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Если обозначить через $I_n f(x)$ приближение функции $f(x)$, даваемое многочленом $R_n(x)$, то, очевидно, $E_n f(x) < I_n f(x)$. С другой стороны, благодаря неравенству Лебега для любой функции

$$E_n f(x) \geqslant \frac{C}{\ln(n+1)} I_n f(x) \qquad \left(C \simeq \frac{\pi^2}{4}\right).$$

Таким образом, порядок наилучшего приближения почти совпадает с порядком приближения, осуществляемого разложением по многочленам Чебышева, и обычно совпадает с последним.

Асимптотическое значение приближения

$$I_n f(x) = \max |f(x) - \sum_k a_k T_k(x)|$$

вычисляется без особых затруднений и во многих случаях удалось установить простую зависимость между асимптотическими значениями $E_n f(x)$ и $I_n f(x)$. Отметим, например, случай, когда ближайшая особенность функции $f(x)$ есть алгебраическая или логарифмическая особая точка c, $|c| > 1$, находящаяся на вещественной оси. В этом случае известны асимптотические значения E_n и I_n и связь между ними определяется соотношением

$$E_n f(x) \simeq \frac{1}{2} I_n f(x) \left(1 + \sqrt{\frac{|c|-1}{|c|+1}}\right).$$

Из этого равенства видно, между прочим, что при бесконечном удалении ближайшей особой точки, т. е. при соответствующем превращении функции $f(x)$ в целую функцию, приближения E_n и I_n асимптотически совпадают, и, напротив, отношение $\frac{E_n}{I_n}$ убывает по мере приближения точки c к краю отрезка $(-1, +1)$. Можно было бы ожидать, что при $|c| = 1$ отношение $\frac{E_n}{I_n} \simeq \frac{1}{2}$. В действительности это не так, и исследование случая, когда особенности функции $f(x)$ находятся на самом отрезке, на котором мы приближаем функцию, значительно труднее. Однако решение этой задачи за последние годы удалось продвинуть значительно вперед.

§ 4. Первый этап на пути к решению этой задачи был осуществлен более 30 лет назад, когда было установлено, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n E_n |x| = \mu_1$$

(приближенное значение μ_1 равно 0,28). Недавно этот результат был дополнен следующим образом. Установлено, что

$$\lim_{n\to\infty} n E_n |x-c| = \mu_1 \sqrt{1-c^2} \quad (|c| < 1). \tag{2}$$

Отметим следующее любопытное следствие из соотношения (2): если вершина c угла находится на отрезке $(-1, +1)$, а стороны проходят через точки $(-1, a)$ и $(+1, b)$, где a и b — положительные числа, то минимум асимптотического значения его наилучшего приближения на отрезке $(-1, +1)$ достигается, когда точка c расположена так, что угол падения равен углу отражения.

Далее, аналогичный результат получен для $E_n |x-c|^p$ где p — любое положительное число, а именно, существует

$$\lim_{n=\infty} n^p E_n |x-c|^p = \mu_p (1-c^2)^{\frac{p}{2}},$$

где μ_p — определенные константы.

Как видно из этих асимптотических равенств, порядок убывания наилучшего приближения $|x-c|^p$ тем медленнее, чем меньше p. Поэтому, если на отрезке $(-1, +1)$ имеется несколько особых точек с различными показателями p, то асимптотическое значение наилучшего приближения будет определяться лишь теми точками, для которых показатель p имеет наименьшее значение.

Определение асимптотического значения наилучшего приближения в случае, когда на интервале $(-1, +1)$ расположено несколько особых точек указанного типа с одним и тем же показателем p, получается просто, хотя и несколько неожиданно, следующим образом. Положим для определенности $p=1$, так что

$$f(x)=\sum_{k=1}^{s} A_k |x-c_k| \quad (-1 \leqslant c_k \leqslant +1)$$

представляет собой произвольно заданную ломаную линию с абсциссами c_k вершин внутри или на концах интервала $(-1, +1)$. В таком случае

$$E_k f(x) \simeq \frac{\mu_1}{n} M,$$

где

$$M=\max |A_k \sqrt{1-c_k^2}| \quad (k=1, \ldots, s),$$

так как возможно приблизить асимптотически наилучшим образом каждый из членов

$$A_k |x-c_k|$$

при помощи многочлена n-ой степени $R_{nk}(x)$ $(k=1, \ldots, s)$ так, чтобы вне сколь угодно малого промежутка, заключающего точку c_k, разность

$$R_{nk}(x)-A_k |x-c_k|$$

оставалась во всех остальных точках отрезка $(-1, +1)$ сколь угодно малой по сравнению с $E_n[A_k |x-c_k|]$. Поэтому, складывая все эти многочлены, мы получаем многочлен степени n, уклонение которого от $f(x)$ асимптотически не превышает значения $\frac{\mu_1}{n} M$.

Отсюда, между прочим, видно, что существует бесконечное множество продолжений ломаной линии, обеспечивающих то же самое быстрейшее асимптотическое убывание наилучшего приближения, что и прямолинейное продолжение ее крайних сторон. В соответствии со сказанным ранее о продолжении непрерывных функций, ломаная линия не имеет единственного наилучшего продолжения.

§ 5. Благодаря замене переменной $x=\cos\theta$ многочлен степени n превращается в тригонометрическую сумму n-го порядка относительно $\cos\theta$. Поэтому все результаты, относящиеся к наилучшему приближению произвольной непрерывной функции, заданной в интервале $(-1, +1)$, посредством могочленов, приводят к соответствующим предложениям о наилучшем приближении любых непрерывных периодических

функций с периодом 2π посредством конечных тригонометрических сумм.

Несмотря на фактическую эквивалентность задачи приближения непрерывных периодических функций посредством конечных тригонометрических сумм задаче приближения непрерывных функций на конечном интервале при помощи многочленов, принципиально эти задачи отличаются тем, что в первой задаче рассматриваемая область приближения бесконечна. В общем случае вопрос о приближении непрерывной функции на всей бесконечной оси вызывает особые трудности, так как элементарная функция — многочлен, как и в случае периодических функций, не может служить для этой цели. Возможно, правда, следуя примеру Чебышева, рассматривавшего задачу взвешенного наилучшего приближения, ввести соответствующие неотрицательные веса $\tau(x)$ с тем, чтобы для тех или иных функций $f(x)$ возможно было подобрать многочлены $P_n(x)$, для которых взвешенные уклонения

$$J_n f(x) = \max \left| [f(x) - P_n(x)] \tau(x) \right|$$

стремились бы к нулю при возрастании n для всех значений x от $-\infty$ до $+\infty$. Обозначив произведение

$$f(x)\tau(x) = F(x),$$

мы видим, что задача обращения в минимум $J_n f(x)$ равнозначна задаче нахождения многочлена $P_n(x)$ степени n по условию, чтобы произведение $P_n(x)\tau(x)$ наименее уклонялось от $F(x)$ на всей оси. В предположении, что $F(x)$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $x \to \pm\infty$, установлены некоторые весьма близкие между собой необходимые и достаточные условия скорости убывания $\tau(x)$ на бесконечности для того, чтобы рассматриваемые наилучшие приближения стремились к нулю при возрастании n. Для этого достаточно, чтобы

$$\tau(x) \leqslant \tau_1(x),$$

где $\frac{1}{\tau_1(x)}$ — четная целая функция первого рода с неотрицательными коэффициентами. Напротив, если

$$\tau(x) \geqslant \tau_0(x),$$

где $\frac{1}{\tau_0(x)}$ — целая функция рода нуль, то наилучшие приближения не могут стремиться к нулю.

Возможно также в качестве элементарных функций, приближающих непрерывную функцию на всей оси, ввести рациональные дроби. Этот вопрос также был предметом исследований последних лет, но, несмотря на ряд полученных важных результатов, еще не исчерпан.

Заметим только, что наилучшее приближение функции посредством рациональных дробей требует во всяком случае, чтобы прибли-

жаемая функция стремилась к определенному пределу при $x \to \pm\infty$ и, в частности, невозможно для периодических функций.

§ 6. Рассмотренная выше задача о наилучшем асимптотическом приближении $|x|^p$ на отрезке $(-1, +1)$ естественно привела к рассмотрению приближения функций на всей оси при помощи специального класса целых трансцендентных функций, обобщающего элементарные тригонометрические функции $\sin px$ и $\cos px$. Это функции

$$S(x) = \sum_k \frac{a_k}{k!} x^k$$

так называемого *экспоненциального типа* или *конечной степени*, обладающие свойством:

$$\lim_{k \to \infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} = p.$$

Число p называется *степенью* функции $S(x)$. Таким образом, e^{px}, $\cos px$, $\sin px$ являются функциями экспоненциального типа степени p.

Оказалось, что указанное выше асимптотическое значение

$$n^p E_n |x|^p$$

равно в точности наилучшему приближению $|x|^p$ на всей оси при помощи функций экспоненциального типа первой степени.

Наиболее глубоким основанием необходимости введения функций конечной степени в качестве конструктивного элемента изучения непрерывных функций на всей оси является следующее обстоятельство. Как известно, всякая непрерывная на конечном отрезке функция является в то же время ограниченной и равномерно непрерывной на всем отрезке. Напротив, непрерывность функций на всей оси не влечет за собой этих двух свойств. Однако при изучении непрерывных ограниченных функций на всей оси естественно выделить в первую очередь те из них, которые подобно периодическим, почти периодическим и алгебраическим функциям являются также равномерно непрерывными на всей оси. Условие же, необходимое и достаточное для равномерной непрерывности функции, непрерывной и ограниченной на всей оси, состоит в том, что ее наилучшие приближения на всей оси при помощи функций экспоненциального типа степени p стремятся к нулю при неограниченном возрастании степени p.

Эта теорема тесно связана с одним из важнейших экстремальных свойств функций конечной степени, широко обобщающим соответствующие ранее известные свойства многочленов и конечных тригонометрических сумм, а именно, если функция $S_p(x)$ конечной степени p такова, что при всех значениях x, $|S_p(x)| \leqslant 1$, то при любом целом n для n-ой производной имеем $|S_p^{(n)}(x)| \leqslant p^n$, причем знак равенства в последнем неравенстве достигается только когда

$$S_p(x) = \cos p(x - \alpha),$$

где α — произвольная постоянная.

Отметим еще, что в случае периодических функций задача о наи-

лучшем приближении посредством функций конечной степени совпадает с соответствующей задачей приближения посредством конечных тригонометрических сумм, так что, например, функция ниже первой степени, наилучше приближающая на всей оси периодическую функцию с периодом, не превосходящим 2π, есть постоянная.

Из указанной теоремы о максимуме производной функции конечной степени вытекает другое важное экстремальное свойство этих функций: если функция $S_p(x)$ степени p при всех вещественных x удовлетворяет условию $|S_p(x)| \leqslant 1$, то $|S_p(x \pm ic)| \leqslant e^{pc}$ при всяком $c > 0$. С другой стороны, обозначая через $A_p f(x)$ наилучшее приближение функции $f(x)$ на всей оси при помощи функций степени p, можно доказать, что

$$A_p \left(\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + c^2}\right) = \frac{e^{-pc}}{2c^2} \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 c^2}.$$

Из этих двух свойств заключаем, что условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $f(x)$ была аналитической, регулярной и ограниченной внутри бесконечной полосы $-c \leqslant y \leqslant +c$, переставая быть регулярной вне этой полосы, состоит в том, что

$$\limsup \sqrt[p]{A_p f(x)} = e^{-c} < 1. \qquad (1 \text{ bis})$$

Таким образом, подобно тому как функции аналитические на конечном отрезке выделяются среди других непрерывных функций наиболее быстрым убыванием наилучших приближений посредством многочленов возрастающих степеней, аналитические функции на всей вещественной оси характеризуются той же самой наибольшей близостью к функциям конечной степени.

Существует также полная аналогия между соответствующими асимптотическими значениями наилучших приближений указанных двух категорий для функций, обладающих заданными особенностями. В частности, возможность аналитического продолжения (с сохранением ограниченности) функции $f(x)$, заданной в конечном промежутке, на всю вещественную ось зависит от того, возможно ли такое продолжение функции $f(x)$, для которой $E_n f(x)$ убывает в геометрической прогрессии (1) так, чтобы и $A_n f(x)$ убывали в геометрической прогрессии (1 bis). Очевидно, что если такое продолжение возможно, то оно единственно.

Существуют широкие классы задач анализа, которые естественно приводят к рассмотрению функций, аналитических и ограниченных для всех вещественных значений переменной. В то же время изучение свойств и особенностей этих функций в комплексной области представляет непреодолимые трудности. Таковы, например, функции, определяемые дифференциальными уравнениями небесной механики. В силу сказанного, при интегрировании таких уравнений целесообразно использовать в качестве конструктивного элемента, приближающего неизвестную функцию, ограниченные функции конечной степени так же и в случаях, когда нет периодичности или почти периодичности.

Известно также, что существуют классы дифференциальных уравнений в частных производных, все решения которых являются аналитическими функциями независимых переменных.

§ 7. Этих примеров достаточно для того, чтобы признать, что проблема исследования свойств аналитических функций в вещественной области приобретает особый интерес. Одним из подходов к ней является изучение тех простых конструктивных элементов—многочленов и функций конечной степени, о которых только что была речь, и свойств приближений при их посредстве.

Но существует и другой путь, который связан с непосредственеиой характеристикой функций посредством соответствующих неравенств. Например, из известной формулы Коши — Адамара о радиусе сходимости строки Тейлора вытекает без труда предложение: для аналитичности на некотором конечном промежутке (a, b) функции $f(x)$ вещественной переменной x необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{\max \left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|} < \infty.$$

Это условие можно заменить другим, из которого исключается непосредственное рассмотрение быстроты возрастания последовательных производных и даже самое предположение об их существовании.

Назовем функцию $f(x)$ *абсолютно монотонной* в промежутке $(0, r)$, если все ее последовательные конечные разности в этом промежутке неотрицательны. Оказывается, что в этом случае она бесконечно дифференцируема и представима в виде строки Тейлора с неотрицательными коэффициентами, сходящейся внутри круга с центром в точке 0 радиуса r. Таким образом, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функциа $f(x)$ была аналитической на отрезке $(0, r)$ и регулярной внутри круга радиуса r, состоит в том, что в промежутке $(0, r)$ $f(x)$ есть разность двух абсолютно монотонных функций.

Из сказанного видно, что аналитические функции вещественной переменной представляют собой весьма частный класс функций с ограниченной вариацией, логически естественно возникающий из требования ограниченности вариации для всех последовательных производных. С этой новой точки зрения абсолютно монотонные функции являются простейшим объектом исследования теории аналитических функций в действительной области, причем возможиость продолжения абсолютно монотонной функции в положительном направлении определяется требованием неотрицательности всех ее производных. Дальнейшее продолжение для $x > r$ становится невозможным либо тогда, когда сама функция $f(x)$ или одна из ее производных становится бесконечной, либо если радиус сходимости строки Тейлора в точке r равен нулю. В последнем случае абсолютно монотонная функция $f(x)$ осуществляет суммирование расходящегося ряда Тейлора, соответствующего особой точке r, на некотором промежутке слева. Эта задача весьма близка к упомянутой вначале проблеме моментов, занимавшей Чебышева.

По существу она эквивалентна последней, когда промежуток абсолютной монотонности простирается влево до $-\infty$. Действительно, можно показать, что всякая функция $f(x)$, абсолютно монотонная до $-\infty$, выражается интегралом

$$f(x)=\int_0^\infty e^{\zeta x}\,d\Psi(\zeta),$$

где $\Psi(\zeta)$ — произвольная монотонная функция. Таким образом, например, в точке $x=0$ функция $f(x)$ и ее последовательные производные совпадают с соответствующими моментами:

$$f^{(k)}(0)=\int_0^\infty \zeta^k\,d\Psi(\zeta),$$

и задача моментов, состоящая в определении монотонной функции $\Psi(\zeta)$, равнозначна определению абсолютно монотонной функции $f(x)$. Неравенствам Чебышева при условии, что заданы первые $n+1$ моментов $(k=0,\ldots,n)$, устанавливающим пределы, между которыми должна находиться разность $\Psi(b)-\Psi(a)$ $(b>a>0)$, соответствуют неравенства, которым подчиняется абсолютно монотонная функция $f(x)$ при всех значениях x, если заданы ее значение и значения n ее последовательных производных в некоторой точке. Экстремальные значения абсолютно монотонной функции осуществляются при этом соответствующими конечными экспоненциальными полиномами

$$\sum_k A_k e^{\alpha_k x}, \quad A_k>0, \quad \alpha_k\geqslant 0.$$

Например, функция e^x из всех абсолютно монотонных от $-\infty$ до $+\infty$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию $f(0)=f'(0)=1$, при всех x получает наименьшее значение, т. е. $f(x)\geqslant e^x$, так что абсолютно монотонная функция, совпадающая с e^x еще в одной точке, тождественно равна e^x.

Весьма важным является вопрос единственности в проблеме моментов, который в нашей трактовке соответствует вопросу об однозначной определенности абсолютно монотонной функции по ее значениям и значениям всех ее производных в заданной точке. Не останавливаясь на формулировке относящихся сюда общих результатов, упомянем о связи этого вопроса с теорией квазианалитических функций. При этом следует, однако, обратить внимание на то, что в то время как при суммировании расходящихся степенных рядов квазианалитическими функциями квазианалитичность имеет место во всем промежутке суммирования, здесь на всем промежутке суммирования, за исключением единственной особой точки 0, функция должна быть аналитической и вдобавок абсолютно монотонной, но рост последовательных производных в этой особой точке, в противоположность условию квазианалитичности, ничем не ограничен. Условия, налагаемые на последовательные производные $f^{(n)}(0)$ и вытекающие из абсолютной монотонности до

$-\infty$ функции $f(x)$, являются весьма ограничительными; они естественно ослабляются, если промежуток конечен, и тем слабее, чем меньше промежуток абсолютной монотонности. Решениями соответствующих экстремальных задач для функций, абсолютно монотонных в конечном промежутке и удовлетворяющих конечному числу условий (например, заданным в определенной точке значением функции и n ее последовательных производных), являются в данном случае вместо упомянутых экспоненциальных полиномов соответствующие обыкновенные алгебраические многочлены с положительными коэффициентами.

§ 8. Упомянем еще о следующем обобщении абсолютной монотонности функций, которое приводит к интересному классу аналитических функций, а именно к классу *регулярно монотонных* функций. Если вместо того, чтобы требовать неотрицательности всех производных в данном интервале, мы потребуем лишь, чтобы ни одна из производных не меняла знак (заметим, что здесь также нет надобности предполагать существование производных и достаточно подчинить тому же условию последовательные конечные разности), то такая функция также оказывается аналитической в рассматриваемом промежутке и регулярной по меньшей мере внутри круга, имеющего данный отрезок своим диаметром. Такие функции мы называем регулярно монотонными, и здесь я хотел бы остановиться лишь на одном типе регулярно монотонных функций, в котором чередование знаков последовательных производных в некотором промежутке совпадает с чередованием знаков последовательных производных $\sin x$ в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. положительные и отрицательные производные чередуются группами по две. Этот специальный класс регулярно монотонных функций, который назовем *циклически монотонными*, замечателен тем, что все эти функции оказываются целыми трансцендентными функциями экспоненциального типа конечной степени, о которых мы говорили раньше. В частности, циклическая монотонность в промежутке длины $\frac{\pi}{2}$ влечет за собой следствие, что функция — не выше первой степени. И, с другой стороны, всякая функция первой степени представима в виде разности между двумя циклически монотонными функциями в любом промежутке длины $< \frac{\pi}{2}$, но не может быть представлена в таком виде в промежутке, большем $\frac{\pi}{2}$.

Область мыслимых математических функций неизмеримо обширнее конкретных функций, встречающихся в действительности, и одной из труднейших и важнейших задач теории функций является выбор путеводной нити, обеспечивающей прочную связь между абстрактным миром математики и естествознанием. Все изложенные выше исследо-

вания проникнуты этим стремлением, и то обстоятельство, что рассмотренные выше классы функций являются естественным обобщением важнейших элементарных функций, служит, как мне кажется, залогом плодотворности их изучения. В заключение считаю не лишним указать, что все идеи и основные результаты, о которых шла речь, являются почти целиком достижениями русской и советской математической мысли.

S. BERNSTEIN. CONSTRUCTIVE THEORY OF FUNCTIONS AS A DEVELOPMENT OF TCHEBYCHEF'S IDEAS

SUMMARY

By the constructive theory of functions we mean the branch of the general theory of functions, the aim of which is to give a basis for the study of functions that are solutions of the problems raised in a natural way in the mathematical analysis. The constructive theory of functions uses and develops in the high degree Tchebychef's ideas. Tchebychef's investigations in the mathematical analysis connected with practically important concrete problems center about the following three fundamental problems:

1. The best approximation of functions.
2. Interpolation by the least squares method.
3. Problem of moments.

The principal constructive elements for the first two problems are polynomials. The polynomials approximating in the best a given continuous functions on a finite interval tend uniformly to this function as their degrees tend to infinity and all the properties of the limit function are latently inherent in the approximating polynomials. In this connection, a great importance is to be attached, on the one hand, to the investigations, initiated also by Tchebychef, of qualitative or extremal properties of the polynomials subjected to certain conditions, and, on the other hand, to the characterization of the functions by the degree of proximity to their best approximating polynomials. This viewpoint gives rise to a unique classification of continuous functions of one real variable.

Analytic functions can be defined from this viewpoint as those that deviate in the least from the polynomials. The analytic continuation (or its generalization) is such a continuation of a function, for which the proximity to the polynomials of increasing degree is the closest. The connection between the differential properties of a function and its best approximations yields an approach to the first Tchebychef's problem. Thereby the solution of the second problem, that has lead Tchebychef to the development of functions by several orthogonal polynomials, can often be used for approximate solution of the more difficult first problem.

The solution of the best approximation problem gets more complicated as n increases; a remarkable simplification, however, takes place

in the case $n \to \infty$. This asymptotic problem of the best approximation of functions on a given interval by polynomials of degree n is solved for all practically important functions. The solution of the last problem is connected, in a natural way, with a new problem of the best approximation on the whole real axis by functions of a special class, namely, by functions of exponential type of a given degree. In particular, the elementary trigonometrical functions $\sin px$ and $\cos px$ belong to the class of functions of degree p and are distinguished among the functions of this class by some fundamental extremal properties. In general, the functions of finite degree form a quite natural constructive element, which plays the same rôle for the functions uniformly continuous on the whole real axis as the polynomials for the case of a finite interval. This analogy refers as to the connection between the differential properties and the best approximation of functions, so to the characterization of approximation of analytic functions. The necessity of study of analytic functions of a real variable independently of their behaviour on the whole complex domain, arises in a natural way from the ordinary differential equations, for instance, from those of celestial mechanics, as well as from partial differential equations of mathematical physics. Besides this point of view, the constructive theory suggests another closely related with the third Tchebychef's problem. We have here the theory of regularly monotonic functions possessing the property that no one of their finite differences changes the sign in a certain sufficiently small interval. Regularly monotonic functions are infinitely differentiable and analytic in a more or less wide domain depending on the alternation of signs of the successive derivatives in the above interval. In particular, if all derivatives are non-negative, the function is said to be absolutely monotonic. Every analytic function is representable as the difference of two absolutely monotonic functions.

The problem to determine an absolutely monotonic function by the values of all its derivatives at a fixed point is equivalent to the problem of moments, provided that the interval, where the function is absolutely monotonic, stretches to $-\infty$.

There is a class of regularly monotonic functions, which is of especial interest: the class of cyclically monotonic functions whose derivatives change the sign periodically like $\sin x$ in the interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. All cyclically monotonic functions on an interval of length A are functions of degree $p \leqslant \frac{\pi}{2A}$ and every function of degree $< p$ is representable as the difference of two cyclically monotonic functions on any interval, whose length does not exceed $\frac{\pi}{2p}$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945) 159—168 Série mathématique

И. М. ВИНОГРАДОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Статья содержит изложение доклада на заседании Отделения физико-математических наук юбилейной сессии Академии Наук СССР, посвященной 220-летию Академии Наук.

Начало аналитической теории чисел было положено знаменитым математиком, членом нашей Академии Наук Л. Эйлером. Ему принадлежит метод, основанный на рассмотрении коэффициентов ряда, получаемого перемножением степенных рядов. Таким путем Эйлер вывел классическое тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

имеющее место, если вещественная часть s больше 1. Здесь в левой части стоит не что иное, как функция $\zeta(s)$, играющая важнейшую роль в современной теории распределения простых чисел; в правой части p пробегает все простые числа. Сам Эйлер извлек из этого тождества немного, но впоследствии оно явилось исходным пунктом важнейших исследований Чебышева, Римана и других ученых по теории распределения простых чисел. Тем же путем Эйлер получил ряд замечательных теорем о представлении числа суммою целых чисел; эти теоремы и метод Эйлера положили начало современной аддитивной теории чисел.

Первые крупные успехи в теории распределения простых чисел принадлежат другому знаменитому математику, члену нашей Академии Наук П. Л. Чебышеву. Он дал замечательные теоремы о приближении к функции $\pi(x)$, выражающей число простых чисел, не превосходящих x, посредством интеграла $\int_2^x\frac{dz}{\log z}$, как известно, приближенно равного $\frac{x}{\log x}$.

В частности, Чебышев показал, что отношение $\pi(x)$ к $\frac{x}{\log x}$ отличается от 1 меньше чем на 0,1. Чебышев вывел также асимптотические формулы для

$$\sum_{p\leqslant N}\frac{\log p}{p},\quad \sum_{p\leqslant N}\frac{1}{p},\quad \prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

и доказал знаменитый постулат Бертрана о том, что в пределах N и $2N$ имеется простое число.

Чтобы закончить краткий очерк важнейших дореволюционных работ по аналитической теории чисел, укажем одну работу нашего замечательного математика, члена-корреспондента Академии Наук Г. Ф. Вороного, касающуюся функции $\tau(n)$, выражающей число делителей числа n. Для суммы $\sum_{n\leqslant a}\tau(n)$ Вороной вывел нетривиальную асимптотическую формулу с остаточным членом порядка $a^{\frac{1}{3}}\log a$. Эта работа дала толчок к развитию новых важных методов в аналитической теории чисел.

Перейдем к послереволюционному периоду. В моих первых собственных работах (1915—1918 гг.) рассматривались вопросы того же круга, как и в указанной работе Вороного. В самой первой работе (опубликована лишь в 1918 г.) при нечетном P выводится неравенство

$$\left|\sum_{0<a\leqslant N}\left(\frac{a}{P}\right)\right|<\sqrt{P}\log P,$$

дающее закон распределения значений символа Якоби; в других работах исследовался вопрос о разыскании асимптотических формул для числа целых точек (т. е. точек с целыми координатами плоской области). Если T — число целых точек области, ограниченной неравенствами $Q<x\leqslant Q+P$, то очевидно

$$T=\sum_{Q<x\leqslant Q+P}[f(x)]=\sum_{Q<x\leqslant Q+P}f(x)-\sum_{Q<x\leqslant Q+P}\{f(x)\},$$

где $[z]$ обозначает целую, а $\{z\}$ — дробную часть числа z. Поэтому вопрос об асимптотической формуле для T сводится к вопросу об асимптотической формуле для суммы

$$\sum_{Q<x\leqslant Q+P}\{f(x)\}. \qquad (1)$$

Для разыскания же асимптотический формулы для суммы (1) мною была опубликована в 1917 г. теорема, которая в упрощенном виде может быть формулирована так:

Если h и k — постоянные, $1<P\leqslant hA$, и в интервале $Q\leqslant x\leqslant Q+P$ имеем

$$\frac{1}{A}\leqslant f''(x)\leqslant\frac{k}{A},$$

то имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{Q<x\leqslant Q+P}\{f(x)\}=\frac{1}{2}P+O\left((A\log A)^{\frac{2}{3}}\right).$$

Метод доказательства по основной идее был близок к методу Вороного.

В том же 1917 г. я опубликовал и второй метод, основанный на разложении $\{f(x)\}$ в ряд Фурье

$$\{f(x)\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi mf(x)}{m}.$$

Этот метод сводил вопрос к оценкам при не очень больших m суммы вида

$$S=\sum_{Q<x\leqslant Q+P}e^{2\pi imf(x)}. \tag{2}$$

Независимо от меня аналогичными вопросами занимались и за границей. Для пользы дальнейшего изложения здесь следует привести некоторые из полученных там результатов. Вейль еще в 1914 г. дал метод, пригодный для оценки сумм вида

$$S=\sum_{Q<x\leqslant Q+P}e^{2\pi im(\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x)}, \tag{3}$$

получаемых из суммы (2) при замене $f(x)$ целым многочленом. Эти оценки даются в зависимости от приближения к α_n посредством рациональной дроби; например, пусть

$$m=1,\ \ \alpha_n=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q^2},\quad (a,q)=1,\quad P\leqslant q\leqslant P^{n-1},\quad |\theta|\leqslant 1 \tag{4}$$

ε — произвольное положительное постоянное; тогда, применяя метод Вейля, получим

$$S=O(P^{1-\frac{1}{u}}),\quad u=2^{n-1}+\varepsilon.$$

Пользуясь частично оценками, получаемыми по методу Вейля, знаменитые английские математики Харди и Литтльвуд разработали (1919 г.) на основе идеи Эйлера метод решения проблемы Варинга (предложенной Варингом в 1770 г.), гласящей, что всякое целое положительное N может быть представлено суммою вида

$$N=x_1^k+\ldots+x_s^k$$

с целыми неотрицательными $x_1,\ldots,x_s$; здесь показатель k — целое, превосходящее 1, и число s слагаемых зависит только от k. Харди и Литтльвуд указали, при достаточно больших N, для s верхнюю границу порядка $k2^k$, а также вывели асимптотическую формулу для числа представлений.

В 1934 г. я нашел новый метод решения ряда важнейших вопросов теории чисел, основанный на возможности при известных условиях весьма точно оценивать суммы вида

$$\sum\sum \xi(x)\,\eta(y)\,e^{2\pi if(x,y)}, \tag{5}$$

где суммирование распространяется на все целые точки (x, y) некоторой области Ω.

Первым вопросом, при рассмотрении которого обнаружилась необычайная сила нового метода, была проблема Варинга. Для числа s слагаемых вида x^k, суммою которых может быть представлено всякое достаточно большое целое число N, теперь получилась граница $s<k(3\log k+10)$. Эта граница порядка $k\log k$ и в этом отношении близка к окончательной; действительно, можно тривиально установить существование сколь угодно больших N, уже не представимых суммою s слагаемых вида x^k при $s\leqslant k$. Отмеченный мой успех явился следствием возможности такого видоизменения схемы доказательства Харди и Литтльвуда, которое позволило вместо оценок по методу Вейля применять оценки сумм (5).

Существенное улучшение новый метод внес и в оценки самих сумм (3). Например, в указанном выше случае с условием (4) вместо $u=2^{n-1}+\varepsilon$ теперь можно брать новое значение u порядка n^c, где c — постоянное (последнее $u=3n^2\log 5n$). Такое улучшение еще весьма далеко от окончательного; если, например, считая $m=1$ и взяв ν равным одному из чисел $1, \ldots, n$, заставим α_ν пробегать числа интервала $0\leqslant\alpha_\nu\leqslant 1$, не меняя остальных коэффициентов многочлена $\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x$, то сумма длин интервалов, для которых при $c>2$ не верна оценка $|S|\leqslant P^{1-\frac{1}{c}}$, будет $\leqslant P^{\frac{2}{c}-1}$, что с возрастанием P стремится к нулю. Отсюда следует, что в действительности в оценке «почти всех» сумм S можно брать $u=c$, где c — любое постоянное, превосходящее 2.

Однако даже и такое, далекое от окончательного улучшение оценок сумм (3) дало возможность (в 1936 г.) сотруднику Математического института Н. Г. Чудакову на основе последних достижений теории функции $\zeta(s)$ установить, что в известной асимптотической формуле

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{dz}{\log z}+O(xe^{-h})$$

число h можно брать равным $(\log x)^{c_0}$, где $c_0>0{,}5$ (последнее $c_0=0{,}6-\varepsilon$), вместо прежнего $h=(\log x)^{0,5}c\sqrt{\log\log x}$. Далее, Чудаков получил существенные результаты и в вопросе, являющемся уточнением постулата Бертрана: он показал, что при достаточно больших N в пределах N и $N+N^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$ имеется простое число.

Новый метод позволил также коренным образом улучшить прежние оценки (получаемые по методу Вейля) точности приближения к заданной правильной дроби посредством дробной части многочлена $\alpha_n x^n+\ldots+\alpha_1 x$, значительно уточнить остаточные члены в асимптотических формулах для числа целых точек (x, y, z) в областях трех измерений и т. д.

Совершенно неожиданные результаты были получены мною в 1937 г.

Оказалось, что мой метод пригоден и к оценкам сумм вида

$$\sum_{p\leqslant N} e^{2\pi i m f(p)}, \qquad (6)$$

где p пробегает простые числа; при этом получаемые оценки в случаях, важных для приложений, не отличаются существенно от тех, которые получаются этим методом для сумм (3). А между тем среди ученых, занимавшихся вопросами распределения простых чисел, общераспространенным было убеждение, что существенные успехи в оценке сумм (6) невозможны без значительных сдвигов в направлении разрешения так называемой расширенной гипотезы Римана, состоящей в предположении, что нетривиальные нули $s=\sigma+it$ как самой функции $\zeta(s)$, так и ее обобщений, так называемых L-рядов, лежат на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$.

Эти оценки сумм (6) дали возможность решить множество важных вопросов аддитивной теории чисел, относящихся к представлению чисел суммою слагаемых вида $f(p)$, где p — простое; например, был решен вопрос о представлении N суммою вида

$$N=p_1^k+\ldots+p_s^k$$

и, в частности ($k=1$), была решена, для нечетных чисел, знаменитая проблема Гольдбаха (переписка Гольдбаха с Эйлером 1742 г.) о том, что всякое достаточно большое нечетное число N есть сумма трех простых чисел:

$$N=p_1+p_2+p_3, \qquad (7)$$

причем решение сопровождалось выводом асимптотической формулы для числа $T(N)$ представлений. В частности, асимптотическая формула для $T(N)$ в проблеме Гольдбаха настолько проста, что мы ее здесь приведем.

Число представлений $T(N)$ целого N в форме (7) выражается формулой

$$T(N)=(1+\delta(N))\,\Phi(N)\,S(N),$$

где $\lim\limits_{N\to\infty}\delta(N)=0$, $\Phi(N)$ — возрастающая функция от N, асимптотически равная $\frac{N^2}{2(\log N)^2}$ и, наконец,

$$S(N)=\prod\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right)\prod{}''\left(1-\frac{1}{p^2-3p+3}\right),$$

причем Π распространяется на все простые числа, а Π'' лишь на простые делители числа N.

К сказанному следует добавить, что решение аддитивных проблем с слагаемыми вида $f(p)$ было в значительной мере подготовлено работами английских математиков, в первую очередь работами Харди и Литтльвуда, но нехватало моих оценок сумм (6).

Потребность улучшения остаточных членов в аддитивных проблемах с слагаемыми вида $f(p)$ выдвинула вопрос об уточнении асимптотических формул, относящихся к распределению простых чисел $< N$ среди арифметических прогрессий с разностью a в случае, когда с возрастанием N эта разность может медленно расти. Мой ученик, талантливый ленинградский математик Ю. В. Линник добился в этом вопросе значительных успехов посредством особого метода, основанного на соображениях густоты распределения нулей L-рядов, позволившего ему обойти расширенную гипотезу Римана. В частности, Линник доказал следующую замечательную теорему: наименьшее простое число вида $ax+b$; $(a, b)=1$, $1 \leqslant b < a$ меньше a^c, где c — абсолютное постоянное.

Заканчивая свой очерк, не могу не отметить, что несмотря на кажущуюся случайность появления русских работ по аналитической теории чисел, они связаны между собою тесной преемственностью; Чебышев использовал основную идею Эйлера для получения первых нетривиальных результатов о простых числах, а в свое время толчком для моих исследований была работа Вороного. Следует также отметить тот факт, что работы как раз нашей Академии Наук сыграли большую роль в развитии аналитической теории чисел.

I. VINOGRADOW. ANALYTICAL THEORY OF NUMBERS

SUMMARY

The analytical theory of numbers originates from the famous mathematician L. Euler, Member of our Academy of Sciences. The method based on consideration of coefficients of a series obtained by taking the product of several power series is due to Euler. In this way Euler has obtained the identity

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

that transforms the function $\zeta(s)$ for $R(s)>1$ into an infinite product extended over all the prime numbers. This identity was the standpoint of the investigations of Tchebychef, Riemann and others in the theory of distribution of primes. Euler himself obtained in the same way some theorems on representation of a number as the sum of integers; these theorems initiated the modern additive theory of numbers.

P. L. Tchebychef, Member of our Academy of Sciences, a famous mathematician, was the first to give the theorems that characterized the density of primes among all integers: namely, he gave asymptotic formulae for

$$\sum_{p\leqslant N}\frac{1}{p},\quad \prod_{p\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

proved Bertrand's postulate on the existence of a prime between N and $2N$ and, finally, gave the first theorems on approximation of the function $\pi(x)$ — the number of primes not exceeding x — by the integral $\int_2^x \frac{dz}{z}$. In particular, it was shown by Tchebychef that the ratio of $\pi(x)$ to $\frac{x}{\log x}$, the latter being approximately equal to the above integral, differs from 1 less than by 0,1, provided x is sufficiently large. The more accurate result:

$$\pi(x)=\int_2^x\frac{dz}{z}+O\left(xe^{-c\sqrt{\log x\log\log x}}\right), \tag{1}$$

was obtained afterwards in the works of Riemann, Hadamard, Vallée-Poussin, Hardy and Littlewood. An analogous result was obtained also for the functions $\pi(x;a,b)$ which represent, for $a>0$, $(a,b)=1$, the number of primes belonging to the progression $az+b$ and not exceeding x. This result, however, is non-trivial only in the case, where a is not too large as compared with x.

The researches due to G. Voronoi, Corresponding Member of the Academy of Sciences, were also of great importance for the develop-

ment of the analytical theory of numbers. Voronoi gave an asymptotic distribution law for the function $\tau(n)$ — the number of divisors of the number n —:

$$\sum_{0<n\leqslant a} \tau(n) = a(\log a + 2E - 1) + O(a^{\frac{1}{3}} \log a).$$

This paper of Voronoi gave an impulse for my own first researches (1915—1918).

In the first paper of mine (published in 1918) the distribution law was given for the values of the Jacobi symbol:

$$\left| \sum_{0<n\leqslant a} \left(\frac{n}{P}\right) \right| < \sqrt{P} \log P.$$

In the following paper (published in 1917) an elementary method was developed, similar to that due to Voronoi by its main idea, which gave asymptotic formulae for the number of lattice points (i. e. points with integral coordinates) within a plane domain: $Q < x \leqslant Q+P$, $0 < y \leqslant f(x)$. The fundamental theorem of the paper, in somewhat simplified form, can be formulated as follows: let h and k denote positive constants, $1 \leqslant P \leqslant hA$, and the inequalities

$$\frac{1}{A} \leqslant f''(x) \leqslant \frac{k}{A}$$

be fulfilled on the interval $Q \leqslant x \leqslant Q+P$; then

$$\sum_{Q<x\leqslant Q+P} \{f(x)\} = \frac{1}{2} P + O((A \log A)^{\frac{2}{3}}),$$

where $\{z\}$ denotes the fractional part of the number z.

In my third paper another method was developed based upon the expansion of $\{f(x)\}$ in the Fourier series that reduces the problem to the estimation of sums of the form

$$\sum_{Q<x\leqslant Q+P} e^{2\pi i m f(x)}$$

for m not too large.

Foreign authors had been working successfully at the same problem and at the similar ones independently of me. In 1914 Weyl gave a method for estimating of sums of the form

$$S = \sum_{Q<x\leqslant Q+P} e^{2\pi i(\alpha_k x^k + \ldots + \alpha_1 x)} \tag{2}$$

depending on the approximation of α_k by rational fractions; for instance, if

$$\alpha_k = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad P \leqslant q \leqslant P^{k-1}, \quad |\theta| \leqslant 1, \tag{3}$$

then Weyl's method gives

$$S=O(P^{1-\frac{1}{u}}), \quad u=2^{\kappa-1}+\varepsilon, \tag{4}$$

where ε is an arbitrary positive constant. The famous English mathematicians Hardy and Littlewood worked out, on the basis of Euler's ideas, a scheme for solution of the most important additive problems. In 1919 they applied this scheme, with estimates obtained by Weyl's method, to Waring's problem, which had been proposed in 1770. Hardy and Littlewood succeeded in showing that to every $k>1$ there corresponds an integer s of order $k2^k$ such that every sufficiently large integer N is representable by a sum of the form

$$N=x_1^k+\ldots+x_s^k, \tag{5}$$

where $x_1, \ldots, x_s$ are non-negative. They gave thereby an asymptotic formula for the number of such representations.

In 1934 I discovered a new method of solution of the most important problems of the theory of numbers. The method is based upon the possibility of estimaticn very accurately, under some conditions, the sums of the form

$$\sum\sum \xi(x)\,\eta(y)\,e^{2\pi i f(x,y)} \tag{6}$$

extended over all lattice points of a domain.

By modifying Hardy — Littlewood's scheme of proof so as to replace the estimates by Weyl's method by the estimates for the sums (6) I gave a new boundary for the number s in formula (5): $s<k(3\log k+10)$. This boundary is of order $k\log k$ and is very near to the definitive one; in fact, there exist arbitrarily large N that are not representable by the sum (5) for $s\leqslant k$.

The new method enabled us to improve considerably the estimates of the sum (2) for large k; the order of u in (4), under the condition (3), was proved te be k^c, where c is a constant (the recent result is $u=3k^2\log 5k$). This result is yet very far from the definite one; if, assigning to σ one of the values $1, \ldots, k$, we make α_σ to increase from 0 to 1, while the other coefficients of the polynomial $\alpha_k x^k+\ldots+\alpha_1 x$ are kept fixed, then the estimate (4) with $u=c_0$ will hold for «almost all» S for $c_0>2$.

Such an improvement of estimates, however, enabled N. Tchoudakov, a pupil of mine, to improve, on the basis of the modern theory of the function $\zeta(s)$, the asymptotic formula (1) for $\pi(x)$.

The new remainder obtained by Tchoudakov is of the order

$$xe^{-(\log x)^{\delta}},$$

where $\delta>\frac{1}{2}$ (the latest result: $\delta=0{,}6-\varepsilon$). Moreover Tchoudakov proved that there exists a prime number in the interval from N to $N+N^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$, for sufficiently large N.

In 1937 I showed that the new method also gives good estimates for the sums of the form

$$\sum_{Q<x\leqslant Q+P} e^{2\pi i f(p)},$$

where p runs over primes, while a great many of the mathematicians that had studied the problems of distribution of primes had been of the opinion that elementary methods could yield no essential results in this domain.

These estimates, together with the general scheme due to Hardy and Littlewood, have opened a broad way to the solution of additive problems with terms of the form $F(p)$. So in 1937 I solved the problem of representation

$$N = p_1^k + \ldots + p_s^k.$$

In particular, the famous Goldbach problem, which had arisen from the correspondence with Euler in 1742, was solved; namely, it was proved that every sufficiently large odd number N can be represented as the sum of three primes:

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

An asymptotic formula for the number of the representations was given thereby.

In connection with additive problems of the last type arose the problem of improving the asymptotic formula for $\pi(x;a,b)$. Recently (in 1944) my pupil G. Linnik made here essential progress. He showed, in particular, that $\pi(x;a,b)>0$ already for all x of the order a^c, where c is a constant.

This brief review shows that the researches of our savants in the analytical theory of numbers have played an outstanding rôle in the development of this branch of mathematics. It is also worth noticing that the most important of these researches have been carried out in our Academy of Sciences.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 169—200 Série mathématique

О. В. САРМАНОВ

ОБ ИЗОГЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

Работа содержит решение задачи об определении всех видов изогенной корреляции, являющейся естественным обобщением нормальной корреляции; это обобщение допускает практические приложения.

Введение

В своей работе «Fondements géométriques de la théorie des corrélations» (1) С. Н. Бернштейн положил геометрический принцип в основу классификации различных видов корреляции, обобщающих нормальную корреляцию между двумя случайными величинами.

Так, если изменение одной случайной величины x вызывает лишь такое изменение функции распределения (дифференциальной) вероятностей другой $f_x(y)$, при котором $f_x(y)$ остаются конгруэнтными между собой, претерпевая сдвиг (величина его зависит от x), как твердое тело, и если изменение y оказывает такое же влияние на функцию распределения первой величины $\varphi_y(x)$, то корреляция между x и y называется *твердой*.

Всякая корреляция между x и y аналитически выражается функциональным тождеством

$$F(x, y) = p(x) f_x(y) = P(y) \cdot \varphi_y(x), \tag{I}$$

где $F(x, y)$ — поверхность корреляции, $p(x)$ — функция априорных вероятностей x, $P(y)$ — функция априорных вероятностей y, $f_x(y)$ — функция условных вероятностей y при данном x, $\varphi_y(x)$ — функция условных вероятностей x при данном y. Все это положительные нормированные функции, т. е. интегралы от них по областям, где корреляция определена, равны единице.

В твердой корреляции функции $f_x(y)$, $\varphi_y(x)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} f_x(y) &= \rho(y + \varphi(x)), \\ \varphi_y(x) &= \rho_1(x + \varphi_1(y)), \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

где функции $\varphi(x)$, $\varphi_1(y)$ и определяют величину сдвига соответствующей

кривой условных вероятностей. Нормальная корреляция есть твердая корреляция; так, например, при нормальной корреляции

$$f_x(y) = \frac{e^{-\left(y - R\frac{\sigma_1}{\sigma}x\right)^2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-R^2)}};$$

в нормальной корреляции сдвиг $\varphi(x) = -R\frac{\sigma_1}{\sigma}x$ есть линейная функция.

Далее, если изменение одной случайной величины вызывает лишь упругую деформацию кривой распределения другой величины, — например, сжатие в одном направлении и компенсирующее растяжение в другом направлении, так что интеграл остается равным единице, — то корреляция называется **упругой**.

В упругой корреляции функции $f_x(y)$; $\varphi_y(x)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} f_x(y) &= \lambda(x)f(\lambda(x); y); \\ \varphi_y(x) &= \lambda_1(y)f_1(\lambda_1(y), x), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}$$

где функции $\lambda(x)$, $\lambda_1(y)$ определяют величину упругой деформации.

Твердая корреляция между x и y превращается после замены переменных $e^x = \xi$, $e^y = \eta$ в упругую корреляцию между ξ, η.

Наконец, если изменение одной случайной величины вызывает упругую деформацию кривой распределения другой, сопровождающуюся также и сдвигом, то корреляция между этими двумя величинами называется **изогенной**.

В изогенной корреляции функции $f_x(y)$, $\varphi_y(x)$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} f_x(y) &= \lambda(x)f(\lambda(x)y + \varphi(x)), \\ \varphi_y(x) &= \lambda_1(y)f_1(\lambda_1(y)x + \varphi_1(y)). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

Таким образом, основное функциональное тождество запишется так:

$$F(x, y) = p(x)\lambda(x)f(\lambda(x)y + \varphi(x)) = P(y)\lambda_1(y)f_1(\lambda_1(y)x + \varphi_1(y)).$$

Здесь функции $\lambda(x)$, $\lambda_1(y)$ определяют величину упругой деформации, а отношения $\frac{\varphi(x)}{\lambda(x)}$, $\frac{\varphi_1(y)}{\lambda_1(y)}$ — величину сдвига. Поэтому, если в изогенной корреляции $\lambda(x) \equiv \text{const}$ и $\lambda_1(y) \equiv \text{const}$, она превращается в твердую, а если $\frac{\varphi(x)}{\lambda(x)} = k = \text{const}$, $\frac{\varphi_1(y)}{\lambda_1(y)} = k_1 = \text{const}$, то, она превращается в упругую корреляцию. В последнем случае перенос начала координат, вызванный заменой переменных $x = X - k_1$; $y = Y - k$, приводит упругую корреляцию к каноническому виду (III), так как функции $\overline{\varphi}(X)$ и $\overline{\varphi}_1(Y)$ для новых переменных X, Y обращаются в нуль.

Понятно, что линейное преобразование координат, состоящее лишь в переносе начала и изменении масштаба, преобразует изогенную корреляцию в изогенную же корреляцию.

В работе С. Н. Бернштейна ([1]) получены дифференциальные уравнения, определяющие все виды твердой корреляции, и фактически построены наиболее важные поверхности твердой корреляции. Кроме того, об

изогенной корреляции доказана теорема, гласящая, что если логарифмы функций

$$f(\lambda(x)\,y+\varphi(x))=f(z), \quad f_1(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))=f_1(u)$$

— полиномы, то степень их не выше двух, причем в этом случае фактически построены поверхности изогенной корреляции.

Изучение твердой и изогенной корреляции интересно потому, что эти виды корреляции представляют собой наиболее простые и естественные обобщения нормальной корреляции, допускающей наиболее глубокое теоретическое обоснование и имеющей широчайшее практическое применение.

Виды изогенной корреляции, близкие к нормальной (особенно виды прямолинейной изогенной корреляции), допускают непосредственное практическое применение для выравнивания по корреляционным таблицам во всех случаях, когда имеется корреляция, близкая к нормальной.

Многие из кривых распределения, входящих в изогенную и твердую корреляцию, представляют собою кривые Пирсона III, VII, XI типов.

Цель настоящей работы — рассмотреть все возможные виды изогенной корреляции, а также дополнить изучение твердой и упругой корреляции.

§ 1. Дифференциальные уравнения изогенной корреляции

Из основного функционального тождества изогенной корреляции

$$p(x)\,\lambda(x)\,f(\lambda(x)\,y+\varphi(x))=P(y)\,\lambda_1(y)\,f_1(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y)) \tag{1}$$

мы должны определить все восемь входящих в него неизвестных функций. Для этого тождество удобнее предварительно прологарифмировать:

$$F(x)+\Phi(\lambda(x)\,y+\varphi(x))=F_1(y)+\Phi_1(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y)), \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} F(x)&=\lg p(x)+\lg\lambda(x), & F_1(y)&=\lg P(y)+\lg\lambda_1(y),\\ \Phi(z)&=\lg f(z), & \Phi_1(u)&=\lg f_1(u). \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Заметим, что перенос начала и изменение масштаба, т. е. замена x и y на $ax+b$ и a_1y+b_1, преобразует изогенную корреляцию в изогенную же корреляцию (см. Введение); поэтому если тождество (2) удовлетворялось парой функций $\Phi(u)$ и $\Phi_1(v)$

$$F(x)+\Phi(u)\equiv F_1(y)+\Phi_1(v),$$

то оно будет удовлетворяться и парой функций

$$C\Phi(Ax+B)+D; \quad C_1\Phi_1(A_1x+B_1)+D_1,$$

так как, кроме того, D и D_1 можно отнести к $F(x)$ и $F_1(y)$, причем нужно будет еще положить $C=C_1$. Поэтому в выражении для $\Phi(u)$ и $\Phi_1(v)$ должно быть по меньшей мере четыре произвольные постоянные. Это наводит на мысль, что Φ и Φ_1 можно определить из дифференциальных уравнений не ниже четвертого порядка.

Предположим, что все функции, входящие в тождество (2), имеют непрерывные производные до четвертого порядка включительно. Для

составления уравнений относительно неизвестных функций Φ и Φ_1 продифференцируем (2) четыре раза по y:

$$\begin{aligned}
&\Phi'(\lambda(x)\,y+\varphi(x))\,\lambda(x)=\\
&\qquad=F_1'(y)+\Phi_1'(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))\,(\lambda_1'(y)\,x+\varphi_1'(y))^2 \qquad =P_1(x,y),\\
&\Phi''(\lambda(x)\,y+\varphi(x))\,\lambda^2(x)=\\
&\qquad=F_1''(y)+\Phi_1''(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))\,(\lambda_1''(y)\,x+\varphi_1''(y))+\\
&\qquad\quad+\Phi_1'(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))\,(\lambda_1''(y)\,x+\varphi_1''(y)) \qquad =P_2(x,y),\\
&\Phi'''(\lambda(x)\,y+\varphi(x))\,\lambda^3(x)=\\
&\qquad=F_1'''(y)+\Phi_1'''(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))\,(\lambda_1'(y)\,x+\varphi_1'(y))^3+\\
&\qquad\quad+3\,\Phi_1''(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))\,(\lambda_1'(y)\,x+\varphi_1'(y))\,(\lambda_1''(y)\,x+\varphi_1''(y))+\\
&\qquad\quad+\Phi_1'(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))\,(\lambda_1'''(y)\,x+\varphi_1'''(y)) \qquad =P_3(x,y)\\
&\Phi^{IV}(\lambda(x)\,y+\varphi(x))\,\lambda^4(x)=\\
&\qquad=F_1^{IV}(y)+\Phi_1^{IV}(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))(\lambda_1'(y)\,x+\varphi_1'(y))^4+\\
&\qquad\quad+6\Phi_1'''(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))\,(\lambda_1'(y)\,x+\varphi_1'(y))^2\,(\lambda_1''(y)\,x+\varphi_1''(y))+\\
&\qquad\quad+[3\,(\lambda_1''(y)\,x+\varphi_1''(y))^2+4\,(\lambda_1'(y)\,x+\varphi_1'(y))\,(\lambda_1'''(y)\,x+\varphi_1'''(x))]\cdot\\
&\qquad\quad\cdot\Phi_1''(\lambda_1'(y)\,x+\varphi_1(y))+\Phi_1'(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))\,(\lambda_1'(y)\,x+\varphi_1'(y)) \qquad =P_4(x,y),
\end{aligned}$$

что можно короче записать так:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi'(\lambda(x)\,y+\varphi(x))&=\frac{P_1(x,y)}{\lambda(x)},\\
\Phi''(\lambda(x)\,y+\varphi(x))&=\frac{P_2(x,y)}{\lambda^2(x)},\\
\Phi'''(\lambda(x)\,y+\varphi(x))&=\frac{P_3(x,y)}{\lambda^3(x)},\\
\Phi^{IV}(\lambda(x)\,y+\varphi(x))&=\frac{P_4(x,y)}{\lambda^4(x)}.
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Совершенно аналогично, дифференцируя (2) четыре раза по x, получим

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_1'(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))&=\frac{Q_1(y,x)}{\lambda_1(y)},\\
\Phi_1''(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))&=\frac{Q_2(y,x)}{\lambda_1^2(y)},\\
\Phi_1'''(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))&=\frac{Q_3(y,x)}{\lambda_1^3(y)},\\
\Phi_1^{IV}(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))&=\frac{Q_4(y,x)}{\lambda_1^4(y)}.
\end{aligned}\right\}\tag{3 bis}$$

Функции $Q_k(y,x)$ получаются из приведенных выше выражений для функций $P_k(x,y)$ заменой x на y и всех функций с индексом 1 на функции без этого индекса. Продифференцировав первые три соотношения (3) по x,

$$\begin{aligned}
\Phi''(\lambda(x)\,y+\varphi(x))\,(\lambda'(x)\,y+\varphi'(x))&=\frac{P_{1x}'\lambda(x)-P_1\lambda'(x)}{\lambda^2(x)},\\
\Phi'''(\lambda(x)\,y+\varphi(x))\,(\lambda'(x)\,y+\varphi'(x))&=\frac{P_{2x}'\lambda(x)-2P_2\lambda'(x)}{\lambda^3(x)},\\
\Phi^{IV}(\lambda(x)\,y+\varphi(x))\,(\lambda'(x)\,y+\varphi'(x))&=\frac{P_{3x}'\lambda(x)-3P_3\lambda'(x)}{\lambda^4(x)},
\end{aligned}$$

и сравнив их с тремя последними соотношениями (3), получим

$$\begin{aligned}
(\lambda'(x)\,y+\varphi'(x))\,P_2&=P_{1x}'\lambda(x)-P_1\lambda'(x),\\
(\lambda'(x)\,y+\varphi'(x))\,P_3&=P_{2x}'\lambda(x)-2P_2\lambda'(x),\\
(\lambda'(x)\,y+\varphi'(x))\,P_4&=P_{3x}'\lambda(x)-3P_3\lambda'(x),
\end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} P_2\left(\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}y+\frac{\varphi'(x)}{\lambda(x)}\right)+P_1\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}&=P'_{1x},\\ P_3\left(\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}y+\frac{\varphi'(x)}{\lambda(x)}\right)+2P_2\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}&=P'_{2x},\\ P_4\left(\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}y+\frac{\varphi'(x)}{\lambda(x)}\right)+3P_3\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}&=P'_{3x}. \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

Необходимым и достаточным условием совместности этих трех уравнений с двумя неизвестными $\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}$ и $\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}y+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} P_2(x,y) & P_1(x,y) & P'_{1x}(x,y)\\ P_3(x,y) & 2P_2(x,y) & P'_{2x}(x,y)\\ P_4(x,y) & 3P_3(x,y) & P'_{3x}(x,y) \end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

Совершенно аналогично, исходя из системы (3 bis), получим

$$\begin{vmatrix} Q_2(y,x) & Q_1(y,x) & Q'_{1y}\\ Q_3(y,x) & 2Q_2(y,x) & Q'_{2y}\\ Q_4(y,x) & 3Q_3(y,x) & Q'_{3y} \end{vmatrix}=0. \qquad (4\text{ bis})$$

При соблюдении условия (4) неизвестные можно определить из двух первых уравнений (3):

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}=\frac{\begin{vmatrix} P_2 & P'_{1x}\\ P_3 & P'_{2x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_2 & P_1\\ P_3 & 2P_2\end{vmatrix}},\qquad \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}y+\frac{\varphi'(x)}{\lambda(x)}=\frac{\begin{vmatrix} P'_{1x} & P_1\\ P'_{2x} & 2P_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_2 & P_1\\ P_3 & 2P_2\end{vmatrix}} \qquad (5)$$

и аналогично, при соблюдении условия (4 bis):

$$\frac{\lambda'_1(y)}{\lambda_1(y)}=\frac{\begin{vmatrix} Q_2 & Q'_{1y}\\ Q_3 & Q'_{2y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_2 & Q_1\\ Q_3 & 2Q_2\end{vmatrix}},\qquad \frac{\lambda'_1(y)}{\lambda_1(y)}x+\frac{\varphi'_1(y)}{\lambda_1(y)}=\frac{\begin{vmatrix} Q'_{1y} & Q_1\\ Q'_{2y} & 2Q_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_2 & Q_1\\ Q_3 & 2Q_2\end{vmatrix}}. \qquad (5\text{ bis})$$

Необходимым и достаточным условием существования и единственности решений (5), (5 bis) будет неравенство нулю определителей:

$$\begin{vmatrix} P_2 & P_1\\ P_3 & 2P_2\end{vmatrix}\neq 0, \qquad (6)$$

$$\begin{vmatrix} Q_2 & Q_1\\ Q_3 & 2Q_2\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (6\text{ bis})$$

На протяжении этого параграфа мы будем предполагать выполнение этих двух условий. Дальше мы выясним, что получается, когда одно или оба условия не соблюдаются, и как мы увидим, соблюдение (6), (6 bis) не ограничивает общности.

Уравнение (4) представляет собою обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $\Phi_1(\lambda_1(y)x+\varphi_1(y))$; точно так же и уравнение (4 bis) того же типа относительно функции $\Phi(\lambda(x)y+\varphi(x))$.

Для исследования этих уравнений и их решений удобнее ввести следующие обозначения:

$$\Phi_1(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))=\widetilde{\Phi}_1(x,y),\quad \Phi(\lambda(x)\,y+\varphi(x))=\widetilde{\Phi}(y,x);$$

тогда

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1^{(k)}(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))&=\frac{1}{\lambda_1^k(y)}\frac{\partial^k\widetilde{\Phi}_1(x,y)}{\partial x^k}=\frac{1}{\lambda_1^k(x)}\widetilde{\Phi}_{1x}^{(k)}(x,y),\\ \Phi^{(k)}(\lambda(x)y+\varphi(x))&=\frac{1}{\lambda^k(x)}\frac{\partial^k\widetilde{\Phi}(y,x)}{\partial y^k}=\frac{1}{\lambda^k(x)}\widetilde{\Phi}_y^{(k)}(y,x).\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

Далее положим:

$$\left.\begin{aligned}F_1^{(k)}(y)&=A_k(y),\quad \frac{\lambda_1^{(k)}(y)}{\lambda_1(y)}=a_k(y),\quad \frac{\lambda^{(k)}(x)}{\lambda(x)}=a_k^{(1)}(x),\\ F^{(k)}(x)&=B_k(x),\quad \frac{\varphi_1^{(k)}(y)}{\lambda_1(y)}=b_k(y),\quad \frac{\varphi^{(k)}(x)}{\lambda(x)}=b_k^{(1)}(x).\end{aligned}\right\}\qquad (**)$$

В этих обозначениях четыре соотношения, полученные от четырехкратного дифференцирования по y основного функционального тождества, могут быть записаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{\Phi}_y'(y,x)=A_1(y)+\widetilde{\Phi}_{1x}'(x,y)\,(a_1(y)\,x+b_1(y))=P_1(x,y)\\ &\widetilde{\Phi}''_y(y,x)=A_2(y)+\widetilde{\Phi}_{1x}''(x,y)\,(a_1(y)\,x+b_1(y))^2+\\ &\qquad +\widetilde{\Phi}_{1x}'(x,y)\,(a_2(y)\,x+b_2(y))=P_2(x,y)\\ &\widetilde{\Phi}_y'''(y,x)=A_3(y)+\widetilde{\Phi}_{1x}'''(x,y)\,(a_1(y)\,x+b_1(y))^3+\\ &\quad+3\widetilde{\Phi}_{1x}''(x,y)\,(a_1(y)\,x+b_1(y))\,(a_2(y)\,x+b_2(y))+\\ &\qquad+\widetilde{\Phi}_{1x}'(x,y)\,(a_3(y)+b_3(y))=P_3(x,y)\\ &\widetilde{\Phi}_y^{\mathrm{IV}}(y,x)=A_4(y)+\widetilde{\Phi}_{1x}^{\mathrm{IV}}(x,y)\,a_1(y)\,x+b_1(y))^4+\\ &\quad+6\,\widetilde{\Phi}_{1x}'''(x,y)\,(a_1(y)\,x+b_1(y))^2\,(a_2(y)\,x+b_2(y))+\\ &\qquad+[3\,(a_2(y)\,x+b_2(y))^2+\\ &\quad+4\,(a_1(y)\,x+b_1(y))\,(a_3(y)\,x+b_3(y))]\,\widetilde{\Phi}_{1x}''(x,y)+\\ &\qquad+\widetilde{\Phi}_{1x}'(x,y)\,(a_4(y)\,x+b_4(y))=P_4(x,y)\end{aligned}\right\}\qquad (7)$$

Аналогичные изменения произойдут в выражениях для функций $Q_k(y,x)$. В формулы (4), (4 bis), (5), (5 bis), (6), (6 bis), содержащие функции $P(x,y)$, $Q(y,x)$, нужно внести изменения, происходящие от нового выражения этих функций. В частности, уравнения (5), (5 bis) запишутся так:

$$a_1^{(1)}(x)=\frac{\begin{vmatrix}P_2 & P_{1x}'\\ P_3 & P_{2x}'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P_2 & P_1\\ P_3 & 2P_2\end{vmatrix}},\quad a_1^{(1)}(x)\,y+b_1^{(1)}(x)=\frac{\begin{vmatrix}P_{1x}' & P_1\\ P_{2x}' & 2P_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P_2 & P_1\\ P_3 & 2P_2\end{vmatrix}},\qquad (8)$$

$$a_1(y)=\frac{\begin{vmatrix}Q_2 & Q_{1y}'\\ Q_3 & Q_{2y}'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Q_2 & Q_1\\ Q_3 & 2Q_2\end{vmatrix}},\quad a_1(y)\,x+b_1(y)=\frac{\begin{vmatrix}Q_{1y}' & Q_1\\ Q_{2y}' & 2Q_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Q_2 & Q_1\\ Q_3 & 2Q_2\end{vmatrix}}.\qquad (8\,\mathrm{bis})$$

Уравнение (4) содержит только частные производные функции $\widetilde{\Phi}_{1x}(x,y)$ по x, поэтому оно может быть рассматриваемо как обыкновенное уравнение, зависящее от параметров $a_k(y)$, $b_k(y)$, $A_k(y)$ $(k=1, 2, 3, 4)$; кроме того, сама неизвестная функция $\widetilde{\Phi}'_{1x}(x,y)$ зависит от параметра y. Точно так же уравнение (4 bis) есть обыкновенное уравнение относительно функции $\widetilde{\Phi}'_y(y,x)$, зависящее от параметров $a_k^{(1)}(x)$, $b_k^{(1)}(x)$, $B_k(x)$ $(k=1, 2, 3, 4)$. Неизвестная функция $\widetilde{\Phi}'_y(y,x)$ зависит от параметра x.

Исследуем, какие ограничения нужно наложить для того, чтобы для уравнения (4) были выполнены условия теоремы единственности решения. Развернем определитель (4) по элементам третьей строки:

$$\begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_3 & 2P_2 \end{vmatrix} P'_{3x} + \begin{vmatrix} P_1 & P'_{1x} \\ 2P_2 & P'_{2x} \end{vmatrix} P_4 = \begin{vmatrix} P_2 & P'_{1x} \\ P_3 & P'_{2x} \end{vmatrix} 3P_2. \tag{9}$$

На основании формулы (8)

$$\begin{vmatrix} P_1 & P'_{1x} \\ 2P_2 & P'_{2x} \end{vmatrix} = a_1^{(1)}(x) \begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_3 & 2P_2 \end{vmatrix};$$

подставляя это в (9), получим

$$\begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_3 & 2P_2 \end{vmatrix} (P'_{3x} + a_1^{(1)}(x) P_4) = \begin{vmatrix} P_2 & P'_{1x} \\ P_3 & P'_{2x} \end{vmatrix} 3P_2. \tag{9'}$$

Согласно формулам (7) старшая производная $\widetilde{\Phi}_{1x}^{IV}(x,y)$ входит лишь в P_4 и P'_{3x}, причем коэффициент при этой производной в P_4 равен $(a_1(y)x + b_1(y))^4$ и в P'_{3x} равен $(a_1(y)x + b_1(y))^3$; кроме того, в обе функции она входит в первой степени. Таким образом, коэффициент при $\widetilde{\Phi}_{1x}^{IV}(x,y)$ в (9′) имеет вид

$$\begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_3 & 2P_2 \end{vmatrix} (a_1(y) + b_1(y))^3 [1 + a_1^{(1)}(x)(a_1(y)x + b_1(y))]. \tag{10}$$

Уравнение (4) или эквивалентное ему (9′), разрешенное относительно $\widetilde{\Phi}_{1x}^{IV}(x,y)$, представляет, как то видно из развернутых выражений (7) для $P_k(x,y)$, рациональную функцию младших производных и двенадцати параметров $a_k(y)$, $b_k(y)$, $A_k(y)$, с знаменателем (10).

Выражение (10) не может быть тождественным нулем. В самом деле, второй и третий множитель не могут быть тождественными нулями, так как если $a_1(y) \equiv b_1(y) \equiv 0$, то $\lambda_1(y) \equiv \text{const}$, $\varphi_1(y) \equiv \text{const}$ и величины x и y были бы независимы, а если одна из скобок есть нуль без этого предположения, то x и y связаны функционально; следовательно, как то, так и другое предположение противоречит наличию корреляции между x и y. Наконец, первый множитель (10) не тождественный нуль по условию (6). Следовательно, во всякой области, где знаменатель (10) не обращается в нуль и параметры, входящие в (4), ограничены, — а такая область найдется по непрерывности всех функций, входящих в (4), — будут выполнены условия Липшица и теоремы зависимости решения от параметров и, следовательно, внутри этой области найдется другая область, где задача Коши будет иметь единственное решение.

Совершенно аналогично коэффициент при старшей производной в уравнении (4 bis) имеет вид

$$\begin{vmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_3 & 2Q_2 \end{vmatrix} (a_1^{(1)}(x)\,y+b_1^{(1)}(x))^3\,[1+a_1(y)\,(a_1^{(1)}(x)\,y+b_1^{(1)}(x))] \quad (10\,\text{bis})$$

и, следовательно, при единственном условии (6 bis) найдется такая область, где уравнение (4 bis) будет иметь единственное решенпе, зависящее от параметров

$$a_k^{(1)}(x),\ b_k^{(1)}(x),\ B_k(x) \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Итак, предположив, что в некотором прямоугольнике одновременно выполнены условия (6), (6 bis), мы найдем внутри его другой прямоугольник, где существуют единственные решения уравнения (4), (4 bis), которые можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\Phi}'_{1x}(x,y) &= \Omega_1\,(x_1 C_1(y), C_2(y),\ C_3(y),\ a_k(y),\ b_k(y),\ A_k(y)), \\ \Phi'_y(y,x) &= \Omega\,(y,\ C_4(x), C_5(x), C_6(x),\ a_k^{(1)}(x),\ b_k^{(1)}(x),\ B_k(x)), \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где $C_1(y)$, $C_2(y)$, $C_3(y)$ — произвольные функции y, а $C_4(x)$, $C_5(x)$, $C_6(x)$ — произвольные функции x.

§ 2. Общий интеграл дифференциального уравнения изогенной корреляции

В выражении (11) общих интегралов уравнений (4), (4 bis) содержится всего 30 параметров и произвольных функций. Покажем, что 24 из них могут быть однозначно выражены через 6 остальных.

Прежде всего, согласно замечанию в начале § 1, если $\Phi(u)$ и $\Phi_1(v)$ удовлетворяют основному тождеству, то и функции $C\Phi(Ay+B)+D$ и $C_1\Phi_1(A_1v+B_1)+D_1$ ему удовлетворяют, поэтому в функции $\Phi'_{1x}(x,y) = \lambda_1(y)\,\Phi'_1(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y))$ за две произвольные функции можно взять $\lambda_1(y)$ и $\varphi_1(y)$, а третья войдет произвольным множителем. Таким образом, общий интеграл (11) должен иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\Phi}'_{1x}(x,y) &= C_1(y)\,\tilde{\Omega}_1\,(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y),\ a_k(y),\ b_k(y),\ A_k(y)), \\ \tilde{\Phi}'_y(y,x) &= C_4(x)\,\tilde{\Omega}\,(\lambda(x)\,y+\varphi(x),\ a_k^{(1)}(x),\ b_k^{(1)}(x),\ B_k(x)). \end{aligned}\right\} \quad (11')$$

Примем теперь за произвольные функции $\lambda_1(y)$, $\varphi_1(y)$, $F'_1(y)=A_1(y)$, $\lambda(x)$, $\varphi(x)$, $F'(x)=B_1(x)$ и покажем, что все остальные 24 параметра и функции выражаются через них однозначно. В самом деле,

$$\left.\begin{aligned} a_k(y) &= \frac{\lambda^{(k)}(y)}{\lambda(y)}, \quad b_k(y)=\frac{\varphi^{(k)}(y)}{\lambda(y)}, \quad A_i(y)=A_i^{(i)}(y) \\ a_k^{(1)}(x) &= \frac{\lambda^{(k)}(x)}{\lambda(x)}, \quad b_k^{(1)}(x)=\frac{\varphi^{(k)}(x)}{\lambda(x)}, \quad B_i(x)=B_i^{(i)}(x) \\ &(k=1,\ 2,\ 3,\ 4;\quad i=2,\ 3,\ 4). \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Для нахождения $C_1(y)$ и $C_4(x)$ обратимся к соотношениям, получающимся от однократного дифференцирования основного тождества (2) по y и по x:

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{\Phi}'_y(y,x)&=A_1(y)+\widetilde{\Phi}'_{1x}(x,y)\,(a_1(y)\,x+b_1(y)),\\ \widetilde{\Phi}'_{1x}(x,y)&=B_1(y)+\widetilde{\Phi}'_y(y,x)\,(a_1^{(1)}(x)\,y+b_1^{(1)}(x)).\end{aligned}\right\}\qquad(7')$$

Первые из них представляют собою первое соотношение (7). Подставим в (7′) выражение для $\widetilde{\Phi}'_{1x}(x,y)$ и $\widetilde{\Phi}'_y(y,x)$ из (11′), тогда

$$\begin{aligned}A_1(y)&=C_4(x)\,\widetilde{\Omega}(\lambda(x)\,y+\varphi(x),\ a_k^{(1)}(x),\ b_k^{(1)}(x),\ B_k(x))-\\&\quad-C_1(y)\,\widetilde{\Omega}_1(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y),\ a_k(y),\ b_k(y),\ A_k(y))\,(a_1(y)\,x+b_1(y)),\\ B_1(x)&=C_1(y)\,\widetilde{\Omega}_1(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y),\ a_k(y),\ b_k(y),\ A_k(y))-\\&\quad-C_4(x)\,\widetilde{\Omega}(\lambda(x)\,y+\varphi(x),\ a_k^{(1)}(x),\ b_k^{(1)}(x),\ B_k(x))\,(a_k^{(1)}(x)\,y+b_k^{(1)}(x)).\end{aligned}$$

Пока не очевидно, что эти два соотношения не представляют одного соотношения и что, следовательно, из них можно однозначно определить $C_1(y)$ и $C_4(x)$. Для доказательства независимости полученных соотношений умножим первое на $a_1^{(1)}(x)\,y+b_1^{(1)}(x)$ и сложим со вторым, а второе умножим на $a_1(y)\,x+b_1(y)$ и сложим с первым, тогда получим два новых соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&A_1(y)\,(a_1^{(1)}(x)\,y+b_1^{(1)}(x))+B_1(x)=\\&\qquad=C(y)\,\widetilde{\Omega}_1(\lambda_1(y)\,x+\varphi_1(y),\ a_k(y),\ b_k(y),\ A_k(y))\cdot\\&\qquad\cdot[1-(a_1(y)\,x+b_1(y))\,(a_1^{(1)}(x)\,y+b_1^{(1)}(x))],\\&A_1(y)+B_1(x)\,(a_1(y)\,x+b_1(y))=\\&\qquad=C_4(x)\,\widetilde{\Omega}_1(\lambda(x)\,y+\varphi(x),a_k^{(1)}(x),\ b_k^{(1)}(x),\ B_k(x))\cdot\\&\qquad\cdot[1-(a_1(y)\,x+b_1(y))\,(a_1^{(1)}(x)\,y+b_1^{(1)}(x))].\end{aligned}\right\}(12')$$

Отсюда $C_1(y)$ и $C_4(x)$ находятся однозначно и выражаются через ранее найденные параметры.

Резюмируя, можем утверждать, что если 6 параметров произвольны, то остальные 24 параметра можно выразить через них однозначно.

При доказательстве этого утверждения мы для выражения одних параметров через другие пользовались дифференцированием и, таким образом, еще не доказали, что из выражений для общих интегралов (11) *можно исключить* 24 параметра, но если мы теперь это докажем, то из только что приведенных рассуждений об однозначности выражений 24 параметров через 6 остальных будет следовать, что такое исключение возможно только *одним способом*.

Считая попрежнему $\lambda(x)$, $\varphi(x)$, $\lambda_1(y)$, $\varphi_1(y)$, $A_1(x)$, $B_1(x)$ произвольными функциями, покажем, что общие интегралы (11′) удовлетворяют 24 независимым соотношениям, из которых, таким образом, можно определить 24 параметра и исключить их из выражений общих интегралов.

В самом деле, прежде всего имеется 4 соотношения (7), не зависимых между собой, как полученных последовательным дифференцированием, и еще 4 аналогичных соотношения, получающихся дифференцированием основного тождества по x. Любое из соотношении первой группы не зависит от любого соотношения второй группы, в чем можно убедиться аналогично тому, как была доказана независимость двух первых соотношений обеих групп, а именно соотношений (7′): после преобразо-

вания их к виду (12′) независимость их становится очевидной, так как эти соотношения содержат различные произвольные функции: первое — $\lambda_1(y)$ и $\varphi_1(y)$, а второе — $\lambda(x)$ и $\varphi(x)$.

Кроме того, имеются соотношения (8), (8 bis); оба эти соотношения после подстановки в правые части их выражений (11′) можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} a_1^{(1)}(x) &= L_1(x, C_1(y), \lambda_1(y), \varphi_1(y), a_k(y), b_k(y), A_k(y)), \\ b_1^{(1)}(x) + y a_1^{(1)}(x) &= M_1(x, C_1(y), \lambda_1(y), \varphi_1(y), a_k(y), b_k(y), A_k(y)) \end{aligned}\right\} \quad (8')$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_1(y) &= L_1(y, C_4(x), \lambda(x), \varphi(x), a_k^{(1)}(x), b_k^{(1)}(x), B_k(x)), \\ b_1(y) + x a_1(y) &= M(y, C_4(x), \lambda(x), \varphi(x), a_k^{(1)}(x), b_k^{(1)}(x), B_k(x)). \end{aligned}\right\} \quad (8'\,\mathrm{bis})$$

Продифференцируем теперь (8′) три раза по x, а (8′ bis) три раза по y. Тогда получим еще 12 соотношений. Нужно заметить, что предположение о существовании четырех производных у функций $\lambda(x)$, $\lambda_1(y)$, $\varphi(x)$, $\varphi_1(y)$ влечет за собой (согласно формулам (5), (5 bis)) существование у функций Φ и Φ_1, а следовательно, и у функций $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Phi}_1$ производных до шестого порядка включительно. Формулы (8′) и (8′ bis), следовательно, можно дифференцировать три раза, так как их правая часть не содержит производных $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Phi}_1$ выше третьего порядка.

После дифференцирования (8′), (8′ bis) можно выразить производные параметров, стоящих в их левых частях, через сами параметры; производные же правых частей, как легко видеть, производных параметров не содержат (например, в (8′) функции L_1 и M_1 содержат лишь параметры, зависящие от y, а дифференцирование ведется по x). Это выражение легко получить, если принять во внимание обозначения (12).

Например, для производных параметров, зависящих от y, имеем следующие выражения:

$$a_1^{(1)\prime}(x) = a_2^{(1)} - a_1^{(1)2},$$

$$a_1^{(1)\prime\prime}(x) = a_3^{(1)} - 3a_1^{(1)} a_2^{(1)} + 2a_1^{(1)3},$$

$$a_1^{(1)\prime\prime\prime}(x) = a_4^{(1)} - 4a_1^{(1)} a_3^{(1)} - 3a_2^{(1)2} + 12a_1^{(1)2} a_2^{(1)} - 6a_1^{(1)4},$$

$$b_1^{(1)\prime}(x) = b_2^{(1)} - b_1^{(1)} a_1^{(1)},$$

$$b_1^{(1)\prime\prime}(x) = b_3^{(1)} - 2b_2^{(1)} a_1^{(1)} + 2b_1^{(1)} a_1^{(1)2} - b_1^{(1)} a_2^{(1)},$$

$$b_1^{(1)\prime\prime\prime}(x) = b_4^{(1)} - 3b_3^{(1)} a_1^{(1)} + 6b_2^{(1)} a_1^{(1)2} - 3b_2^{(1)} a_2^{(1)} - 6b_1^{(1)} a_2^{(1)} + \\ + 6b_1^{(1)} a_1^{(1)} a_2^{(1)} - b_2^{(1)} a_3^{(1)},$$

и аналогичные выражения для производных $a_1(y)$, $b_1(y)$.

Окончательно мы будем иметь 16 соотношений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}
a_1^{(1)}(x) &= L_1(x, C_1, \lambda_1(y), \varphi_1(y), a_k(y), b_k(y), A_k(y)),\\
a_1^{(1)\prime}(x) &= L'_{1x}(x, C_1, \lambda_1(y), \varphi_1(y), a_k(y), b_k(y), A_k(y)),\\
a_1^{(1)\prime\prime}(x) &= L''_{1x}(x, \ldots),\\
a_1^{(1)\prime\prime\prime}(x) &= L'''_{1x}(x, \ldots),\\
b_1^{(1)}(x) &= M_1(x, C_1, \lambda_1, \varphi_1, a_k, b_k, A_k) -\\
&\quad - yL_1(x, C_1, \lambda_1, \varphi_1, a_k, b_k, A_k)\\
b_1^{(1)\prime}(x) &= M'_{1x}(x, \ldots) - yL'_{1x}(x, \ldots),\\
b_1^{(1)\prime\prime}(x) &= M''_{1x}(x, \ldots) - yL''_{1x}(x, \ldots),\\
b_1^{(1)\prime\prime\prime}(x) &= M'''_{1x}(x, \ldots) - yL'''_{1x}(x, \ldots).
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned}
a_1(y) &= L(y, C_4(x), \varphi(x), \lambda(x), a_k^{(1)}(x), b_k^{(1)}(x), B_k(x)),\\
a'_1(y) &= L'_y(y, \ldots),\\
a''_1(y) &= L''_y(y, \ldots),\\
a'''_1(y) &= L'''_1(y, \ldots)\\
b_1(y) &= M(y, C_4, \varphi, \lambda, a_k^{(1)}, b_k^{(1)}, B_k) -\\
&\quad - xL(y, C_4, \varphi, \lambda, a_k^{(1)}, b_k^{(1)}, B_k),\\
b'_1(y) &= M'_y(y, \ldots) - xL'_y(y, \ldots),\\
b''_1(y) &= M'_y(y, \ldots) - xL''_y(y, \ldots),\\
b'''_1(y) &= M'''_y(y, \ldots) - xL'''_y(y, \ldots).
\end{aligned}\right\} \quad (13\ \text{bis})$$

После подстановки в левые части формул (**) и им аналогичных для производных $a_1(y)$ и $b_1(y)$ соотношения (13), (13 bis) не будут содержать производных параметров. Соотношения (13) и (13 bis) независимы, так как получены последовательным дифференцированием; каждое соотношение (13) не зависит от каждого соотношения (13 bis), так как они содержат разные произвольные функции.

Таким образом, мы имеем на самом деле 24 независимых соотношения для исключения 24 параметров; кроме того, очевидно, что в выражении для параметров, зависящих от x, не могут участвовать параметры, зависящие от y. Таким образом, общие интегралы окончательно имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\Phi}'_{1x}(x,y) &= \Psi_1(x, A_1(y), \lambda_1(y), \varphi_1(y)),\\
\tilde{\Phi}'_y(y,x) &= \Psi(y, B_1(x), \lambda(x), \varphi(x)).
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Выражения (11′) были единственны; кроме того, мы убедились, что исключение параметров возможно лишь одним способом, следовательно, выражения (14) единственны. Если, таким образом, мы укажем какую-нибудь пару функций Ψ_1 и Ψ, содержащую по три произвольные функции, то это и будет единственным наиболее общим решением уравнений (4), (4 bis).

Из того, что Ψ_1 и Ψ являются решениями (4), (4 bis) не следует еще, что они удовлетворяют функциональному тождеству с *произвольными функциями*, но когда Ψ_1 и Ψ найдены, — непосредственная подстановка их в тождество (2) позволит определить функции $A_1(y)$, $\lambda_1(y)$, $\varphi_1(y)$, $B_1(x)$, $\lambda(x)$, $\varphi(x)$.

В следующем параграфе проведено фактическое построение изогенной корреляции, причем там изогенная корреляция ищется в предположении, что функции $\tilde{\Phi}'_{1x}(x,y)$, $\tilde{\Phi}'_{y}(y,x)$ имеют вид

$$\Phi'_{1x}(x,y) = C_1(y)\frac{2C_2(y)x + 2C_3(y)}{C_2(y)x^2 + 2C_3(y)x + 1},$$
$$\Phi'_{y}(y,x) = C_4(x)\frac{2C_5(x)y + 2C_6(x)}{C_5(x)y^2 + 2C_6(x)y + 1},$$

причем из функционального тождества немедленно следует, что

$$C_1(y) = C_4(x) = C = \text{const},$$
$$C_2(y) = r_1(y) = \frac{Dy^2 + 2Gy + A}{Fy^2 + 2Iy + 1},$$
$$C_3(y) = s_1(y) = \frac{Ey^2 + Hy + B}{Fy^2 + 2Iy + 1},$$
$$C_5(y) = r(x) = \frac{Dx^2 + 2Ex + F}{Ax^2 + 2Bx + 1},$$
$$C_6(x) = s(x) = \frac{Gx^2 + Hx + I}{Ax^2 + 2Bx + 1},$$

где A, B, D, E, F, G, H, I — произвольные постоянные.

§ 3. Построение изогенной корреляции в общем случае. Предельные случаи. Прямолинейная и нормальная корреляция

Будем искать функции $\lambda(x)$, $\varphi(x)$, $\lambda_1(y)$, $\varphi_1(y)$, предположив, что Φ и Φ_1 имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z) &= C\lg[(z+\alpha)^2+\gamma]+\nu,\\ \Phi_1(z) &= C\lg[(z+\alpha_1)^2+\gamma_1]+\nu_1.\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

Тогда тождество (2) запишется так:

$$F(x) + C\lg[(\lambda(x)y + \varphi(x) + \alpha)^2 + \gamma] =$$
$$= F_1(y) + C\lg[(\lambda_1(y)x + \varphi_1(y) + \alpha_1)^2 + \gamma_1]$$

или

$$F(x) + C\lg[\lambda^2(x)y^2 + 2\lambda(x)(\varphi(x)+\alpha)y + (\varphi(x)+\alpha)^2 + \gamma] =$$
$$= F_1(y) + C\lg[\lambda_1^2(y)x^2 + 2\lambda_1(y)(\varphi_1(y)+\alpha_1)x + (\varphi_1(y)+\alpha_1)^2 + \gamma_1].$$

Вынесем слева из-под скобок $(\varphi(x)+\alpha)^2+\gamma$, а справа $(\varphi_1(y)+\alpha_1)^2+\gamma_1$; тогда получим, деля на C,

$$\overline{F}(x) + \lg[r(x)y^2 + 2s(x)y + 1] = F_1(y) + \lg[r_1(y)x^2 + 2s_1(y)x + 1], \quad (^*)$$

где

$$\left.\begin{aligned} r(x) &= \frac{\lambda^2(x)}{(\varphi(x)+\alpha)^2+\gamma}, & r_1(y) &= \frac{\lambda_1^2(y)}{(\varphi_1(y)+\alpha_1)^2+\gamma_1},\\ s(x) &= \frac{\lambda(x)(\varphi(x)+\alpha)}{(\varphi(x)+\alpha)^2+\gamma}, & s_1(y) &= \frac{\lambda_1(y)(\varphi_1(y)+\alpha_1)}{(\varphi_1(y)+\alpha_1)^2+\gamma_1}.\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Продифференцируем $(^*)$ два раза по x, а также два раза по y:

$$\overline{F}'(x) + \frac{r'(x)y^2 + 2s'(x)y}{r(x)y^2 + 2s(x)y + 1} = \frac{2xr_1(y) + 2s_1(y)}{r_1(y)x^2 + 2s_1(y)x + 1},$$

$$\bar{F}''(x)+\frac{r''(x)\,y^2+2s''(x)\,y}{r(x)\,y^2+2s(x)\,y+1}-\left(\frac{r'(x)\,y^2+2s'(x)\,y}{r(x)\,y^2+2s(x)\,y+1}\right)^2=$$
$$=\frac{2r_1(y)}{r_1(y)\,x^2+2s_1(y)\,x+1}-\left(\frac{2xr_1(y)+2s_1(y)}{r_1(y)\,x^2+2s_1(y)\,x+1}\right)^2,$$
$$\frac{2yr(x)+2s(x)}{r(y)\,y^2+2s(x)\,y+1}=\bar{F}'_1(y)+\frac{r'_1(y)\,x^2+2s'_1(y)\,x}{r_1(y)\,x^2+2s_1(y)\,x+1},$$
$$\frac{2r(x)}{r(x)\,y^2+2s(x)\,y+1}-\left(\frac{2yr(x)+2s(x)}{r(x)\,y^2+2s(x)\,y+1}\right)^2=$$
$$=\bar{F}''_1(y)+\frac{r''_1(y)\,x^2+2s''_1(y)\,x}{r_1(y)\,x^2+2s_1(y)\,x+1}-\left(\frac{r'_1(y)\,x^2+2s'_1(y)\,x}{r_1(y)\,x^2+2s_1(y)\,x+1}\right)^2.$$

Положим в двух первых равенствах $x=0$, в двух вторых $y=0$, обозначив для краткости

$$r(0)=a,\quad s(0)=b,\quad r'(0)=c,\quad s'(0)=e,\quad r''(0)=f,\quad s''(0)=g,$$
$$r_1(0)=a_1,\quad s_1(0)=b_1,\quad r'_1(0)=c_1,\quad s'_1(0)=e_1,\quad r''_1(0)=f_1,\quad s''_1(0)=g_1.$$

Полагая во всех равенствах $x=y=0$, найдем, кроме того,

$$\bar{F}'(0)=2b_1,\quad \bar{F}''(0)=2a_1-yb_1^2,$$
$$\bar{F}'_1(0)=2b,\quad \bar{F}''_1(0)=2a-yb^2.$$

Тогда

$$2s_1(y)=2b_1+\frac{cy^2+2ey}{ay^2+2by+1},$$
$$2a_1-4b_1^2+\frac{fy^2+2gy}{ay^2+2by+1}-\left(\frac{cy^2+2ey}{ay^2+2by+1}\right)^2=2r_1(y)-(2s_1(y))^2.$$

Подставляя сюда вместо $2s_1(y)$ только что найденное значение, получим

$$2r_1(y)=\frac{fy^2+2gy}{ay^2+2by+1}+yb_1\frac{cy^2+2ey}{ay^2+2by+1}+2a_1.$$

Совершенно аналогично

$$2s(x)=2b+\frac{c_1x^2+2e_1x}{a_1x^2+2b_1x+1},$$
$$2r(x)=2a+\frac{f_1x^2+2g_1x}{a_1x^2+2b_1x+1}+yb\,\frac{c_1x^2+2e_1x}{a_1x^2+2b_1x+1}.$$

Не все входящие сюда постоянные произвольные; дифференцируя $2s_1(y)$ и $2r_1(y)$ два раза и полагая $y=0$, получим четыре соотношения между ними:

(1) $2e_1=2e$,
(2) $2g_1=2c-8eb$,
(3) $2c_1=2g+8e_1b_1$,
(4) $2f_1=2f-8gb+8b_1g_1$;

аналогично, дифференцируя $2s(x)$ и $2r(x)$ два раза и полагая $x=0$, получим

(5) $2e=2e_1$,
(6) $2g=2c_1-8e_1b_1$,
(7) $2c=2g_1+8eb$;
(8) $2f=2f_1-8g_1b_1+8bg$.

$$\left.\begin{matrix}(1) & \text{и} & (2)\\ (2) & \text{и} & (7)\\ (3) & \text{и} & (6)\\ (4) & \text{и} & (8)\end{matrix}\right\} \text{сводятся к одному} \left\{\begin{matrix}(\text{I}) & e_1 = e\\ (\text{II}) & g_1 = c - 4eb_1\\ (\text{III}) & g = c_1 - 4eb_1\\ (\text{IV}) & f = f_1 - 4(bc_1 - cb_1)\end{matrix}\right.$$

Имеем, следовательно, восемь произвольных постоянных: $a, a_1, b, b_1, c, c_1, e, f$.

Приводя полученные выше выражения для функций $s(x)$, $r(x)$, $s_1(y)$, $r_1(y)$ к общему знаменателю, деля на 2 и вводя новые обозначения постоянных

$$\begin{gathered}A = a_1, \quad B = b_1, \quad 2D = f + 4b_1c + 2aa_1, \quad 2E = c + 2ab_1,\\ F = a, \quad 2G = 2a_1b + c_1, \quad 2H = 4bb_1 + 2e, \quad I = b,\end{gathered}$$

получим окончательно

$$\left.\begin{aligned} r(x) &= \frac{Dx^2 + 2Ex + F}{Ax^2 + 2Bx + 1}, & r_1(y) &= \frac{Dy^2 + 2Gy + A}{Fy^2 + 2Iy + 1},\\ s(x) &= \frac{Gx^2 + Hx + I}{Ax^2 + 2Bx + 1}, & s_1(y) &= \frac{Ey^2 + Hy + B}{Fy^2 + 2Iy + 1}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ввиду (16), $\lambda(x)$, $\varphi(x)$, $\lambda_1(y)$, $\varphi_1(y)$ следующим образом выражаются через функции r, s, r_1, s_1:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \sqrt{\gamma}\, \frac{r(x)}{\sqrt{r(x) - s^2(x)}}, & \lambda_1(y) &= \sqrt{\gamma_1}\, \frac{r_1(y)}{\sqrt{r_1(y) - s_1^2(y)}},\\ \varphi(x) + \alpha &= \sqrt{\gamma}\, \frac{s(x)}{\sqrt{r(x) - s^2(x)}}, & \varphi_1(y) + \alpha_1 &= \sqrt{\gamma_1}\, \frac{s_1(y)}{\sqrt{r_1(y) - s_1^2(y)}}, \end{aligned}$$

или, после подстановки формул (17),

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x) &= \sqrt{\gamma}\, \frac{Dx^2 + 2Ex + F}{\sqrt{(Ax^2 + 2Bx + 1)(Dx^2 + 2Ex + F) - (Gx^2 + Hx + I)^2}},\\ \varphi(x) + \alpha &= \sqrt{\gamma}\, \frac{Gx^2 + Hx + I}{\sqrt{(Ax^2 + 2Bx + 1)(Dx^2 + 2Ex + F) - (Gx^2 + Hx + I)^2}},\\ \lambda_1(y) &= \sqrt{\gamma_1}\, \frac{Dy^2 + 2Gy + A}{\sqrt{(Fy^2 + 2Iy + 1)(Dy^2 + 2Gy + A) - (Ey^2 + Hy + B)^2}},\\ \varphi_1(y) + \alpha_1 &= \sqrt{\gamma_1}\, \frac{Ey^2 + Hy + B}{\sqrt{(Fy^2 + 2Iy + 1)(Dy^2 + 2Gy + A) - (Ey^2 + Hy + B)^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Теперь сразу можно найти функции $F(x)$, $F_1(y)$ и, следовательно, $p(x)$, $P(y)$ [см. формулы (2)]:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \nu\, \frac{(Dx^2 + 2Ex + F)^{-C-1}}{[(Ax^2 + 2Bx + 1)(Dx^2 + 2Ex + F) - (Gx^2 + Hx + I)^2]^{-C-\frac{1}{2}}},\\ P(y) &= \nu_1\, \frac{(Dy^2 + 2Gy + A)^{-C-\frac{1}{2}}}{[(Fy^2 + 2Iy + 1)(Dy^2 + 2Gy + A) - (Ey^2 + Hy + B)^2]^{-C-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Подставляя все найденные функции в тождество (1), получим (опустив числовой множитель):

$$[Dx^2y^2+2Gx^2y+2Ey^2x+Ax^2+Fy^2+2Hxy+2Bx+2Iy+1]^C=$$
$$=[Dx^2y^2+2Gx^2y+2Ey^2x+Ax^2+Fy^2+2Hxy+2Bx+2Iy+1]^C.$$

Здесь уже вынесен общий множитель аргументов. Таким образом, в тождестве имеем 9 произвольных постоянных, не считая общего множителя аргументов:

$$A, B, C, D, E, F, G, H, I.$$

Поверхность корреляции имеет вид

$$F(x,y)=\delta[Dx^2y^2+2Gx^2y+2Ey^2x+Ax^2+Fy^2+2Hxy+2Bx+2Iy+1]^C \quad (20$$

Постоянная δ определяется из условия, что интеграл, распространенный на всю плоскость (XY), равен единице. Все интегралы в бесконечных пределах от функций (19), (20) конечны, если только

$$C<-1. \quad (21)$$

На постоянные A, B, D, E, F, G, H, I нужно наложить лишь то ограничение, при котором полином

$$Dx^2y^2+2Gx^2y+2Ey^2x+Ax^2+Fy^2+2Hxy+2Bx+2Iy+1$$

не имеет действительных корней и сохраняет положительный знак при любых значениях x и y.

Условные функции распределения вероятностей, $\varphi_y(x)$, $f_x(y)$, когда известны априорные функции распределения вероятностей $p(x)$, $P(y)$ и поверхность корреляции (20), находятся без труда по формулам

$$f_x(y)=p^{-1}(x)F(x,y), \quad \varphi_y(x)=P^{-1}(y)F(x,y). \quad (22)$$

Таким образом, мы убедились (§ 2), что функции (15), (18), (19), (20), (22) представляют единственное и наиболее общее решение нашей задачи.

В этих формулах содержатся все виды изогенной корреляции при единственном ограничении, что Φ и Φ_1 не являются логарифмами от полиномов первой степени. Как мы увидим далее, это ограничение несущественно, что и понятно, так как логарифм от полинома первой степени представляет собою частный случай логарифма от полинома второй степени, каковыми являются Φ, Φ_1 в общем случае.

Положим $C=n$ ($n\geqslant2$ целое положительное число) и вычислим условные средние, условные дисперсии и кривые регрессии для нашей корреляции. Тогда, используя интеграл

$$U_n=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(z^2+k^2)^n}=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{k^{2n-1}},$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
\text{м.о.}_x\, y &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_x(y)\, dy = -\frac{Gx^2+Hx+I}{Dx^2+2Ex+F},\\
\text{м.о.}_y\, x &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \varphi_y(x)\, dx = -\frac{Ey^2+Hy+B}{Dy^2+2Gy+A},\\
\sigma_x^2(y) &= \frac{1}{2n-3}\,\frac{(Dx^2+2Ex+F)(Ax^2+2Bx+1)-(Gx^2+Hx+I)^2}{(Dx^2+2Ex+F)^2},\\
\sigma_y^2(x) &= \frac{1}{2n-3}\,\frac{(Dy^2+2Gy+A)(Fy^2+2Iy+1)-(Ey^2+Hy+B)^2}{(Dy^2+2Gy+A)^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Таким образом, в общем случае изогенной корреляции мы имеем дело с криволинейной корреляцией, причем кривые регрессии даются уравнениями

$$y = -\frac{Gx^2+Hx+I}{Dx^2+2Ex+F}, \qquad x = -\frac{Ey^2+Hy+B}{Dy^2+2Gy+A}. \quad (23')$$

Кроме того, как показывают две последние формулы (23), изогенная корреляция в общем случае гетероскедастическая.

Оставаясь в рамках общего случая, можно привести корреляцию к каноническому виду, перенося начало координат так, чтобы коэффициенты при переменных в первой степени обратились в нуль ($B = I = 0$), так что поверхность корреляции примет вид

$$F(x,y) = \delta\,[Dx^2y^2 + 2Gx^2y + 2Ey^2x + Ax^2 + Fy^2 + 2Hxy + 1]^C. \quad (20')$$

В этом случае обе кривые регрессии проходят через начало координат.

1°. Изогенная корреляция С. Н. Бернштейна

Рассмотрим предельный случай, когда $C \to \infty$, а все постоянные A, B, D, E, F, G, H, I стремятся к нулю. Это удобнее всего выполнить, заменив на $\frac{a}{-C}, \frac{b}{-C}, \frac{d}{-C}, \frac{e}{-C}, \frac{f}{-C}, \frac{g}{-C}, \frac{h}{-C}, \frac{i}{-C}, -C\gamma, -\gamma_1 C$ соответственно $A, B, D, E, F, G, H, I, \gamma, \gamma_1$. Тогда функции Φ, Φ_1, определяемые формулой (15), примут вид

$$\left.\begin{aligned}
\Phi(z) &= -\frac{1}{\gamma}\,(z+\alpha)^2 + \text{const},\\
\Phi_1(z) &= -\frac{1}{\gamma}\,(z+\alpha_1)^2 + \text{const},
\end{aligned}\right\} \quad (15\text{ bis})$$

т. е. Φ и Φ_1 — полиномы второй степени (именно этот случай и был рассмотрен С. Н. Бернштейном).

Совершим предельный переход в формулах (18):

$$\lambda(x)=\sqrt{-C\gamma}\cdot$$
$$\cdot\frac{\frac{d}{-C}x^2+2\frac{e}{-C}x+\frac{f}{-C}}{\sqrt{\left(\frac{a}{-C}x^2+2\frac{b}{-C}x+1\right)\left(\frac{d}{-C}x^2+2\frac{e}{-C}x+\frac{f}{-C}\right)-\left(\frac{g}{-C}x^2+\frac{h}{-C}x+\frac{i}{-C}\right)^2}}=$$
$$=\sqrt{\gamma}\,\frac{dx^2+2ex+f}{\sqrt{\left(\frac{a}{-C}x^2+2\frac{b}{-C}x+1\right)(dx^2+2ex+f)-\frac{1}{-C}(gx^2+hx+i)^2}}.$$

Производя аналогичную подстановку в другие формулы и переходя к пределу, получим

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(x)=\sqrt{\gamma}\sqrt{dx^2+2ex+1},\quad \lambda_1(y)=\sqrt{\gamma_1}\sqrt{dy^2+2gy+f},\\&\varphi(x)+\alpha=\sqrt{\gamma}\,\frac{gx^2+hx+i}{\sqrt{dx^2+2ex+f}},\quad \varphi_1(y)+\alpha_1=\sqrt{\gamma_1}\,\frac{ey^2+hy+b}{\sqrt{dy^2+2gy+a}}\end{aligned}\right\}\quad(18\text{ bis})$$

Проделывая то же самое с формулой (20), найдем

$$F(x,y)=\delta e^{-(dx^2y^2+2gx^2y+2ey^2x+ax^2+fy^2+2hxy+2bx+2iy)}.\qquad(20\text{ bis})$$

Положив, далее, $C=-n$ $(n\geqslant 2)$ и устремляя $n\to\infty$, получим из (23)

$$\left.\begin{aligned}\text{м. о.}_x\,y&=-\frac{gx^2+hx+i}{dx^2+2ex+f},\\\text{м. о.}_y\,x&=-\frac{ey^2+hy+b}{dy^2+2gy+a},\\\sigma_x^2(y)&=\frac{1}{2}\,\frac{1}{dx^2+2ex+f},\\\sigma_y^2(x)&=\frac{1}{2}\,\frac{1}{dy^2+2gy+a}.\end{aligned}\right\}\quad(23\text{ bis})$$

Полученная корреляция остается криволинейной и гетероскедастической.

Приводя эту корреляцию к каноническому виду, обратим в нуль две постоянных $(i=b=0)$ и получим все формулы, приведенные в работе С. Н. Бернштейна.

2°. Прямолинейная изогенная корреляция

Положив
$$D=E=G=0,$$
получим прямолинейную корреляцию, как это видно из формул (23).

Выпишем все функции в этом случае:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(x)&=\frac{\sqrt{\gamma}\cdot F}{\sqrt{F(Ax^2+2Bx+1)-(Hx+I)^2}},\\\varphi(x)+\alpha&=\sqrt{\gamma}\,\frac{Hx+I}{\sqrt{F(Ax^2+2Bx+1)-(Hx+I)^2}},\\\lambda_1(y)&=\frac{A\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{A(Fy^2+2Iy+1)-(Hy+B)^2}},\\\varphi_1(y)+\alpha_1&=\sqrt{\gamma_1}\,\frac{Hy+B}{\sqrt{A(Fy^2+2Iy+1)-(Hy+B)^2}},\end{aligned}\right\}\quad(18\text{ ter})$$

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \frac{\nu F^{-C-1}}{[F(Ax^2+2Bx+1)-(Hx+I)^2]^{-C-\frac{1}{2}}}, \\ P(y) &= \frac{\nu_1 A^{-C-1}}{[A(Fy^2+2Iy+1)-(Hy+B)^2]^{-C-\frac{1}{2}}}, \end{aligned}\right\} \qquad (19\ \text{ter})$$

$$F(x,y) = \delta\,[Ax^2+Fy^2+2Hxy+2Bx+2Iy+1]^C. \qquad (20\ \text{ter})$$

Корреляция, как и в общем случае, распространяется на всю плоскость (XY).

Необходимые и достаточные условия конечности всех интегралов выражаются неравенствами

$$C < -1, \quad AF - H^2 > 0, \quad A > B^2, \quad F > I^2. \qquad (24)$$

Полагая снова $C = -n$ ($n \geqslant 2$), получим вместо формул (23)

$$\left.\begin{aligned} \text{м. о.}_x\, y &= -\frac{1}{F}(Hx+I), \\ \text{м. о.}_y\, x &= -\frac{1}{A}(Hy+B), \\ \sigma_x^2(y) &= \frac{1}{2n-3}\,\frac{F(Ax^2+2Bx+1)-(Hx+I)^2}{F^2}, \\ \sigma_y^2(x) &= \frac{1}{2n-3}\,\frac{A(Fy^2+2Iy+1)-(Hy+B)^2}{A^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (23\ \text{ter})$$

Перенесем начало координат в точку (I, B) и тем самым приведем к каноническому виду; тогда

$$I = B = 0, \quad \text{м. о. } x = \text{м. о. } y = 0.$$

В этом случае прямые регрессии

$$y = -\frac{H}{F}x, \quad x = -\frac{H}{A}y \qquad (25)$$

проходят через начало координат.

Коэффициенты регрессии ρ_1 y по x и ρ x по y, соответственно, равны

$$\rho_1 = -\frac{H}{F}, \quad \rho = -\frac{H}{A}, \qquad (26)$$

а коэффициент корреляции

$$R^2 = \rho_1\rho = \frac{H^2}{AF} < 1,$$

$$R = \frac{H}{\sqrt{AF}}. \qquad (27)$$

Очевидно, $|R| < 1$, как это следует из (24).

Мы получили прямолинейную гетероскедастическую корреляцию, непосредственно обобщающую нормальную корреляцию. Последняя, как мы увидим, получается из этой, когда $C \to -\infty$. Предлагаемая корреляция может с успехом служить для выравнивания по корреляционной таблице во всех случаях, когда имеют дело с корреляцией, близкой к нормальной, причем у нас имеется возможность широкого выбора

поверхностей корреляции — беря разные n (чем больше n, тем ближе корреляция к нормальной). В отличие от нормальной корреляции все интегралы в случае данной корреляции, которую можно назвать обобщенной нормальной корреляцией, вычисляются совершенно элементарно и не требуют составления таблиц. Кривые (19) априорных вероятностей могут быть названы обобщенными нормальными кривыми.

В отличие от нормальной кривой

$$y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \tag{N}$$

обобщенная нормальная кривая имеет вид

$$y=\frac{\nu}{\left[1+\frac{(x-\alpha)^2}{2s^2n}\right]^n}. \tag{O}$$

Определим параметры α, s и коэффициент ν. Эти параметры имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=\bar{x}, \qquad s^2=\frac{2n-3}{2n}\sigma^2,\\ &\nu=\frac{1}{s\pi\sqrt{2n}}\frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdots(2n-3)}.\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Окончательно обобщенная нормальная кривая имеет вид

$$y=\frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2n-3}}\frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdots(2n-3)}\frac{1}{\left[1+\frac{(x-\bar{x})^2}{(2n-3)\sigma^2}\right]^n}. \tag{ON}$$

Это — симметричная кривая; нечетные центральные моменты ее равны нулю (см. кривую Пирсона VII типа [(2), стр. 198]).

Четвертый центральный момент равен

$$\mu_4=s^4\frac{3-\frac{5}{n}}{\left(1-\frac{5}{2n}\right)\left(1-\frac{3}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)},$$

в то время как

$$\sigma^2=\mu_2=\frac{2n}{2n-3}s^2. \tag{29}$$

Отсюда найдем эксцесс

$$E=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-3=\beta_2-3=\left(3-\frac{5}{n}\right)\frac{1-\frac{3}{2n}}{\left(1-\frac{5}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}-3. \tag{30}$$

Четвертый момент существует, если $n\geqslant 3$.

Приближенные значения эксцесса для разных n приводятся в табличке

$n=$	3	4	5	6	10	20	100	200
$\beta_2-3=$	3	0,889	0,500	0,343	0,148	0,060	0,010	0,005

Таким образом, во всех случаях, когда бывает нужно выравнять симметрическое распределение с небольшим положительным эксцессом, выравнивание по обобщенной нормальной кривой (с соответствующим значением n, определяемым по эмпирическому эксцессу и по табличке, аналогичной приведенной) будет лучше, чем по нормальной кривой.

3°. Нормальная корреляция

Заменяя, как и в 1°, постоянные $A, B, F, H, I, \gamma, \gamma_1$ соответственно на $\frac{a}{-C}, \frac{b}{-C}, \frac{f}{-C}, \frac{h}{-C}, \frac{i}{-C}, -\gamma C, -\gamma_1 C$ в формулах (18), получим

$$\lambda(x)=\frac{\sqrt{-C}\gamma\frac{f}{-C}}{\sqrt{\frac{f}{-C}\left(\frac{a}{-C}x^2+\frac{2b}{-C}x+1\right)-\left(\frac{h}{-C}x+\frac{i}{-C}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\gamma}f}{\sqrt{f\left(\frac{a}{-C}x^2+2\frac{b}{-C}x+1\right)-\frac{1}{-C}(hx+i)^2}}.$$

Переходя к пределу, получим при $C\to-\infty$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(x)=\sqrt{\gamma}f=\text{const}, &&\lambda_1(y)=\sqrt{\gamma_1}a=\text{const},\\ &\varphi(x)+\alpha=\sqrt{\frac{\gamma}{f}}(hx+i), &&\varphi_1(y)+\alpha=\sqrt{\frac{\gamma_1}{a}}(hy+b).\end{aligned}\right\}\qquad(18\text{N})$$

Поверхность корреляции (20 ter) примет вид

$$F(x,y)=\delta e^{-(ax^2+fy^2+2hxy+2bx+2iy)}.\qquad(20\text{N})$$

Положив $C=-n$ $(n\geqslant 2)$, $n\to\infty$, из формулы (23 ter) найдем

$$\left.\begin{aligned}\text{м. о.}_{\cdot x}\, y&=-\frac{1}{f}(hx+i),\\ \text{м. о.}_{\cdot y}\, x&=-\frac{1}{a}(hy+b),\\ \sigma_x^2(y)&=\frac{1}{2}\frac{1}{f}=\text{const},\\ \sigma_4^2(x)&=\frac{1}{2}\frac{1}{a}=\text{const}.\end{aligned}\right\}\qquad(23\text{N})$$

Итак, на самом деле мы получили прямолинейную, твердую, гомоскедастическую корреляцию, т. е. нормальную корреляцию.

Коэффициенты регрессии и корреляции имеют тот же вид, что и в обобщенной нормальной корреляции:

$$\rho_1=-\frac{h}{f},\quad \rho=-\frac{h}{a},\qquad(26\text{N})$$

$$R=\frac{h}{\sqrt{af}},\quad |R|<1,\quad af>h^2.\qquad(27\text{N})$$

§ 4. Основные теоремы изогенной корреляции

Выясним прежде всего, к чему приводит несоблюдение одного иэ условий (6), (6 bis). Пусть, например, (6) не соблюдается, т. е. в некотором прямоугольнике $\begin{pmatrix}\alpha\leqslant x\leqslant\beta\\ \alpha_1\leqslant y\leqslant\beta_1\end{pmatrix}$ мы имеем тождественно

$$\begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_3 & 2P_2 \end{vmatrix} = P_1 P_3 - 2P_2^2 = 0. \qquad (6')$$

Подставляя сюда выражение P_k через $\tilde{\Phi}'_y(y,x)$ по формулам (*) § 1, находим

$$\tilde{\Phi}'_y(y,x)\,\tilde{\Phi}'''_y(y,x) - 2\tilde{\Phi}''^2_y(y,x) = 0$$

или, выразив P_k через $\Phi^{(k)}(\lambda(x)y + \varphi(x))$ по формулам (3) и потом сокращая на $\lambda^4(x)$, получим совершенно аналогичное уравнение для функции $\Phi(\lambda(x)y + \varphi(x)) = \Phi(u)$ одного аргумента

$$\Phi'(u)\,\Phi'''^2(u) - 2\Phi''^2(u) = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения есть логарифм от полинома первой степени:

$$\Phi(u) = C_1 \lg\left(\frac{u}{|C_1|} + C_2\right) + C_3;$$

в предельном случае (при $C_1 \to -\infty$) $\Phi(u)$ может быть полиномом первой степени.

Важно заметить, что определенная в прямоугольнике функция $\Phi(u) = \Phi(\lambda(x)y + \varphi(x)) = \tilde{\Phi}(y,x)$ аналитически продолжается на всю плоскость (XY) и на всю плоскость комплексного переменного и, следовательно, если условие (6) не соблюдается в прямоугольнике, то оно не соблюдается на всей плоскости (XY). Точно так же, если (6 bis) не соблюдается в некотором прямоугольнике, функция $\Phi_1(v) = \Phi_1(\lambda_1(y)x + \varphi_1(y))$ есть логарифм от полинома первой степени (или, как предельный случай, полином первой степени) и условие (6 bis) не будет соблюдаться во всей плоскости (XY). Наоборот, если найдется *одна точка*, где $\begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_3 & 2P_2 \end{vmatrix} \neq 0$, т. е. (6) соблюдено, то по непрерывности всех функций и их производных до третьего порядка, входящих в выражение P_1, P_2, P_3, условие (6) будет соблюдаться в некотором прямоугольнике, и, что самое важное, в этом случае оно не может не соблюдаться ни в каком прямоугольнике плоскости (XY).

Точно так же, если $\begin{vmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_3 & 2Q_2 \end{vmatrix} \neq 0$ в одной какой-нибудь точке, то условие

$$\begin{vmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_3 & 2Q_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6'\text{bis})$$

не может иметь места ни в каком прямоугольнике плоскости. Следовательно, если условия (6), (6 bis) соблюдаются каждое хоть в одной точке плоскости (XY) хотя бы в разных для каждого соотношениях, то всегда найдется целый прямоугольник, где они соблюдаются одновременно*.

---

* В этом легко убедиться следующим простым рассуждением. Пусть в точке (x_0, y_0) соблюдается (6), тогда по непрерывности функций, входящих в P_k, оно будет соблюдаться и в некотором прямоугольнике G, содержащем (x_0, y_0). Внутри этого прямоугольника найдется точка (x_1, y_1), где соблюдается (6 bis) (ибо в противном случае (6 bis) нигде бы не соблюдалось). По непрерывности функций, входящих в Q_k, найдется прямоугольник G_1, содержащий (x_1, y_1) и содержащийся в G. Это и будет искомым прямоугольником.

Таким образом, условие одновременного соблюдения (6), (6 bis) в целом прямоугольнике, предполагавшееся выполненным на протяжении первых трех параграфов, является чрезмерным и должно быть заменено следующим:

определители $\begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_3 & 2P_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_3 & 2Q_2 \end{vmatrix}$ не должны быть тождественными нулями.

В § 3 найдено общее решение уравнений (4), (4 bis). Единственность этого решения доказана в § 2 в предположении (6), (6 bis). После приведенного замечания мы можем сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА А. *Если определители* $\begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_3 & 2P_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_3 & 2Q_2 \end{vmatrix}$ *не тождественные нули, то уравнения* (4), (4 bis) *имеют единственные решения во всей области комплексного переменного; в этих решениях функции* Φ, Φ_1 *суть логарифмы от полиномов второй степени.*

Вернемся теперь от этих общефункциональных вопросов к задаче построения корреляции.

Здесь мы должны на функции распределения наложить добавочные ограничения, в первую очередь — положительности функций и существования интеграла от функции распределения, взятого по области, где определена корреляция. Если хоть одно из условий (6), (6 bis) не соблюдается, то *корреляция не может быть распространена на всю плоскость* (XY). В самом деле, пусть, например, (6) не соблюдено; тогда, как мы видели,

$$\Phi(z) = C_1 \lg (z + C_2) + C_3$$

или

$$\Phi(\lambda(x)\, y + \varphi(x)) = C_1 \lg (\lambda(x)\, y + \varphi(x) + C_2) + C_3.$$

В этом случае

$$f(\lambda(x) y + \varphi(x)) = C_3' (\lambda(x)\, y + \varphi(x) + C_2)^{C_1},$$

поверхность корреляции (функция распределения) имеет вид

$$F(xy) = p(x)\, \lambda(x)\, (\lambda(x)\, y + \varphi(x) + C_2)^{C_1}$$

и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\, dx\, dy$$

не существует, так как вдоль линии $y = -\frac{\varphi(x) + C_2}{\lambda(x)}$ выражение $\lambda(x)\, y + \varphi(x) + C_2$ обращается в нуль и ни при каком значении C_1 не существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda(x)\, y + \varphi(x) + C_2)^{C_1}\, dy.$$

Таким образом, с точки зрения теории корреляции, условия (6), (6 bis) *необходимы* для возможности распространить корреляцию на всю плоскость (XY). Иначе говоря, мы доказали следующую теорему:

ТЕОРЕМА I. *Единственной изогенной корреляцией, распространенной на всю плоскость* (XY) *изменения вещественных случайных величин* x, y, *является та, при которой функции* $\Phi(z)$, $\Phi_1(z)$ [*см.* (2)] *суть логарифмы от полинома второй степени; в предельном случае они могут быть полиномами второй степени, таковой, в частности, является нормальная корреляция.*

Перейдем теперь к построению корреляции в том случае, когда одно или оба условия (6), (6 bis) не соблюдаются.

Из теоремы I следует, что в этих случаях корреляцию нельзя распространить на всю плоскость, но представляют интерес и те случаи, когда ее можно распространить на полуплоскость или на один квадрант. Итак, пусть (6) не соблюдено, тогда $\Phi(z)$ есть логарифм от полинома первой степени, и функциональное тождество (2) значительно упрощается:

$$F(x)+C_1\lg(\lambda(x)y+\varphi(x)+C_2)=F_1(y)+\Phi_1(\lambda_1(y)x+\varphi_1(y)). \qquad (2')$$

Вводя обозначение

$$\frac{\lambda(x)}{\varphi(x)+C_2}=r(x), \qquad (31)$$

перепишем это тождество следующим образом:

$$\tilde{F}(x)+C_1\lg(r(x)y+1)=F_1(y)+\Phi_1(\lambda_1(y)x+\varphi_1(y)).$$

Теперь продифференцируем его два раза по y:

$$C_1\frac{r(x)}{r(x)y+1}=F_1'(y)+\Phi_1'(\lambda_1(y)x+\varphi_1(y))(\lambda_1'(y)x+\varphi_1'(y))=P_1(x,y),$$

$$-C_1\left(\frac{r(x)}{r(x)y+1}\right)^2=F_1''(y)+\Phi_1''(\lambda_1(y)x+\varphi_1(y))(\lambda_1'(y)x+\varphi_1'(y))^2+$$
$$+\Phi_1'(\lambda_1(y)x+\varphi_1(y))(\lambda_1''(y)x+\varphi_1''(y))=P_2(x,y).$$

Отсюда для определения Φ_1 имеем уравнение второго порядка

$$P_1^2(x,y)+C_1P_2(x,y)=0 \qquad (32)$$

или, обозначая, как и раньше, $\Phi_1(\lambda_1(y)x+\varphi_1(y))=\tilde{\Phi}_1(x,y)$ и сохраняя те же обозначения для параметров, запишем (32) в развернутом виде:

$$C_1[\tilde{\Phi}_{1x}''(x,y)(a_1(y)x+b_1(y))^2+\tilde{\Phi}_{1x}'(x,y)(a_2(y)x+b_2(y))+A_2(y)]+$$
$$+[\tilde{\Phi}_{1x}'(x,y)(a_1(y)x+b_1(y)+A_1(y)]^2=0. \qquad (32')$$

Общий интеграл этого уравнения должен зависеть от произвольной функции $C_2(y)$ и от параметров A_1, A_2, a_1, a_2, b_1, b_2:

$$\tilde{\Phi}_{1x}'(x,y)=\Omega_1(x,C_1,C_2(y),A_1(y),A_2(y),a_1(y),a_2(y),b_1(y),b_2(y)). \qquad (32'')$$

Заметим, что в этом случае мы предполагаем соблюдение условия (6 bis) и, следовательно, имеем соотношения (5 bis), которые вместе с соотно-

шениями, получающимися дифференцированием функционального тождества (2′), позволят, как и в § 2, исключить из общего интеграла (32″) 7 произвольных параметров, выразив их через три остальные:

$$\tilde{\Phi}'_{1x}(x,y)=\tilde{\Omega}_1(x,C_1,A_1(y),A_2(y),C_2(y)). \qquad (33)$$

Опираясь на единственность решения (33) уравнения (32′), предположим, что $\tilde{\Phi}'_{1x}(x,y)$ имеет вид

$$\tilde{\Phi}'_{1x}(x,y)=C_2(y)\frac{2r_1(y)x+2s_1(y)}{r_1(y)x^2+2s_1(y)x+1}, \qquad (33')$$

т. е. $\Phi_1(z)$ есть логарифм от полинома второй степени.

Таким образом, тождество будет иметь вид

$$F(x)+C_1\lg(\lambda(x)y+\varphi(x)+C_2)=F_1(y)+C_1\lg[\lambda_1(y)x+\varphi_1(y)+\alpha_1)^2+\gamma].$$

Вводя обозначения

$$\frac{\lambda(x)}{\varphi(x)+C_2}=r(x)^*,\quad \frac{\lambda_1^2(y)}{(\varphi_1(y)+\alpha_1)^2}=r_1(y),\quad \frac{\lambda_1(y)(\varphi_1(y)+\alpha_1)}{(\varphi_1(y)+\alpha_1)^2+\gamma}=s_1(y),$$

окончательно получим, деля на C_1,

$$\bar{F}(x)+\lg(r(x)y+1)=\bar{F}_1(y)+\lg(r_1(y)x^2+2s_1(y)x+1).$$

Из этого тождества, поступая вполне аналогично тому, как в § 3, найдем без труда

$$\left.\begin{aligned} r(x)&=\frac{Dx^2+2Ex+A}{Cx^2+2Bx+1},\\ s_1(y)&=\frac{Ey+B}{Ay+1},\\ r_1(y)&=\frac{Dy+C}{Dy+1}.\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Из двух последних равенств находим $\lambda_1(y)$ и $\varphi_1(y)$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(y)&=\sqrt{\gamma}\frac{Dy+C}{\sqrt{(Dy+C)(Ay+1)-(Ey+B)^2}},\\ \varphi_1(y)+\alpha_1&=\sqrt{\gamma}\frac{Ey+B}{\sqrt{(Dy+C)(Ay+1)-(Ey+B)^2}}.\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Подставляя же (34) в основное тождество, найдем поверхность распределения

$$F(x,y)=\delta(Dx^2y+2Exy+Cx^2+2Bx+Ay+1)^{C_1}. \qquad (36)$$

---

* В этом случае мы определяем не $\lambda(x)$ и $\varphi(x)$, а лишь функцию $r(x)=\frac{\lambda(x)}{\varphi(x)+C_2}$, однако ее достаточно для нахождения поверхности распределения $F(x,y)$. Когда же найдена последняя, то априорная функция $p(x)=\int_\mu^\infty F(x,y)\,dy$, тогда уже находят $\lambda(x)$ и $\varphi(x)$ в функциях от границы области μ ($\mu\neq-\infty$, так как область не может быть полной).

Интегрируя по y от μ до ∞, где μ — любое число (не равное $-\infty$), найдем $p(x)$:

$$p(x) = \nu \frac{[(Dx^2+2Ex+A)\mu + Cx^2+2Bx+1]^{C_1+1}}{Dx^2+2Ex+A}.$$

Теперь, зная $r(x)$, находим $\lambda(x)$ и $\varphi(x) + C_2$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{Dx^2+2Ex+A}{(Dx^2+2Ex+A)\mu + Cx^2+2Bx+1}, \\ \varphi(x) + C_2 &= \frac{Cx^2+2Bx+1}{(Dx^2+2Ex+A)\mu + Cx^2+2Bx+1}; \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

кроме того,

$$P(y) = \nu_1 \frac{(Dy+C)^{-C_1-1}}{[(Dy+C)(Ay+1)-(Ey+B)^2]^{-C_1-\frac{1}{2}}}. \quad (38)$$

Этим и завершается определение всех функций, входящих в основное функциональное тождество. Для конечности интегралов, распространенных по y на интервал (μ, ∞), а по x на полный интервал $(-\infty, +\infty)$, нужно на постоянные наложить условия:

$$C_1 < -1, \quad D\mu + C > 0, \quad A\mu + 1 > 0, \quad (D\mu + C)(A\mu + 1) > (E\mu + B)^2. \quad (39)$$

Как и в общем случае, когда $C_1 \to -\infty$, получаем предельный случай корреляции, распространенной на полуплоскость, причем $\Phi(z)$ будет тогда полиномом первой степени, а $\Phi_1(z)$ — полиномом второй степени. Этот предельный случай рассмотрен у С. Н. Бернштейна ([1]).

Резюмируя изложенное, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА II. *Единственным видом изогенной корреляции, которая может быть распространена только на полуплоскость, является тот, при котором функции $\Phi(z)$ и $\Phi_1(z)$ таковы, что одна из них — логарифм от полинома первой степени, а другая — логарифм от полинома второй степени. В предельном случае $\Phi(z)$ и $\Phi_1(z)$ могут быть соответственно полиномами первой и второй степени.*

Наконец, осталось предположить, что и (6) (6 bis) не соблюдаются, т. е.

$$\begin{vmatrix} P_2 & P_1 \\ P_3 & 2P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_3 & 2Q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда $\Phi(z)$ и $\Phi_1(z)$ суть логарифмы от полинома первой степени и корреляция может быть распространена лишь на четверть плоскости.

Основное функциональное тождество примет вид

$$\overline{F}(x) + \lg(r(x)\,y + 1) = \overline{F}_1(y) + \lg(r_1(y)\,x + 1),$$

где положено

$$r(x) = \frac{\lambda(x)}{\frac{\varphi(x)}{|C_1|} + C_2}, \quad r_1(y) = \frac{\lambda_1(y)}{\frac{\varphi_1(y)}{|C_1|} + C_4}. \quad (40)$$

В этом случае определение всех функций не представляет никакого труда, причем в выражение функций должны входить параметры μ, μ_1 — границы области изменения x и, соответственно, y.

Выпишем все формулы для этого случая:

$$F(x,y)=\delta(cxy+ax+by+1)^{C_1}, \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned} p(x)&=\frac{\nu}{cx+b}\,\frac{1}{[(cx+b)\mu_1+ax+1]^{-C_1-1}},\\ P(y)&=\frac{\nu}{cy+a}\,\frac{1}{[(cy+a)\mu_1+by+1]^{-C_1-1}},\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{|C_1|}+C_2&=\frac{ax+1}{(cx+b)\mu+ax+1},\\ \lambda(x)&=|C_1|\frac{(cx+b)}{(cx+b)\mu+ax+1}.\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Аналогично

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_1(y)}{|C_1|}+C_4&=\frac{by+1}{(cy+a)\mu_1+by+1},\\ \lambda_1(y)&=|C_1|\frac{cy+a}{(cy+a)\mu_1+by+1}.\end{aligned}\right\} \tag{43 bis}$$

Если, например, положить $a=b=0$, $c=1$, $\mu=\mu_1=1$, $C_1=-6$, то для всех функций получим следующие выражения:

$$F(x,y)=\frac{\gamma}{(xy+1)^6},\quad p(x)=\frac{\gamma}{5}\,\frac{1}{x(x+1)^5},\quad P(y)=\frac{\gamma}{5}\,\frac{1}{y(y+1)^5},$$

$$\lambda(x)=\frac{x}{x+1},\quad \lambda_1(y)=\frac{y}{y+1},\quad \varphi(x)=\frac{1}{x+1},\quad \varphi_1(y)=\frac{1}{y+1}.$$

Наконец,

$$f_x(y)=\frac{5x(x+1)^5}{(xy+1)^6},\quad \varphi_y(x)=\frac{5y(y+1)^5}{(xy+1)^6}.$$

Корреляция распространена на четверть плоскости, определяемую неравенствами $x\geqslant 1$; $y\geqslant 1$. Параметр γ определяется из условия $\gamma\int\limits_1^\infty\int\limits_1^\infty\frac{dx\,dy}{(xy+1)^6}=1$ и оказывается равным $\gamma=\dfrac{5}{\lg 2-\frac{1}{3}}$, C_1 выбрано так, что у всех кривых существуют моменты до четвертого порядка включительно.

Заметим, кроме того, что

$$\text{м. о.}_x y=\frac{5x+1}{4x},\quad \text{м. о.}_y x=\frac{5y+1}{4y};$$

$$\sigma_x^2(y)=\frac{5}{48}\,\frac{x^2+x+1}{x^2},\quad \sigma_y^2(x)=\frac{5}{48}\,\frac{y^2+y+1}{y^2}$$

и, наконец, коэффициент корреляции

$$R\approx -0{,}118.$$

Теперь мы имеем возможность подвести некоторые итоги. Нами исчерпаны все возможные виды изогенной корреляции, так как имеется всего три возможности: 1° либо соблюдаются оба условия (6), (6 bis); 2° либо одно из них соблюдается, а другое нет; 3° либо, наконец, они оба не соблюдаются. Эти случаи нами и рассмотрены.

Последний рассмотренный случай может быть выражен следующей теоремой.

ТЕОРЕМА III. *Единственным видом изогенной корреляции, которую можно распространить только на четверть плоскости, является тот, при котором функции* $\Phi(z)$, $\Phi_1(z)$ *суть логарифмы от полиномов первой степени; в пределе они могут быть также полиномами первой степени.*

Два вида корреляции, рассмотренные в настоящем параграфе, как оказалось, являются частными случаями корреляции, рассмотренной в § 3. Таким образом, условия (6), (6 bis) не являются дополнительными ограничениями, их роль сводится лишь к тому, чтобы показать, на какую область могут быть распространены интегралы.

Все три теоремы, следовательно, можно объединить в одну.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Единственным видом изогенной корреляции, которую можно распространить на всю плоскость* (XY) *или на другую конечную или бесконечную область, лежащую в этой плоскости, является тот, при котором функции* $\Phi(z)$ *и* $\Phi_1(z)$ *суть логарифмы от полиномов не выше второй степени; как предельный случай, — они могут быть полиномами не выше второй степени.*

С. Н. Бернштейн непосредственно доказал теорему, которая содержится в приведенной:

ТЕОРЕМА С. Н. Бернштейна. *Если в изогенной корреляции функции* $\Phi(z)$ *и* $\Phi_1(z)$*—полиномы, то их степень не выше двух.*

§ 5. Твердая корреляция

Во всех предыдущих параграфах мы молчаливо предполагали, что имеем дело именно с изогенной корреляцией, а не с упругой или твердой (см. Введение), т. е. что

$$\frac{\varphi(x)}{\lambda(x)} \neq \text{const}, \quad \frac{\varphi_1(y)}{\lambda_1(y)} \neq \text{const}, \quad \lambda(x) \neq \text{const}, \quad \lambda_1(y) \neq \text{const}.$$

В случае твердой корреляции* $\lambda'(x) = \lambda_1'(y) = 0$. При дифференцировании тождества (2) получаются значительные упрощения и мы не приходим к уравнениям (4), (4 bis). В самом деле, система (3′) упростится:

$$\left.\begin{aligned} &P_2 \frac{\varphi'(x)}{\lambda(x)} = P'_{1x}, \\ &P_3 \frac{\varphi'(x)}{\lambda(x)} = P'_{2x}, \quad (\lambda(x) = \text{const}) \\ &P_4 \frac{\varphi'(x)}{\lambda(x)} = P'_{3x}, \end{aligned}\right\} \tag{3*}$$

и для совместности двух первых уравнений мы получаем условие

$$\begin{vmatrix} P_2 & P'_{1x} \\ P_3 & P'_{2x} \end{vmatrix} = 0. \tag{44}$$

Из соблюдения (44) не следует соблюдение (4).

---

* В случае упругой корреляции все рассуждения § 1 сохраняют силу, — нужно только $\varphi(y)$ и $\varphi_1(y)$ заменить соответственно на $k\lambda(x)$ и $k_1\lambda_1(y)$, где k и k_1 — постоянные. Все виды упругой корреляции получаются из общей формы изогенной корреляции, как частные случаи.

Уравнение (44) — обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка и его можно непосредственно проинтегрировать.

Записав уравнения (44) в виде

$$P'_{1x}P_3 - P_2 P'_{2x} = 0,$$

подставим в него развернутое выражение P_k (стр. 167). Принимая, кроме того, во внимание, что $\lambda'_1(y) = 0$, и вводя обозначения

$$F'_1(y) = A_1, \quad F''_1(y) = A_2, \quad F'''_1(y) = A_3,$$
$$\varphi'_1(y) = b_1, \quad \varphi''_1(y) = b_2, \quad \varphi'''_1(y) = (b)_3 \quad \varphi_1(y) = \bar{b},$$

получим

$$[b_1 A_2 + b_2 b_1^2 \Phi'_1(x+\bar{b})]\, \Phi'''_1(x+\bar{b}) - 2b_1^2 b_2 \Phi''^2_1(x+\bar{b}) -$$
$$- (A_3 b_1 - A_2 b_2)\, \Phi''_1(x+\bar{b}) - (b_1 b_3 - b_2^2)\, \Phi'_1(x+\bar{b}) \Phi_1(x+\bar{b}) = 0; \quad (44.1)$$

вводя обозначения

$$\Phi'_1(x+\bar{b}) = z, \quad b_1^2 A_2 = a, \quad b_2 b_1^2 = b,$$
$$-(A_3 b_1 - A_2 b_2) = c, \quad -(b_1 b_3 - b_2^2) = e,$$

приведем его к виду

$$(a + bz)\, z'' - 2bz'^2 + cz' + ezz' = 0. \quad (44.2)$$

Принимая z за независимое переменное, а $p = z'$ — за неизвестную функцию, получим

$$(a + bz)\, pp' - 2bp^2 + cp + ezp = 0.$$

Деля на p (нужно особо рассмотреть случай $p = 0$ *), получим линейное уравнение

$$p' - \frac{2b}{a + bz} p + \frac{ez + c}{a + bz} = 0. \quad (44.3)$$

Его общим интегралом будет

$$p = C_1 (bz + a)^2 + 2\frac{e}{2b}(bz + a) + \frac{cb - ae}{2b}.$$

Введя обозначение

$$-\frac{e}{2bC_1} = g, \quad \frac{cb - ae}{2bC_1} = h,$$

получим

$$C_1 x = \int \frac{dz}{(bz + a)^2 - 2g(bz + a) + h} = \frac{1}{b} \int \frac{du}{u^2 - 2gu + h} = \frac{1}{b(\alpha - \beta)} \lg \frac{u - \alpha}{u - \beta} - C_2,$$

где

$$\alpha = g + \sqrt{g^2 - h}, \quad \beta = g - \sqrt{g^2 - h}.$$

Итак,

$$C_1 x = \frac{1}{b(\alpha - \beta)} \lg \frac{bz + a - \alpha}{bz + a - \beta} - C_2.$$

Решая это уравнение относительно z, получим

$$z = \frac{Ae^{C_1 x} + B}{Ce^{C_1 x} - 1}. \quad (45)$$

---

* Тогда $\Phi(z)$ есть полином первой степени; это соответствует случаю $G = 0$ в дальнейших формулах.

Если заменить A, B, C на $-A$, $-B$, $-C$ и переменить знаки в числителе и знаменателе, выражение (45) можно записать следующим образом:

$$z=\frac{Ae^{C_1x}+B}{Ce^{C_1x}+1}. \qquad (45\ \text{bis})$$

Итак, общий интеграл уравнения (44.2) имеет вид

$$z=\frac{Ae^{C_1x}+B}{Ce^{C_1x}\pm 1},$$

где A, B, C. C_1 — постоянные. Но $z=\Phi_1'(x+\varphi_1(y))$ и интегрирование дает

$$\Phi_1(x+\varphi_1(y))=\int\frac{Ae^{C_1x}+B}{Ce^{C_1x}\pm 1}\,dx=\pm Bx+\frac{A\mp BC}{C_1C}\lg(Ce^{C_1x}\pm 1)+C_3.$$

Отсюда, наконец, находим две существенно различные (с точки зрения теории корреляции) формы функции $\Phi_1(x)$, соответствующие знакам — и + соответственно:

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{G}\lg\left[e^{\frac{x-x_0}{2}h}-e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right]^2-lx-m_1. \qquad (46)$$

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{G_1}\lg\left[e^{\frac{x-x_0}{2}h}+e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right]^2-l_1x-m. \qquad (46\ \text{bis})$$

Отсюда, наконец, для условных функций распределения вероятностей находим

$$\varphi_y(x)=\left[e^{\frac{x-x_0}{2}h}-e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right]^{\frac{2}{G}}e^{-lx-m}, \qquad (47)$$

$$\varphi_y(x)=\left[e^{\frac{x-x_0}{2}h}+e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right]^{\frac{2}{G_1}}e^{-l_1x-m_1}, \qquad (47\ \text{bis})$$

где m_1, x_0 — функции y.

Формула (46) получена в работе С. Н. Бернштейна [(1); формула (21)]; решение же (46 bis) осталось незамеченным и рассматривается впервые *.

Форма (46) функции $\Phi_1(x)$ неприемлема, если мы хотим распространить корреляцию на всю плоскость, так как в той полуплоскости, где $lx\leqslant 0$, функция $\varphi_y(x)$, определенная формулой (47), будет неограниченно

* В случае твердой корреляции функциональное тождество (2) имеет вид

$$F(x)+\Phi(y-\varphi(x))=F_1(y)+\Phi_1(x-\varphi_1(y)) \qquad [(1);\ \text{ф-ла}\ (16)].$$

Обозначив через u логарифм второй производной $\lg\Phi''$, $\Phi=-\lg\varphi_y(x)$), $u=\lg\Phi''$, $v=\lg\Phi_1''$, получим уравнение

$$u''e^{-u}=v''e^{-v}=G \qquad [(1);\ (\text{ф-ла}\ (19)],\quad G=\text{const}.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$u(x)=\lg\frac{2h^2}{G\left[e^{\frac{x-x_0}{2}h}\mp e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right]^2_G}$$

возрастать и нельзя обеспечить конечности интеграла. Поэтому единственная твердая корреляция, которую можно распространить на всю плоскость, получается в пределе, когда $G \to 0$, Этот предельный случай и рассмотрен в работе С. Н. Бернштейна.

Иначе обстоит с формой (46 bis). В этом случае функция $\varphi_y(x)$, определенная формулой (47 bis), остается конечной на всей вещественной оси и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(x)\,dx$ существует, если только выполнены условия:

$$G_1 < 0, \quad l_1 h < 0, \quad \left|\frac{h}{G_1}\right| > |l_1|.$$

Когда функпии $\Phi_1(x)$, $\Phi(y)$ найдены, вычисление функций $\varphi(x)$, $\varphi_1(y)$ не представляет труда. На этом мы не будем останавливаться, отсылая читателей к работе С. Н. Бернштейна [(1); § 2].

Выпишем все формулы твердой корреляции в окончательном виде:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{k_1}\lg|C_1|\frac{Ce^{kx}+b}{ae^{kx}+1}, \quad \varphi_1(y) = -\frac{1}{k}\lg|C_1|\frac{Ce^{k_1y}+a}{be^{k_1y}+1},$$

$$F(x,y) = \frac{\delta e^{lx+l_1y}}{(ce^{kx+x_1y}+ae^{kx}+be^{k_1y}+1)^{-C_1}}, \tag{48}$$

$$p(x) = \frac{\nu_1 e^{lx}}{(ce^{kx}+b)^{\frac{l_1}{k_1}}}\cdot\frac{1}{(ae^{kx}+1)^{-C_1-\frac{l_1}{k_1}}}, \quad P(y) = \frac{\nu_1 e^{l_1y}}{(ce^{k_1y}+a)^{\frac{l}{k}}}\cdot\frac{1}{(be^{k_1y}+1)^{-C_1-\frac{l}{k}}}$$

Кроме того, функции условных вероятностей имеют вид

$$\left.\begin{aligned} f_x(y) &= \mu e^{l_1(y-\varphi(x))}\left[\frac{e^{k_1(y-\varphi(x))}}{|C_1|}+1\right]^{C_1}, \\ \varphi_y(x) &= \mu e^{l(x-\varphi_1(y))}\left[\frac{e^{k(x-\varphi_1(y))}}{|C_1|}+1\right]^{C_1}, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Если $C_1 < -1$, a, b, c — любые положительные числа, то твердая корреляция (48) распространена на всю плоскость. При этом у всех кривых существуют моменты всех порядков.

Рассмотрим теперь важный предельный случай, получаемый, когда $C_1 \to -\infty$, а все постоянные a, b, c стремятся к нулю как $\frac{1}{|C_1|}$, что удобнее получить, заменив a, b, c соответственно на $\frac{a}{|C_1|}$, $\frac{b}{|C_1|}$, $\frac{c}{|C_1|}$. После перехода к пределу найдем

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x) = -\frac{1}{k_1}\lg(ce^{kx}+b), \quad \varphi_1(y) = -\frac{1}{k}\lg(ce^{k_1y}+a), \\ &F(x,y) = \delta e^{lx+l_1y}\,e^{-(ce^{kx+k_1y}+ae^{kx}+be^{k_1y})}, \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

В работе С. Н. Бернштейна рассмотрен лишь один случай

$$\Phi''(x) = \frac{2h^2}{G\left(e^{\frac{x-x_0}{2}h} - e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right)^2},$$

причем необходимое условие: $G > 0$. Теперь мы можем сказать, что (47) есть решение [(1); ф-ла (19)] при $G > 0$, а (47 bis) — при $G < 0$: предельный случай $G = 0$ в обоих случаях совпадает.

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \frac{\nu\cdot e^{lx}}{(ce^{kx}+b)^{\frac{l_1}{k_1}}}\, e^{-ae^{kx}}, \quad P(y) = \frac{\nu_1\cdot e^{l_1 y}}{(ce^{k_1 y}+a)^{\frac{l}{k}}}\, e^{-be^{k_1 y}} \\ f_x(y) &= \mu e^{l_1(y-\varphi(x))}\, e^{-e^{k_1(y-\varphi(x))}}, \quad \varphi_y(x) = \mu_1 e^{l(x-\varphi_1(y))} e^{-e^{k(x-\varphi_1(y))}}. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Корреляция (50) была получена С. Н. Бернштейном. Оказывается, это — предельный случай более общей твердой корреляции, также распространенной на всю плоскость и выражаемой формулами (48), (49).

Интересно заметить, что твердая корреляция (46) может быть получена из корреляции (41) — (43) § 4 при помощи замены переменных. В самом деле, положив там $\mu = \mu_1 = 0$, мы получим не изогенную, а упругую корреляцию, распространенную на первый квадрант, так как при таком выборе μ, μ_1

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varphi(x)}{|C_1|} + C_2 = \frac{\varphi_1(y)}{|C_1|} + C_4 = 1, \\ &\lambda(x) = |C_1|\frac{cx+b}{ax+1}, \quad \lambda_1(y) = |C_1|\frac{cy+a}{by+1}, \end{aligned}\right\} \qquad (43')$$

а функции условных вероятностей имеют вид

$$\left.\begin{aligned} f_x(y) &= |C_1|\frac{cx+b}{ax+1}\left[\frac{cx+b}{ax+1}y+1\right]^{C_1}, \\ \varphi_y(x) &= |C_1|\frac{cy+a}{by+1}\left[\frac{cy+a}{by+1}x+1\right]^{C_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (43'')$$

Поверхность керреляции, конечно, сохраняет вид (41):

$$F(x,y) = \delta\,(cxy+ax+by+1)^{C_1}.$$

Если $C_1 < 1$, a, b, c — любые положительные числа, то все интегралы конечны в первом квадранте, так как полиномы $ax+1$, $by+1$, $cy+a$, $cx+b$, $cxy+ax+by+1$ не имеют там нулей. Кривые (43″) похожи на XI тип кривых Пирсона $y = y_0 x^{-m}$, $m > 0$, распространенных на полуинтервал $(\bar{a}, \infty)$ [ср. ([2]; стр. 199]. Как известно [см. Введение и ([1])], замена переменных $y = e^{k_1\eta}$, $x = e^{k\xi}$ переводит упругую корреляцию (между x, y) в твердую корреляцию (между ξ, η). Эта замена преобразует четверть плоскости (XY), т. е. первый квадрант ее, во всю плоскость (ξ, η). Выполняя эту замену под интегралом

$$\delta\int_0^\infty\int_0^\infty (cxy+ax+by+1)^{C_1}\,dx\,dy = 1$$

получим

$$\delta\int_0^\infty\int_0^\infty (ce^{k\xi+k_1\eta} + ae^{k\xi} + be^{k_1\eta} + 1)^{C_1} e^{k\xi+k_1\eta}\,d\xi\,d\eta = 1.$$

Под интегралом стоит функция распределения твердой корреляции (48).

Заметим еще один вид твердой корреляции, который получается, если в формуле (20), приводимой в ([1]) [см. примечание на стр. 192], положить $h = 0$ и раскрыть получающуюся неопределенность; тогда

$$\Phi''(z) = \frac{2}{G(z+a)^2}, \quad \Phi(z) = \lg(z+a)^{\frac{2}{G}} + bz + c.$$

Выпишем функциональное тождество для этого случая

$$\left\{e^{-\frac{b}{x+a_1}+b_1 x}(x+a_1)^{\frac{2}{G}}\right\}\cdot e^{b\left(y+\frac{1}{x+a_1}\right)}\left[y+\frac{1}{x+a_1}+a\right]^{\frac{2}{G}} =$$

$$= \left\{ e^{-\frac{b_1}{y+a}+by} (y+a)^{\frac{2}{G}} \right\} \cdot e^{b_1\left(x+\frac{1}{y}+a\right)} \left[x + \frac{1}{y+a} + a_1 \right]^{\frac{2}{G}} . \qquad (51)$$

Поверхность корреляции имеет вид

$$F(x,y) = e^{b_1 x + by} \left[(x+a_1)(y+a)+1 \right]^{\frac{2}{G}} . \qquad (52)$$

Если $0 < G < 2$, a, a_1, b, b_1 произвольны, то корреляция распространена на тот квадрант, где x и y имеют разные знаки, соответственно c, b_1, b. Условные функции распределения [они в (51) стоят вне фигурных скобок] представляют собою кривые Пирсона III типа

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^P e^{-P\frac{x}{a}} .$$

Теперь мы можем подвести некоторые итоги. Все виды твердой корреляции должны получаться из дифференциального уравнения (44). Общий интеграл этого уравнения выражается формулой

$$\Phi_1(x + \varphi_1(y)) = \pm Bx + \frac{A \mp BC}{C_1 C} \lg (Ce^{C_1 x} + 1) + C_3$$

или (46) и (46 bis) (первая соответствует знаку —, вторая знаку +).

Как мы видели, в случае (46), (47) корреляция не может быть распространена на всю плоскость, кроме предельного случая, когда $G \to 0$ или, что то же, $C_1 \to -\infty$, $\left(C_1 = -\frac{1}{G}\right)$, причем этот предельный случай совпадает с предельным случаем формы (46 bis), когда $G_1 = \frac{1}{C_1} = 0$. Таким образом, все виды твердой корреляции, распространенной *на всю плоскость* (XY), получаются из (46 bis). Итак, нами доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА IV. *Наиболее общий вид поверхности твердой корреляции, распространенной на всю плоскость* (XY), *определяется формулой*

$$F(x,y) = \delta \frac{e^{lx + l_1 y}}{(ce^{kx+k_1 y} + ae^{kx} + be^{k_1 y} + 1)^{-C_1}} \qquad (53)$$

при условии

$$lk > 0, \quad l_1 k_1 > 0 \quad |l| < |kC_1|, \quad |l_1| < |k_1 C_1|. \qquad (54)$$

Корреляция (50) и, следовательно [см. ([1])], нормальная корреляция — ее предельные случаи.

Карачаево-Черкесский педагогический институт

Поступило 8. IV. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bernstein S., Fondement géométriques de la théorie des corrélations, Metron, VII, 2, 1928.

[2] Романовский В., Математическая статистика, 1938.

O. SARMANOV. ON ISOGENEOUS CORRELATION

SUMMARY

In this paper the author solves the problem to determine all the kinds of isogeneous correlation that is a quite natural generalization of normal correlation. This generalization admits practical application. The results obtained represent a development of ideas exposed in S. Bernstein's paper ([1]).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 201—232 Série mathématique

З. М. КИШКИНА

ЭНДОМОРФИЗМЫ p-ПРИМИТИВНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе изучается вопрос о кольцах эндоморфизмов абелевых групп без кручения.

§ 1

Абелева группа G называется группой без кручения, если из всякого соотношения вида $nx=0$, где $x \subset G$, а n — целое число, следует: либо $x=0$, либо $n=0$. Система элементов $\{u_\alpha\}$ группы G называется линейно независимой, если из всякого соотношения $\sum_{i=1}^{t} n_{k_i} u_{k_i}=0$ следует, что все $n_{k_i}=0$. Во всякой абелевой группе без кручения можно выбрать максимальную систему линейно независимых элементов $\{u_\alpha\}$; такая система, вообще говоря, бесконечная, называется базой группы G. Тогда, если $g \subset G$ — произвольный элемент группы G, то существуют такие целые числа n, n_{k_i}, что $ng=\sum_{i=1}^{l} n_{k_i} u_{k_i}$. Мощность μ максимальной системы называется рангом группы G; ранг группы — инвариант этой группы. Может случиться, что в группе G существует конечная база, тогда говорят, что группа имеет конечный ранг.

Абелевы группы без кручения конечного ранга представляют класс групп, который полностью описан. Первоначально А. Г. Курошем (1) было дано полное описание так называемых p-примитивных абелевых групп без кручения конечного ранга, а позже А. И. Мальцевым (2) и, независимо, D. Derry (3) дано полное описание всех абелевых групп без кручения конечного ранга. Так как в дальнейшем нас будут интересовать только p-примитивные группы, то ниже приводится формулировка некоторых результатов из работы (1), касающихся классификации только этих групп.

Пусть p — простое число. Абелева группа без кручения G конечного ранга n называется p-примитивной, если в ней можно выбрать такую систему линейно независимых элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n$, что для любого элемента $g \subset G$ существует целое число $k \geqslant 0$, обладающее следующим свойством:

$$p^k g=\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_n u_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — целые числа.

А. Г. Курошем доказано (¹), что любую абелеву p-примитивную группу G конечного ранга n можно задать системой образующих

$$a_i^{(\nu)}, \qquad i=1,2,\ldots,r, \quad \nu=0,1,2,\ldots,$$
$$b_j, \qquad j=1,2,\ldots,s, \qquad r+s=n$$

и определяющих соотношений (помимо соотношений коммутативности)

$$pa_i^{(\nu)}=a_i^{(\nu-1)}+\sum_{j=1}^{s}\alpha_{ij}^{(\nu)}b_j \quad (i=1,2,\ldots,r;\ \nu=1,2,\ldots), \tag{1}$$

где α_{ij} — целое p-адическое число с канонической записью

$$\alpha_{ij}=(\alpha_{ij}^{(1)},\alpha_{ij}^{(2)},\ldots,\alpha_{ij}^{(\nu)},\ldots).$$

Число r называется приведенным рангом группы G и однозначно определяется группой G. Таким образом, абелева p-примитивная группа без кручения G ранга n и приведенного ранга r задается целочисленной p-адической матрицей

$$A=(\alpha_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,r;\ j=1,2,\ldots,s;\ r+s=n)$$

В работе (¹) можно найти условия, при которых две p-адические матрицы определяют изоморфные группы. Если мы введем в рассмотрение группы линейных форм ранга n

$$H_\nu=\{a_1^{(\nu)},\ a_2^{(\nu)},\ldots,\ a_r^{(\nu)},\ b_1,\ldots,\ b_s\} \quad (\nu=0,1,\ldots),$$

то легко видеть, что наша исходная группа G есть объединение возрастающей последовательности групп H_ν,

$$G=\sum_\nu H_\nu.$$

Введем некоторые вспомогательные обозначения. α_{ij} — целое p-адическое число, поэтому его можно мыслить в виде ряда по степеням p

$$\alpha_{ij}=\alpha_{ij}^{(1)}+p\alpha_{ij}^{(2)}+\ldots+p^{\nu-1}\alpha_{ij}^{(\nu)}+\ldots;$$

будем следующим образом обозначать конечный отрезок этого ряда:

$$\alpha_{ij}^{(1)}+p\alpha_{ij}^{(2)}+\ldots+p^{\nu-1}\alpha_{ij}^{(\nu)}=(\alpha_{ij})_\nu.$$

После этого систему определяющих соотношений (1) группы G можно записать в следующей форме:

$$p^\nu a_i^{(\nu)}=a_i^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_\nu b_j \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r;\ \nu=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться системой определяющих соотношений группы G как в форме (1), так и в форме (2).

В настоящей работе изучается кольцо эндоморфизмов p-примитивной абелевой группы без кручения конечного ранга. Поскольку мы умеем задавать эти группы p-адическими матрицами, естественно поставить такую проблему: по p-адической матрице, задающей абелеву группу без кручения конечного ранга, выяснить строение кольца ее эндоморфизмов. В такой постановке проблема была формулирована А. Г. Курошем*.

* Настоящая работа выполнена под непосредственным руководством А. Г. Куроша, за что приношу ему свою искреннюю благодарность.

Из опубликованных результатов в этом направлении можно указать только на результаты D. Derry ([3]). В одном из параграфов своей работы D. Derry изучает группу автоморфизмов абелевой группы без кручения, p-примитивной ранга $n=2$, приведенного ранга $r=1$, неразложимой в прямую сумму, т. е. задаваемой целым иррациональным p-адическим числом α. Доказанная им теорема содержит, собственно говоря, два результата. Чтобы их формулировать, заметим следующее: всякая абелева группа G обладает двумя автоморфизмами: $g \to g$ и $g \to -g$, где g — произвольный элемент группы G. Может случиться, что, кроме этих двух автоморфизмов, группа G других автоморфизмов не имеет; тогда будем говорить, что группа автоморфизмов группы G тривиальна. Если же группа G обладает еще и другими автоморфизмами, то будем говорить, что группа автоморфизмов группы G нетривиальна. Пусть G — p-примитивная абелева группа без кручения ранга $n=2$, приведенного ранга $r=1$, неразложимая в прямую сумму и задаваемая p-адическим числом α, а R — поле рациональных чисел. D. Derry доказал:

(1) Группа автоморфизмов группы G тогда и только тогда нетривиальна, если α квадратично над полем R.

(2) Группа автоморфизмов группы G изоморфна некоторой подгруппе мультипликативной группы поля $R(\alpha)$.

В §§ 3 — 6 настоящей работы поставленный выше вопрос полностью решается для p-примитивных абелевых групп без кручения конечного ранга. Последние параграфы этой работы (§§ 7 — 9) посвящены несколько более подробному изучению эндоморфизмов p-примитивных абелевых групп ранга 2 и приведенного ранга 1.

§ 2

Кольцо эндоморфизмов очень просто разыскивается для групп ранга 1 и для групп, являющихся прямой суммой конечного числа таких групп. Заметим, что множество всех групп ранга 1 совпадает со множеством всевозможных подгрупп аддитивной группы рациональных чисел.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — последовательность всех простых чисел. Рассмотрим последовательности вида

$$\alpha = [\alpha(p_1), \alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_\nu), \ldots],$$

где $\alpha(p_i)$ или целые неотрицательные числа, или же символ ∞. Две последовательности

$$\alpha = [\alpha(p_1), \alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_\nu), \ldots],$$
$$\beta = [\beta(p_1), \beta(p_2), \ldots, \beta(p_\nu), \ldots]$$

называются эквивалентными, если из $\alpha(p_i)=\infty$ следует $\beta(p_i)=\infty$ и наоборот, а почти все $\alpha(p_i)$, отличные от ∞ (т. е. все, кроме, быть может, конечного числа), равны соответствующим $\beta(p_i)$.

Доказано ([4]), что между группами ранга 1 и классами эквивалентных последовательностей существует взаимно однозначное соответствие. Это соответствие устанавливается следующим образом: пусть G — группа без кручения ранга 1 и пусть $e \neq 0$ элемент этой группы. Тогда груп-

пе G соответствует класс последовательностей, эквивалентных последовательности

$$\alpha = [\alpha(p_1),\ \alpha(p_2),\ \ldots,\ \alpha(p_\nu),\ \ldots],$$

которая получается следующим образом. Рассматриваем уравнение

$$p_i^k x = e;$$

тогда $\alpha(p_i) = k$, если уравнение разрешимо в G, а уравнение

$$p_i^l x = e \quad (l > k)$$

уже неразрешимо, и $\alpha(p_j) = \infty$, если уравнение

$$p_j^k x = e$$

разрешимо при любых целых $k \geqslant 0$. Самая последовательность будет называться высотой элемента. Если e_1 и e_2 — элементы группы G и α_1 и α_2 — их высоты, то будем говорить, что высота элемента e_1 делит высоту элемента e_2, если $\alpha_1(p_i) \leqslant \alpha_2(p_i)$ для всех p_i. Так как ранг группы равен 1, то существуют такие целые числа r и s, $(r, s) = 1$, что $e_2 = \frac{r}{s} e_1$. Если высота элемента e_1 делит высоту элемента e_2, то, как легко проверить, $(s, p_i) = 1$ для всех p_i, для которых $\alpha_1(p_i) < \infty$.

Построим теперь кольцо эндоморфизмов нашей группы G. Пусть Γ — эндоморфизм группы G и $\Gamma e = \frac{r}{s} e = e'$, где $(r, s) = 1$. Если уравнение $p_i^k x = e$ имеет в G решение x, то уравнение $p_i^k y = e'$ будет иметь решение в G, $y = \Gamma x$. Следовательно, высота элемента e делит высоту элемента e', а поэтому $(s, p_i) = 1$ для тех p_i, для которых $\alpha(p_i) \neq \infty$. Если вместо e возьмем в группе G элемент $\bar{e}$, то, как легко проверить, $\Gamma \bar{e} = \frac{r}{s} \bar{e}$. Таким образом, эндоморфизму Γ соответствует рациональное число $\gamma = \frac{r}{s}$, где $(r, s) = 1$ и $(s, p_i) = 1$ для тех p_i, для которых $\alpha(p_i) \neq \infty$. Наоборот, всякому рациональному числу $\gamma = \frac{r}{s}$ с этими свойствами соответствует эндоморфизм Γ группы G, определяемый следующим образом: $\Gamma g = \gamma g$ для всех $g \subset G$. Нетрудно проверить, что так определенное отображение Γ есть эндоморфизм группы G.

Если $R[p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_i}, \ldots]$ — кольцо тех рациональных чисел, знаменатели которых могут делиться лишь на простые числа $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_i}, \ldots$, и если $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_i}, \ldots$ являются теми простыми числами, для которых $\alpha(p_{n_i}) = \infty$ в высотах элементов группы G, то нами установлено взаимно однозначное соответствие между эндоморфизмами группы G и элементами кольца $R[p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_i}, \ldots]$. Это соответствие сохраняет операции сложения и умножения. Действительно, пусть Γ_1 и Γ_2 — эндоморфизмы группы G и пусть им соответствуют рациональные числа $\frac{r_1}{s_1}$ и $\frac{r_2}{s_2}$, т. е.

$$\Gamma_1 e = \frac{r_1}{s_1} e, \qquad \Gamma_2 e = \frac{r_2}{s_2} e.$$

Если $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, то по определению Γ

$$\Gamma e = \Gamma_1 e + \Gamma_2 e = \frac{r_1}{s_1} e + \frac{r_2}{s_2} e = \left(\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}\right) e;$$

таким образом, сумме эндоморфизмов соответствует сумма рациональных чисел. Если, далее, $\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2$, то

$$\Gamma e = \Gamma_1 \Gamma_2 e = \Gamma_2 \frac{r_1}{s_1} e = \frac{r_1}{s_1} \frac{r_2}{s_2} e,$$

т. е. произведению эндоморфизмов соответствует произведение рациональных чисел.

Этим доказана

ТЕОРЕМА 1. *Кольцо эндоморфизмов группы G ранга 1, определяемой последовательностью $[\alpha(p_1), \alpha(p_2), \ldots, \alpha(p_\nu), \ldots]$, изоморфно кольцу $R[p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_i}, \ldots]$, где p_{n_i} будут те простые числа, для которых $\alpha(p_{n_i}) = \infty$.*

Чтобы иметь возможность в дальнейшем ограничиваться случаем групп, не разложимых в прямую сумму, найдем кольцо эндоморфизмов прямой суммы. Пусть группа G есть прямая сумма групп H_i,

$$G = \sum_{i=1}^{m} H_i.$$

Обозначим через R_{ii} кольцо эндоморфизмов группы H_i, а через R_{ij} — модуль гомоморфных отображений H_i в H_j. Очевидно, что можно умножать элементы R_{ij} на элементы R_{jk} (результат последовательного выполнения соответствующих отображений), причем после умножения $\Gamma_{ij} \subset R_{ij}$ на $\Gamma_{jk} \subset R_{jk}$ получается элемент $\Gamma_{ik} \subset R_{ik}$.

ТЕОРЕМА 2. *Кольцо эндоморфизмов группы $G = \sum_{i=1}^{m} H_i$ есть кольцо матриц m-го порядка вида*

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \ldots & \Gamma_{1m} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \ldots & \Gamma_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Gamma_{m1} & \Gamma_{m2} & \ldots & \Gamma_{mm} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij} \subset R_{ij},$$

с обычными для матриц определениями операций сложения и умножения.

Пусть $M = (\Gamma_{ij})$ — произвольная матрица указанного кольца. Покажем, что эта матрица однозначно определяет эндоморфизм группы G. Действительно, если g — произвольный элемент группы G и если

$$g = \sum_{i=1}^{m} g_i, \quad g_i \subset H_i,$$

то положим

$$\Gamma g = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ij} g_i.$$

Так как все Γ_{ij} суть гомоморфизмы, то легко проверить, что отображение Γ будет эндоморфизмом группы G.

Теперь покажем обратное, т. е. что всякий эндоморфизм Γ группы G однозначно определяет матрицу указанного кольца. Действительно, пусть $h_i \subset H_i$ есть произвольный элемент группы H_i. Тогда

$$\Gamma h_i = \sum_{j=1}^{m} h_{ij}.$$

Соответствие

$$h_i \longrightarrow h_{ij}$$

определяет отображение $\Gamma_{ij} H_i$ в H_j, гомоморфное в силу того, что Γ — эндоморфизм группы. Таким образом, с помощью Γ можно построить гомоморфизмы Γ_{ij} для всех $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, m$, т. е. определить матрицу $M = (\Gamma_{ij})$ нашего кольца. Непосредственным подсчетом легко проверить, что установленное соответствие между матрицами (Γ_{ij}) и эндоморфизмами группы G есть изоморфизм кольца этих матриц и кольца эндоморфизмов группы G, что и требовалось показать.

Применим это к случаю прямой суммы групп ранга 1; для этого нам нужно лишь построить модули R_{ij}, $i \neq j$. Пусть H_1 и H_2 — абелевы группы без кручения ранга 1, $e_1 \subset H_1$ и $e_2 \subset H_2$ отличные от нуля элементы,

$$\alpha_1 = [\alpha_1(p_1), \ldots, \alpha_1(p_\nu), \ldots] \text{ и } \alpha_2 = [\alpha_2(p_1), \ldots, \alpha_2(p_\nu), \ldots]$$

— соответственно их высоты. Пусть Γ_{12} — гомоморфное отображение группы H_1 в группу H_2, т. е. $\Gamma_{12} \subset R_{12}$, и пусть $\Gamma_{12} e_1 = \gamma e_2$, где $\gamma = \frac{r}{s}$, $(r, s) = 1$. Так как Γ_{12} — гомоморфное отображение, то легко убедиться, что высота элемента $e_1 \subset H_1$ должна делить высоту элемента $\gamma e_2 \subset H_2$. Если мы обозначим через $e_2' = \gamma e_2$, а через $\alpha_2' = [\alpha_2'(p_1), \alpha_2'(p_2), \ldots, \alpha_2'(p_\nu)]$ высоту элемента e_2', то $\alpha_1(p_i) \leqslant \alpha_2'(p_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots$; так как для тех i, для которых $\alpha_2(p_i) = \infty$, $\alpha_2'(p_i) = \infty$, то прежде всего видно, что для всех p_i, для которых $\alpha_1(p_i) = \infty$, необходимо должно быть $\alpha_2(p_i) = \infty$. Чтобы имело место неравенство $\alpha_1(p_i) \leqslant \alpha_2'(p_i)$, необходимо и достаточно, чтобы число $\gamma = \frac{r}{s}$ удовлетворяло следующим условиям:

(1) s *может делиться*: (a) на любую степень тех p_i, для которых $\alpha_2(p_i) = \infty$;

(b) не более чем на $p^{\alpha_2(p_i) - \alpha_1(p_i)}$ для тех p_i, для которых $\alpha_2(p_i)$ конечно и больше $\alpha_1(p_i)$;

(c) $(s, p_j) = 1$ для тех p_j, для которых $\alpha_1(p_j) \geqslant \alpha_2(p_j)$;

(2) r *должно делиться* не менее чем на $p_j^{\alpha_1(p_j) - \alpha_2(p_j)}$ для тех p_j, для которых $\alpha_1(p_j) > \alpha_2(p_j)$.

Если вместо e_1 возьмем в группе H_1 элемент $\bar{e}_1 = \frac{m}{n} e_1$, $(m, n) = 1$, то $\Gamma_{12} \bar{e}_1 = \frac{m}{n} \gamma e_2$. Таким образом, гомоморфному отображению Γ_{12} соответ-

ствует рациональное число $\gamma = \frac{r}{s}$, $(r, s) = 1$, для которого выполняются сформулированные условия (1) и (2). Наоборот, всякому рациональному числу $\gamma = \frac{r}{s}$ с этими свойствами соответствует гомоморфное отображение Γ_{12} группы H_1 в группу H_2, определяемое следующим образом: $\Gamma_{12} e_1 = \gamma e_2$; для произвольного элемента $e \subset H_1$, $e = \frac{m_1}{m_2} e_1$, $\Gamma_{12} e = \frac{m_1}{m_2} \gamma e_2$. Нетрудно убедиться в том, что так определенное отображение Γ_{12} будет гомоморфным отображением H_1 в H_2. Непосредственно видно, что рациональные числа γ, обладающие свойствами (1) и (2), образуют модуль, причем простыми подсчетами можно показать, что этот модуль не зависит от выбора высот α_1 и α_2 из соответствующих классов эквивалентных последовательностей (наши рассуждения велись при выбранных e_1 и e_2, и, значит, α_1 и α_2), следовательно, определяется группами H_1 и H_2. Если мы модуль этих рациональных чисел обозначим через M_{12}, то нами установлено взаимно однозначное соответствие между гомоморфными отображениями Γ_{12} группы H_1 в группу H_2 и элементами модуля M_{12}. Аналогично тому, как при построении кольца эндоморфизмов абелевой группы без кручения ранга 1, можно проверить, что это соответствие сохраняет операцию сложения. Таким образом, модуль R_{12} изоморфен модулю M_{12} рациональных чисел γ, удовлетворяющих условиям (1) и (2). Этим самым построены модули R_{ij} гомоморфных отображений абелевых групп без кручения ранга 1 друг в друга, а следовательно, найдено кольцо эндоморфизмов прямой суммы групп ранга 1.

§ 3

Пусть G — p-примитивная абелева группа без кручения ранга n и приведенного ранга r определяется матрицей $A = (\alpha_{ij})$. Если мы положим

$$H_\nu = \{a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \ldots, a_r^{(\nu)}, b_1, \ldots, b_s\} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots; r + s = n),$$

то G будет объединением возрастающей последовательности

$$H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_\nu \subset \cdots, \quad G = \sum_\nu H_\nu.$$

Образующие группы G связаны соотношениями

$$pa_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu-1)} + \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij}^{(\nu)} b_j \quad (i = 1, 2, \ldots, r;\ \nu = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

которым можно придать также форму

$$p^\nu a_i^{(\nu)} = a_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_\nu b_j \quad (i = 1, 2, \ldots, r;\ \nu = 1, 2, \ldots). \tag{3'}$$

Пусть Γ — эндоморфизм группы G. Очевидно, чтобы Γ вполне было известно на всей группе G, достаточно, чтобы были определены образы

образующих

$$a_1^{(0)},\ a_2^{(0)},\ \ldots,\ a_r^{(0)},\ b_1,\ \cdots,\ b_s,$$

так как образы всех остальных образующих

$$a_i^{(k)}\,(i=1,2,\ldots,r;\,k=1,2,\ \ldots)$$

при Г могут быть найдены с помощью определяющих соотношений.

Если Г — эндоморфизм группы G, который образующие элементы $a_1^{(0)}$, $a_2^{(0)}$, ..., $a_r^{(0)}$, b_1, ..., b_s переводит в некоторые элементы группы H_ν, то мы можем написать:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma a_i^{(0)}&=\sum_{\delta=1}^{r}k_{i\delta}a_\delta^{(\nu)}+\sum_{\mu=1}^{s}u_{i\mu}b_\mu\quad(i=1,2,\ldots,r),\\ \Gamma b_j&=\sum_{\delta=1}^{r}l_{j\delta}a_\delta^{(\nu)}+\sum_{\mu=1}^{s}v_{j\mu}b_\mu\quad(j=1,2,\ldots,s),\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

где $k_{i\delta}$, $u_{i\mu}$, $l_{j\delta}$, $v_{j\mu}$ — целые числа. Теперь посмотрим, какие ограничения накладывает на целые числа k, u, l, v тот факт, что Г есть эндоморфизм группы G.

Пусть при Г элемент $a_i^{(m)}$ переходит в $\Gamma a_i^{(m)}$. Так как Г — эндоморфизм, то из (3′) при $\nu=m$ следует

$$p^m\Gamma a_i^{(m)}=\Gamma a_i^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m\Gamma b_j\quad(i=1,2,\ldots,r),\tag{5}$$

причем из $p^m\Gamma a_i^{(m)}\subset H_\nu$ вытекает $\Gamma a_i^{(m)}\subset H_{\nu+m}$. Пусть

$$\Gamma a_i^{(m)}=\sum_{\delta=1}^{r}s_{i\delta}^{(m)}a_\delta^{(\nu+m)}+\sum_{\mu=1}^{s}t_{i\mu}^{(m)}b_\mu\quad(i=1,2,\ldots,r),$$

тогда

$$p^m\Gamma a_i^{(m)}=\sum_{\delta=1}^{r}s_{i\delta}^{(m)}p^m a_\delta^{(\nu+m)}+\sum_{\mu=1}^{s}p^m t_{i\mu}^{(m)}b_\mu\quad(i=1,2,\ldots,r),\tag{6′}$$

но

$$p^m a_\delta^{(\nu+m)}=a_\delta^{(\nu)}+\sum_{\mu=1}^{s}[\alpha_{\delta\mu}^{(\nu+1)}+p\alpha_{\delta\mu}^{(\nu+2)}+\cdots+p^{m-1}\alpha_{\delta\mu}^{(\nu+m)}]b_\mu,$$

однако,

$$\alpha_{\delta\mu}^{(\nu+1)}+p\alpha_{\delta\mu}^{(\nu+2)}+\ldots+p^{m-1}\alpha_{\delta\mu}^{(\nu+m)}=p^{-\nu}\{(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m}-(\alpha_{\delta\mu})_\nu\};$$

поэтому (6′) принимает вид:

$$p^m\Gamma a_i^{(m)}=\sum_{\delta=1}^{r}s_{i\delta}^{(m)}\left\{a_\delta^{(\nu)}+p^{-\nu}\sum_{\mu=1}^{s}[(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m}-(\alpha_{\delta\mu})_\nu]\,b_\mu\right\}+\sum_{\mu=1}^{s}p^m t_{i\mu}^{(m)}b_\mu=$$

$$=\sum_{\delta=1}^{r}s_{i\delta}^{(m)}\,a_\delta^{(\nu)}+\sum_{\mu=1}^{s}\left\{p^m t_{i\mu}^{(m)}+p^{-\nu}\sum_{\delta=1}^{r}s_{i\delta}^{(m)}\,[(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m}-(\alpha_{\delta\mu})_\nu]\right\}b_\mu;\tag{6}$$

с другой стороны, из (4) следует

$$\Gamma a_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m \Gamma b_j =$$

$$= \sum_{\delta=1}^{r} \left[k_{i\delta} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m l_{j\delta} \right] a_\delta^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{s} \left[u_{i\mu} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m v_{j\mu} \right] b_\mu. \qquad (7)$$

Из (5), (6) и (7) получаем, приравнивая коэффициенты при $a_\delta^{(\nu)}$ и при b_μ,

$$s_{i\delta}^{(m)} = k_{i\delta} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m b_{j\delta} \quad (i=1, 2, \ldots, r; \ \delta = 1, 2, \ldots, r),$$

$$p^m t_{i\mu}^{(m)} + p^{-\nu} \sum_{\delta=1}^{r} s_{i\delta}^{(m)} [(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m} - (\alpha_{\delta\mu})_\nu] = u_{i\mu} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m v_{j\mu}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r; \ \mu = 1, 2, \ldots, s),$$

откуда

$$t_{i\mu}^{(m)} = p^{-m} \Big[u_{i\mu} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m v_{j\mu} - p^{-\nu} \sum_{\delta=1}^{r} \Big\{ k_{i\delta} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m l_{j\delta} \Big\} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ (\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m} - (\alpha_{\delta\mu})_\nu \Big\} \Big] \quad (i = 1, 2, \ldots, r; \ \mu = 1, 2, \ldots, s); \qquad (8)$$

следовательно,

$$u_{i\mu} + \sum_{j=1}^{r} (\alpha_{ij})_m v_{j\mu} - p^{-\nu} \sum_{\delta=1}^{r} \Big\{ k_{i\delta} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m l_{j\delta} \Big\} \{ (\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m} - (\alpha_{\delta\mu})_\nu \} \equiv 0 (p^m). \ (9_m)$$

Подобные сравнения можно получить для всех $m = 1, 2, \ldots$ Переходя к p-адическим числам, получаем из этих сравнений при $m = 1, 2, \ldots$ соотношения

$$u_{i\mu} + \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} v_{j\mu} - p^{-\nu} \sum_{\delta=1}^{r} \Big\{ k_{i\delta} + \sum_{j=1}^{s} \alpha_{ij} l_{j\delta} \Big\} \{ \alpha_{\delta\mu} - (\alpha_{\delta\mu})_\nu \} = 0. \qquad (9)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r; \ \mu = 1, 2, \ldots, s).$$

Если ввести обозначения

$$(u_{i\mu}) = U, \ (l_{j\delta}) = L, \ (v_{j\mu}) = V, \ (k_{i\delta}) = K, \ ((\alpha_{ij})_m) = A_m$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r; \ j = 1, 2, \ldots, s; \mu = 1, 2, \ldots, s; \delta = 1, 2, \ldots, r),$$

то соотношения (9) будут эквивалентны одному матричному соотношению:

$$U + AV - p^{-\nu} (K + AL)(A - A_\nu) = 0. \qquad (^*)$$

Таким образом, мы показали, что если Γ — эндоморфизм группы G, при котором

$$\Gamma a_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad \Gamma b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

будут элементами из H_ν, то ему соответствует целочисленная квадратная матрица T порядка n:

$$T = \begin{pmatrix} K & U \\ L & V \end{pmatrix},$$

где K — квадратная матрица порядка r, U — прямоугольная матрица из r строк и s столбцов, L — прямоугольная матрица из s строк и r столбцов и V — квадратная матрица порядка s, причем элементы матрицы T связаны с элементами матрицы A соотношением (*).

Пусть теперь, наоборот, нам задана целочисленная матрица T порядка n

$$T = \begin{pmatrix} K & U \\ L & V \end{pmatrix},$$

где K, U, L, V имеют указанный выше вид, и пусть элементы матрицы T связаны с элементами матрицы A соотношением (*). Тогда можно построить эндоморфизм Γ группы G, при котором элементы

$$\Gamma a_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad \Gamma b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

лежат в H_ν и определяются с помощью матрицы T соотношением

$$\begin{pmatrix} \Gamma a_1^{(0)} \\ \vdots \\ \Gamma a_r^{(0)} \\ \Gamma b_1 \\ \vdots \\ \Gamma b_s \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} a_1^{(\nu)} \\ \vdots \\ a_r^{(\nu)} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}. \tag{4'}$$

На самом деле, рассмотрим отображение Γ группы G в себя определенное следующим образом:

$\Gamma a_i^{(0)}, \Gamma b_j$ $(i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, s)$ определяются с помощью (4′), а для $m = 1, 2, \ldots$ $\Gamma a_i^{(m)}$ определяются по формулам

$$\Gamma a_i^{(m)} = \sum_{\delta=1}^{r} \left\{ k_{i\delta} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m l_{j\delta} \right\} a_\delta^{(\nu+m)} + p^{-m} \sum_{\mu=1}^{s} \Bigg[u_{i\mu} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m v_{j\mu} - p^{-\nu} \sum_{\delta=1}^{r} \left\{ k_{i\delta} + \sum_{j=1}^{s} (\alpha_{ij})_m l_{j\delta} \right\} \{(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m} - (\alpha_{\delta\mu})_\nu\} \Bigg] b_\mu. \tag{4''}$$

Так как имеет место соотношение (*), то u, v, k, l удовлетворяют соотношениям (9), а следовательно, для любого $m = 1, 2, \ldots$ имеют место соотношения (9_m), т. е. формулы (4″) имеют смысл. Тем самым с помощью матрицы T формулами (4′) и (4″) отображение Γ определено для всех образующих группы G. Если бы нам теперь удалось показать, что элементы

$$\Gamma a_i^{(m)}, \ \Gamma b_j \quad (i = 1, 2, \ldots, r; \ j = 1, 2, \ldots, s; m = 0, 1, 2, \ldots)$$

связаны теми же соотношениями, которые являются определяющими соотношениями группы G в образующих

$$a_i^{(m)}, \ b_j \quad (i = 1, 2, \ldots r; \ j = 1, 2, \ldots, s; \ m = 0, 1, 2, \ldots),$$

то этим было бы доказано, что отображение Γ фактически определено на всей группе G и есть эндоморфизм группы G.

Таким образом, остается доказать, что имеют место соотношения

$$p^m\Gamma a_i^{(m)}=\Gamma a_i^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m\Gamma b_j \quad (i=1,2,\ldots,r;\ m=1,2,\ldots).$$

В силу соотношений (4′) и (4″) имеем

$$p^m\left\{\sum_{\delta=1}^{r}k_{i\delta}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m l_{j\delta})\,a_\delta^{(\nu+m)}+p^{-m)}\sum_{\mu=1}^{s}\left[u_{i\mu}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m v_{j\mu}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-p^{-\nu}\sum_{\delta=1}^{r}\left(k_{i\delta}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m l_{j\delta}\right)((\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m}-(\alpha_{\delta\mu})_\nu)\right]b_\mu\right\}=$$

$$=\sum_{\delta=1}^{r}p^m\left(k_{i\delta}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m l_{j\delta})\,a_\delta^{(\nu+m)}+\sum_{\mu=1}^{s}\left[u_{i\mu}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m v_{j\mu}-\right.\right.$$

$$\left.-p^{-\nu}\sum_{\delta=1}^{r}\left\{k_{i\delta}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m l_{j\delta}\right\}\{(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m}-(\alpha_{\delta\mu})_\nu\}\right]b_\mu=$$

$$=\sum_{\delta=1}^{r}(k_{i\delta}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m l_{j\delta})p^m a_\delta^{(\nu+m)}+\sum_{\mu=1}^{s}[u_{i\mu}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m v_{j\mu}-$$

$$\left.-p^{-\nu}\sum_{\delta=1}^{r}\left\{k_{i\delta}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m l_{j\delta}\right\}\left\{(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m}-(\alpha_{\delta\mu})_\nu\right\}\right]b_\mu.$$

Но

$$p^m a_\delta^{(\nu+m)}=a^{(\nu)}+p^{-\nu}\sum_{\mu=1}^{s}\left\{(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m}-(\alpha_{\delta\mu})_\nu\right\}b_\mu,$$

поэтому

$$p^m\,\Gamma\,a_i^{(m)}=\sum_{\delta=1}^{r}\left[k_{i\delta}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m l_{j\delta}\right]\left[a_\delta^{(\nu)}+p^{-\nu}\sum_{\mu=1}^{s}\left\{(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(\alpha_{\delta\mu})_\nu\right\}b_\mu\right]+\sum_{=1}^{s}\left[u_{i\mu}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m v_{j\mu}-p^{-\nu}\sum_{\delta=1}^{r}\left\{k_{i\delta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m l_{i\delta}\right\}\left\{(\alpha_{\delta\mu})_{\nu+m}-(\alpha_{\delta\mu})_\nu\right\}\right]b_\mu=\sum_{\delta=1}^{r}k_{i\delta}\,a_\delta^{(\nu)}+\sum_{\mu=1}^{s}u_{i\mu}\,b_\mu+$$

$$+\sum_{j=1}^{s}(\alpha\ \ )_m\left\{\sum_{\delta=1}^{r}l_{j\delta}\,a_\delta^{(\nu)}+\sum_{\mu=1}^{s}v_{j\mu}\,b_\mu\right\};$$

$$p^m\,\Gamma\,a_i^{(m)}=\Gamma\,a_i^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}(\alpha_{ij})_m\,\Gamma\,b \quad (i=1,2,\ldots,r;\ m=1,2,\ldots),$$

что и требовалось доказать.

Этим мы окончательно доказали, что *определенное с помощью формул (4′) и (4″) отображение* Γ *есть эндоморфизм группы* G, *при котором* $\Gamma\,a_i^{(0)}\subset H_\nu$, $\Gamma\,b_j\subset H_\nu$ $(i=1;2,\ldots,r;\ j=1,2,\ldots,s)$.

§ 4

Обозначим через $\mathfrak{M}_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) множество целочисленных матриц T_ν, соответствующих тем эндоморфизмам, при которых $\Gamma a_i^{(0)} \subset H_\nu$, $\Gamma b_j \subset H_\nu$ ($i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, s$). Эти множества матриц можно считать вложенными друг в друга:

$$\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{M}_\nu \subset \ldots \subset \mathfrak{M}_{\nu+\delta} \subset \ldots$$

В самом деле, пусть $T_\nu \subset \mathfrak{M}_\nu$, $T_\nu = \begin{pmatrix} K & U \\ L & V \end{pmatrix}$. Это значит, что элементы $\Gamma a_i^{(0)}$, Γb_j, определенные с помощью T_ν по формулам (4′), лежат в H_ν. Но $H_\nu \subset H_{\nu+\delta}$ и поэтому элементы $\Gamma a_i^{(0)}$ и Γb_j можно записать через $a_i^{(\nu+\delta)}$, b_j. Для этого в формулах (4) надо $a_i^{(\nu)}$ выразить через $a_i^{(\nu+\delta)}$ и b_j с помощью определяющих соотношений. Если провести эти несложные вычисления, окажется, что эндоморфизму Γ будет соответствовать матрица $T_{\nu+\delta}$:

$$T_{\nu+\delta} = \begin{pmatrix} K' & U' \\ L' & V' \end{pmatrix}, \quad T_{\nu+\delta} \subset \mathfrak{M}_{\nu+\delta},$$

где

$$\left.\begin{aligned} K' &= p^\delta K, \quad U' = U - p^{-\nu} K (A_{\nu+\delta} - A_\nu); \\ L' &= p^\delta L, \quad V' = V - p^{-\nu} L (A_{\nu+\delta} - A_\nu). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Отождествляя матрицы T_ν и $T_{\nu+\delta}$, связанные соотношениями (10), мы и осуществим вложение $\mathfrak{M}_\nu$ в $\mathfrak{M}_{\nu+\delta}$ ($\delta = 1, 2, \ldots$).

Обозначим через $\mathfrak{M}$ объединение возрастающей цепочки множеств $\mathfrak{M}_\nu$. Таким образом, всякому эндоморфизму Γ группы G соответствует некоторая матрица из $\mathfrak{M}$ и, наоборот, всякой матрице из $\mathfrak{M}$ соответствует некоторый эндоморфизм группы G.

ТЕОРЕМА 3. *Кольцо эндоморфизмов p-примитивной абелевой группы G без кручения ранга n, приведенного ранга r, задаваемой p-адической матрицей $A = (\alpha_{ij})$, изоморфно кольцу матриц n-го порядка $T = \begin{pmatrix} M & R \\ F & Q \end{pmatrix}$ над кольцом R_p, тех рациональных чисел, знаменатель которых есть степень простого числа p, где M — квадратная матрица над R_p порядка r; R — прямоугольная матрица над R_p из r строк и s столбцов, F — прямоугольная матрица над R_p из s строк и r столбцов и Q — квадратная матрица порядка s над R_p, причем эти матрицы должны удовлетворять следующим условиям:*

(1) $R + AQ - (M + AF) A = 0$;

(2) *существует такое целое положительное число ν, что матрицы $p^\nu M$, $p^\nu F$, $Q - FA_\nu$ будут целочисленными.*

Пусть $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_r^{(0)}, b_1, \ldots, b_s$ — p-примитивная база группы G. Если Γ — эндоморфизм группы G, то для каждого $i = 1, 2 \ldots, r$ существует такое $\nu_i \geqslant 0$, что

$$p^{\nu_i} \Gamma a_i^{(0)} = \sum_{\delta=1}^{r} m_{i\delta} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} r_{i\mu} b_\mu,$$

где $m_{i\delta}$ и $r_{i\mu}$ — целые числа (это вытекает из определения p-примитивной базы). Аналогично для каждого $j=1, 2, \ldots, s$ существует такое целое $\varkappa_j \geqslant 0$, что

$$p^{\varkappa_j}\Gamma\, b_j = \sum_{\delta=1}^{r} f_{j\delta}\, a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} q_{j\mu}\, b_\mu.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} \Gamma\, a_i^{(0)} &= \sum_{\delta=1}^{r} \frac{m_{i\delta}}{p^{\nu_i}}\, a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{r_{i\mu}}{p^{\nu_i}}\, b_\mu \quad (i=1, 2, \ldots, r), \\ \Gamma\, b_j &= \sum_{\delta=1}^{r} \frac{f_{j\delta}}{p^{\varkappa_j}}\, a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{q_{j\mu}}{p^{\varkappa_j}}\, b_\mu \quad (j=1, 2, \ldots, s). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Вводя обозначения:

$$M=\left(\frac{m_{i\delta}}{p^{\nu_i}}\right), \quad F=\left(\frac{f_{j\delta}}{p^{\varkappa_j}}\right), \quad R=\left(\frac{r_{i\mu}}{p^{\nu_i}}\right), \quad Q=\left(\frac{q_{j\mu}}{p^{\varkappa_j}}\right)$$

$$(i=1, 2, \ldots, r;\ j=1, 2, \ldots, s;\ \delta=1, 2, \ldots, r;\ \mu=1, 2, \ldots, s),$$

мы видим, что эндоморфизму Γ соответствует матрица

$$T=\begin{pmatrix} M & R \\ F & Q \end{pmatrix}$$

над кольцом R_p, причем этой матрицей эндоморфизм Γ полностью определяется, так как с ее помощью задаются образы элементов примитивной базы, а так как для любого элемента $g \subset G$ существует такое целое $k \geqslant 0$, что

$$p^k g = \sum_{i=1}^{r} t_i\, a_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{s} \sigma_j\, b_j,$$

то для любого g можно найти выражение для Γg. Из § 3 мы знаем, что эндоморфизму Γ соответствует матрица $T_\nu = \begin{pmatrix} K & U \\ L & V \end{pmatrix}$, удовлетворяющая условию

$$U + AV - p^{-\nu}(K + AL)(A - A_\nu) = 0, \tag{*}$$

причем

$$\Gamma\, a_i^{(0)} = \sum_{\delta=1}^{r} k_{i\delta}\, a_\delta^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{s} u_{i\mu}\, b_\mu \quad (i=1, 2, \ldots, r),$$

$$\Gamma\, b_j = \sum_{\delta=1}^{r} l_{j\delta}\, a_\delta^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{s} v_{j\mu}\, b_\mu \quad (j=1, 2, \ldots, s).$$

Так как

$$p^\nu a_\delta^{(\nu)} = a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} (\alpha_{\delta\mu})_\nu\, b_\mu \quad (\delta=1, 2, \ldots, r),$$

то

$$a_\delta^{(\nu)} = p^{-\nu} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{(\alpha_{\delta\mu})_\nu}{p^\nu}\, b_\mu.$$

Подставляя это в выражения для $\Gamma a_i^{(0)}$ и Γb_j, получим

$$\left.\begin{aligned}\Gamma a_i^{(0)} &= \sum_{\delta=1}^{r} \frac{k_{i\delta}}{p^\nu} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \left[u_{i\mu} + \sum_{\delta=1}^{r} \frac{k_{i\delta}(\alpha_{\delta\mu})_\nu}{p^\nu} \right] b_\mu \quad (i=1,2,\ldots,r),\\ \Gamma b_j &= \sum_{\delta=1}^{r} \frac{l_{j\delta}}{p^\nu} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \left[v_{j\mu} + \sum_{\delta=1}^{r} \frac{l_{j\delta}(\alpha_{\delta\mu})_\nu}{p^\nu} \right] b_\mu \quad (j=1,2,\ldots,s).\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Сравнивая формулы (11) и (12), в силу линейной независимости $a_i^{(0)}$ и b_j $(i=1,2,\ldots,r;\quad j=1,2,\ldots,s)$, получаем

$$M = p^{-\nu} K,\ F = p^{-\nu} L,\ R = U + p^{-\nu} K A_\nu,\ Q = V + p^{-\nu} L A_\nu;$$

отсюда

$$K = p^\nu M,\ L = p^\nu F,\quad U = R - M A_\nu,\ V = Q - F A_\nu.$$

Подставляя это в (*), получаем

$$R + AQ - (M + AF) A = 0.$$

Таким образом, всякому эндоморфизму Γ соответствует матрица T над кольцом R_p, элементы которой удовлетворяют условиям (1) и (2).

Пусть теперь, наоборот, нам дана матрица $T = \begin{pmatrix} M & R \\ F & Q \end{pmatrix}$ над кольцом R_p порядка n, элементы которой удовлетворяют условиям (1) и (2). Тогда в силу условия (2) существует такое ν, что $p^\nu M = K$, $p^\nu F = L$, $Q - FA_\nu = V$ — целочисленные матрицы, а из условий (1) и (2) вытекает, что и $R - MA_\nu = U$ тоже целочисленная матрица. Составим из этих матриц матрицу

$$T_\nu = \begin{pmatrix} K & U \\ L & V \end{pmatrix};$$

так как элементы матрицы T удовлетворяют условию (1), то

$$U + AV - p^{-\nu}(K + AL)(A - A_\nu) = 0, \qquad (*)$$

т. е. матрица T_ν (как это следует из § 3) определяет эндоморфизм Γ группы G, при котором

$$\begin{aligned}\Gamma a_i^{(0)} &= \sum_{\delta=1}^{r} k_{i\delta} a_\delta^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{s} u_{i\mu} b_\mu \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r),\\ \Gamma b_j &= \sum_{\delta=1}^{r} l_{j\delta} a_\delta^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{s} v_{j\mu} b_\mu \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s).\end{aligned}$$

Подставляя вместо $a_\delta^{(\nu)}$ его выражение

$$a_\delta^{(\nu)} = \frac{1}{p^\nu} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \frac{(\alpha_{\delta\mu})_\nu}{p^\nu} b_\mu \quad (\delta=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

получим

$$\Gamma a_i^{(0)} = \sum_{\delta=1}^{r} \frac{k_{i\delta}}{p^\nu} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \left[u_{i\mu} + \sum_{\delta=1}^{r} \frac{k_{i\delta}(\alpha_{\delta\mu})_\nu}{p^\nu} \right] b_\mu \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

$$\Gamma b_j = \sum_{\delta=1}^{r} \frac{l_{j\delta}}{p^\nu} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \left[v_{j\mu} + \sum_{\delta=1}^{r} \frac{l_{j\delta}(\alpha_{\delta\mu})_\nu}{p^\nu} \right] b_\mu \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

т. е.

$$\Gamma a_i^{(0)} = \sum_{\delta=1}^{r} m_{i\delta} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} r_{i\mu} b_\mu \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

$$\Gamma b_j = \sum_{\delta=1}^{r} f_{j\delta} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} q_{j\mu} b_\mu \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

где

$$(m_{i\delta}) = M, \quad (r_{i\mu}) = R, \quad (f_{j\delta}) = F, \quad (q_{j\mu}) = Q.$$

Поэтому эндоморфизму Γ в соответствии с первой частью доказательства соответствует матрица $T = \begin{pmatrix} M & R \\ F & Q \end{pmatrix}$, т. е. наша исходная матрица. Таким образом, всякая матрица T над кольцом R_p, элементы которой удовлетворяют условиям (1) и (2), определяет эндоморфизм Γ группы G. Этим самым мы установили взаимно однозначное соответствие между эндоморфизмами группы G и матрицами $T = \begin{pmatrix} M & R \\ F & Q \end{pmatrix}$ порядка n над кольцом R_p, элементы которых удовлетворяют условиям (1) и (2). Совершенно очевидно, что при этом соответствии сумме и произведению эндоморфизмов соответствуют сумма и произведение соответствующих матриц.

§ 5

Если G — произвольная абелева группа, то отображение $g \to ng$, где g — произвольный элемент группы G, а n — фиксированное целое число, есть эндоморфизм группы G. Не исключена возможность того, что группа G обладает только эндоморфизмами этого типа; в этом случае будем говорить, что кольцо эндоморфизмов группы G *тривиально*. Данное выше описание кольца эндоморфизмов p-примитивной абелевой группы без кручения ранга n, приведенного ранга r, определяемой p-адической матрицей A, дает возможность формулировать те условия, при которых такого рода группа G обладает нетривиальным кольцом эндоморфизмов.

Прежде чем дать формулировку условий, при которых кольцо эндоморфизмов группы G нетривиально, посмотрим, как задаются тривиальные эндоморфизмы группы G. Пусть Γ — тривиальный эндоморфизм группы G, т. е. Γ определяется некоторым целым числом q, $\Gamma g = qg$ для произвольного $g \subset G$. Следовательно, $\Gamma a_i^{(0)} = q a_i^{(0)}$ $(i=1, 2, \ldots, r)$, $\Gamma b_j = q b_j$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$ и Γ соответствует матрица

$$T_0 \subset \mathfrak{M}_0, \quad T_0 = \begin{pmatrix} qE_r & 0 \\ 0 & qE_s \end{pmatrix},$$

где E_r и E_s — единичные матрицы порядка r и s. Поэтому

$$K = qE_r, \quad L = 0, \quad U = 0, \quad V = qE_s. \tag{13}$$

Из формул (10) следует, что в любом $\mathfrak{M}_\nu$ эндоморфизму Γ соответствует матрица $T_\nu = \begin{pmatrix} K' & U' \\ L' & V' \end{pmatrix}$, где

$$K' = qp^\nu E_r, \quad L' = 0, \quad U' = -qA_\nu, \quad V' = qE_s. \tag{13'}$$

ЛЕММА. *Если у группы G существует нетривиальный эндоморфизм Γ, при котором $\Gamma a_i^{(0)} \subset H_\nu$, $\Gamma b_j \subset H_\nu$, то существует и такой нетривиальный эндоморфизм Γ', при котором $\Gamma' a_i^{(0)} \subset H_0$ и $\Gamma' b_j \subset H_0$; это будет эндоморфизм $\Gamma' = p^\nu \Gamma$.*

Пусть Γ — нетривиальный эндоморфизм и пусть он определяется матрицей

$$T_\nu = \begin{pmatrix} K & U \\ L & V \end{pmatrix};$$

поэтому

$$\Gamma a_i^{(0)} = \sum_{\delta=1}^{r} k_{i\delta} a_\delta^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{s} u_{i\mu} b_\mu \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$\Gamma b_j = \sum_{\delta=1}^{r} l_{j\delta} a_\delta^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{s} v_{j\mu} b_\mu \quad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Рассмотрим эндоморфизм $p^\nu \Gamma$ и отыщем соответствующую ему матрицу $\tilde{T}_0$. Из равенств

$$p^\nu \Gamma a_i^{(0)} = \sum_{\delta=1}^{r} k_{i\delta} p^\nu a_\delta^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{s} p^\nu u_{i\mu} b_\mu \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$p^\nu \Gamma b_j = \sum_{\delta=1}^{r} l_{j\delta} p^\nu a_\delta^{(\nu)} + \sum_{\mu=1}^{s} p^\nu v_{j\mu} b_\mu \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

используя определяющие соотношения (2), получим

$$p^\nu \Gamma a_i^{(0)} = \sum_{\delta=1}^{r} k_{i\delta} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \left[p^\nu u_{i\mu} + \sum_{\delta=1}^{r} k_{i\delta} (\alpha_{\delta\mu})_\nu \right] b_\mu \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$p^\nu \Gamma b_j = \sum_{\delta=1}^{r} l_{j\delta} a_\delta^{(0)} + \sum_{\mu=1}^{s} \left[p^\nu v_{j\mu} + \sum_{\delta=1}^{r} l_{i\delta} (\alpha_{\delta\mu})_\nu \right] b_\mu \quad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Таким образом, матрица, соответствующая эндоморфизму $p^\nu \Gamma$, есть

$$\tilde{T}_0 = \begin{pmatrix} K & p^\nu U + KA_\nu \\ L & p^\nu V + LA_\nu \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $p^\nu \Gamma$ — тривиальный эндоморфизм; тогда должно существовать такое θ, что

$$K = \theta E_r, \quad L = 0, \quad p^\nu U + KA_\nu = 0, \quad p^\nu V + LA_\nu = \theta E_s;$$

отсюда:

$$k_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \; k_{ii} = \theta \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$
$$l_{j\delta} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s; \; \delta = 1, 2, \ldots, r)$$
$$p^\nu v_{jj} = \theta \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \quad v_{j\mu} = 0 \quad (j \neq \mu).$$

Обозначим v_{jj} через q, тогда

$$\theta = p^{\nu} q, \quad p^{\nu} u_{i\mu} + p^{\nu} q (\alpha_{i\mu})_{\nu} = 0;$$

таким образом, получаем

$$K = p^{\nu} q E_r, \quad L = 0, \quad U = -qA_{\nu}, \quad V = qE_s.$$

Ввиду (13′) это означает, что Γ — тривиальный эндоморфизм, что противоречит нашим предположениям. Итак, если Γ нетривиально и $\Gamma a_i^{(0)} \subset H_{\nu}$, $\Gamma b_j \subset H_{\nu}$, то $p^{\nu}\Gamma$ нетривиально и $p^{\nu}\Gamma a_i^{(0)} \subset H_0$, $p^{\nu}\Gamma b_j \subset H_0$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4. *Кольцо эндоморфизмов n-примитивной абелевой группы G без кручения конечного ранга n, приведенного ранга r, определяемой p-адической матрицей $A = (\alpha_{ij})$, тогда и только тогда тривиально, если из всякого соотношения*

$$U + AV - (K + AL) A = 0,$$

где K, L, U и V — целочисленные матрицы, следует

$$U = 0, \quad L = 0, \quad V = mE_s, \quad K = mE_r, \tag{13}$$

где m — целое число, а E_r и E_s — единичные матрицы порядка r и s.

Действительно, по лемме, существование нетривиального эндоморфизма равносильно существованию нетривиального эндоморфизма, при котором образы элементов $a_i^{(0)}$ и b_j остаются в H_0, т. е., как мы знаем, равносильно существованию целочисленной матрицы $T = \begin{pmatrix} K & U \\ L & V \end{pmatrix}$, удовлетворяющей соотношению $U + AV - (K + AL) A = 0$, причем хотя бы одно из равенств (13) не имеет места.

Очень прозрачную форму принимает этот результат для случая $n = 2$, $r = 1$ при условии, что группа G неразложима в прямую сумму.

Следствие. *Кольцо эндоморфизмов p-примитивной группы G ранга $n = 2$, приведенного ранга $r = 1$, неразложимой в прямую сумму, нетривиально тогда и только тогда, если целое p-адическое число α, задающее эту группу, квадратично над полем рациональных чисел R, т. е. если поле R(α) второй степени относительно R.*

Из предположения о неразложимости группы G в прямую сумму следует, что α не есть рациональное число [1]. Ввиду того, что $n = 2$, $r = 1$, матрицы, соответствующие эндоморфизмам группы G, имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} k & u \\ l & v \end{pmatrix},$$

где k; u, l, v — целые числа, удовлетворяющие условию (*). Если кольцо эндоморфизмов группы G нетривиально, то существует нетривиальный эндоморфизм Γ, определяемый матрицей $T = \begin{pmatrix} k & u \\ l & v \end{pmatrix}$, $T \subset \mathfrak{M}_0$ (как это следует из леммы), элементы которой удовлетворяют соотношению

$$u + \alpha v - (k + \alpha l) \alpha = 0.$$

Так как Γ нетривиально, то это соотношение не обращается в тожде-

ство, а так как α иррационально, то полученное уравнение относительно α неприводимо, т. е. α *квадратично над полем* R.

Обратно, пусть α квадратично над полем R, т. е. α есть корень квадратного уравнения, неприводимого над R. Если это уравнение имеет вид

$$l_0\alpha^2 + t_0\alpha + u_0 = 0,$$

то матрица

$$T = \begin{pmatrix} x & -u_0 \\ l_0 & y \end{pmatrix},$$

где x, y — произвольные целые числа, удовлетворяющие условию $x - y = t_0$, определяет эндоморфизм Γ группы G, нетривиальный ввиду $l_0 \neq 0$. Следовательно, кольцо эндоморфизмов группы G нетривиально.

Учитывая первую часть теоремы Derry, сформулированной в § 1 настоящей работы, мы получим, что *условия нетривиальности кольца эндоморфизмов и группы автоморфизмов совпадают для неразложимых групп при* $n = 2$ и $r = 1$. Это приводит к следующей общей проблеме, решить которую пока не удалось: *не будет ли для любой (неразложимой) р-примитивной группы конечного ранга из существования нетривиального эндоморфизма следовать существование нетривиального автоморфизма?*

§ 6

Пусть G — p-примитивная абелева группа без кручения ранга n и приведенного ранга r, определяемая матрицей $A = (\alpha_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s;\ r + s = n)$. Будем через $R(\alpha_{ij})$ обозначать расширение поля рациональных чисел, полученное присоединением к нему p-адических чисел α_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s)$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть дана р-примитивная абелева группа G без кручения, ранга n и приведенного ранга r, от которой не отщепляется в качестве прямого слагаемого бесконечная циклическая группа. Если группа G задается целочисленной р-адической матрицей* $A = (\alpha_{ij})$, *то ее кольцо эндоморфизмов изоморфно некоторому подкольцу полного кольца матриц порядка r над полем* $R(\alpha_{ij})$.

Пусть Γ — произвольный эндоморфизм группы G; тогда в силу теоремы 3 он задается матрицей n-го порядка над R_p

$$T = \begin{pmatrix} M & R \\ F & Q \end{pmatrix},$$

элементы которой связаны соотношением

$$R + AQ - (M + AF)A = 0.$$

Эндоморфизму Γ поставим теперь в соответствие матрицу $\mathfrak{A} = f(\Gamma)$ порядка r над полем $R(\alpha_{ij})$, определенную следующим образом:

$$\mathfrak{A} = (M + AF).$$

Покажем, что так установленное отображение f кольца $\mathfrak{M}$ эндоморфизмов группы G внутрь полного кольца матриц порядка r над полем $R(\alpha_{ij})$ есть изоморфное отображение.

Прежде всего установим взаимную однозначность отображения. Однозначность его очевидна. Покажем, что двум разным эндоморфизмам Γ_1 и Γ_2 соответствуют две различные матрицы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Пусть $\Gamma_1 \to T^{(1)}$ и $\Gamma_2 \to T^{(2)}$,

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} M_1 & R_1 \\ F_1 & Q_1 \end{pmatrix}, \qquad T^{(2)} = \begin{pmatrix} M_2 & R_2 \\ F_2 & Q_2 \end{pmatrix};$$

тогда

$$f(\Gamma_1) = (M_1 + AF_1) = \mathfrak{A}_1,$$
$$f(\Gamma_2) = (M_2 + AF_2) = \mathfrak{A}_2;$$

при этом имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} R_1 + AQ_1 - (M_1 + AF_1) A = 0, \\ R_2 + AQ_2 - (M_2 + AF_2) A = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Предположим, что двум эндоморфизмам Γ_1 и Γ_2 соответствует одна и та же матрица $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$; тогда

$$M_1 + AF_1 = M_2 + AF_2,$$

т. е.

$$M_1 - M_2 + A(F_1 - F_2) = 0. \qquad (15)$$

Из соотношения (15) вытекает линейная зависимость между столбцами матрицы A над полем рациональных чисел, а это противоречит тому, что от группы G не отщепляются в качестве прямых слагаемых бесконечные циклические группы ([2]). Поэтому

$$M_1 - M_2 = 0, \quad F_1 - F_2 = 0,$$

т. е. $M_1 = M_2$, $F_1 = F_2$, а тогда из соотношений (14) следует

$$R_1 + AQ_1 = R_2 + AQ_2, \qquad R_1 - R_2 + A(Q_1 - Q_2) = 0,$$

т. е. аналогично предыдущему

$$R_1 = R_2, \qquad Q_1 = Q_2,$$

а следовательно,

$$\Gamma_1 = \Gamma_2.$$

Таким образом, взаимная однозначность отображения f доказана. Теперь докажем, что отображение f гомоморфно, — этим будет доказано, что оно изоморфно.

Пусть Γ_1 и Γ_2 — два эндоморфизма группы G и пусть им соответствуют матрицы

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} M_1 & R_1 \\ F_1 & Q_1 \end{pmatrix} \text{ и } T^{(2)} = \begin{pmatrix} M_2 & R_2 \\ F_2 & Q_2 \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы 3 эндоморфизму $\Gamma_1 + \Gamma_2$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} M_1 + M_2 & R_1 + R_2 \\ F_1 + F_2 & Q_1 + Q_2 \end{pmatrix},$$

а тогда согласно определению отображения f

$$f(\Gamma_1 + \Gamma_2) = M_1 + M_2 + A(F_1 + F_2) = M_1 + AF_1 + M_2 + AF_2 = f(\Gamma_1) + f(\Gamma_2),$$

т. е. сумма эндоморфизмов при отображении f переходит в сумму соответствующих матриц.

Эндоморфизм $\Gamma_1\Gamma_2$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} M_1 & R_1 \\ F_1 & Q_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_2 & R_2 \\ F_2 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 M_2 + R_1 F_2 & M_1 R_2 + R_1 Q_2 \\ F_1 M_2 + Q_1 F_2 & F_1 R_2 + Q_1 Q_2 \end{pmatrix};$$

по определению отображения f

$$f(\Gamma_1\Gamma_2) = M_1M_2 + R_1F_2 + A(F_1M_2 + Q_1F_2). \qquad (16)$$

С другой стороны,

$$f(\Gamma_1)\,f(\Gamma_2) = (M_1 + AF_1)(M_2 + AF_2) = M_1M_2 + AF_1M_2 + (M_1 + AF_1)\,AF_2 =$$
$$= M_1M_2 + AF_1M_2 + (R_1 + AQ_1)\,F_2 = M_1M_2 + R_1F_2 + A\,(F_1M_2 + Q_1F_2).$$

Сравнивая этот результат с формулой (16), получаем

$$f(\Gamma_1\Gamma_2) = f(\Gamma_1)\,f(\Gamma_2),$$

т. е. отображение f произведение эндоморфизмов переводит в произведение соответствующих матриц. Этим полностью доказано, что f — изоморфное отображение. Теорема, таким образом, доказана.

Эта теорема является расширением второй части результата Derry, формулированного в § 1 настоящей работы. Derry показано, что в случае группы G ранга 2 и приведенного ранга 1, неразложимой в прямую сумму и задаваемой числом α, группа автоморфизмов группы G изоморфна некоторой подгруппе мультипликативной группы поля $R(\alpha)$. Здесь же получен подобный результат для кольца эндоморфизмов уже в общем случае произвольного приведенного ранга r, при дополнительном предположении о неотщепляемости от группы G бесконечных циклических групп в качестве прямых слагаемых.

Следствие. *Кольцо эндоморфизмов p-примитивной абелевой группы G без кручения ранга n и приведенного ранга $r=1$, от которой не отщепляется в качестве прямого слагаемого бесконечная циклическая группа, коммутативно.*

В силу теоремы 5 кольцо эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ такой группы G изоморфно некоторому кольцу матриц порядка $r=1$ над полем $R(\alpha_{ij})$, т. е. изоморфно просто некоторому подкольцу поля $R(\alpha_{ij})$.

Если мы положим $n=2$, $r=1$ и предположим неразложимость группы G в прямую сумму и если α есть p-адическое число, задающее группу G, то оказывается, что кольцо эндоморфизмов такой группы G изоморфно некоторому подкольцу поля $R(\alpha)$, а следовательно, и коммутативно. У Derry же получено, что группа автоморфизмов такой группы изоморфна некоторой подгруппе мультипликативной группы поля $R(\alpha)$.

Представляет интерес вопрос о возможности обращения последнего результата, т. е. о справедливости следующего предположения: *если G есть p-примитивная абелева группа без кручения, ранга n, от которой не отщепляются в качестве прямых слагаемых бесконечные циклические группы* (это можно, впрочем, заменить более сильным требованием о неразложимости группы) *и если кольцо эндоморфизмов группы G комму-*

тативно, то не будет ли приведенный ранг группы G равен единице? Этот вопрос остался пока открытым.

§ 7

Пусть G — p-примитивная абелева группа без кручения, ранга $n=2$ и приведенного ранга $r=1$, неразложимая в прямую сумму и определяемая целым p-адическим числом α. Пусть, далее, кольцо эндоморфизмов $\mathfrak{M}$ группы G нетривиально. В соответствии с обозначениями, введенными в § 1 для общего случая, в этом частном случае группа G задается образующими $a^{(\nu)}$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ и b и определяющими соотношениями

$$p^\nu a^{(\nu)} = a^{(0)} + (\alpha)_\nu b \quad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

кроме того,—соотношениями коммутативности. Если

$$H'_\nu = \{a^{(\nu)},\ b\},$$

то

$$G = \sum_\nu H_\nu.$$

В соответствии с § 3 кольцо эндоморфизмов группы G имеет вид $\mathfrak{M} = \sum\limits_\nu \mathfrak{M}_\nu$, где $\mathfrak{M}_\nu$ будет теперь уже множеством целочисленных матриц порядка 2, удовлетворяющих условию (*).

ТЕОРЕМА 6. *Если группа G с указанными выше свойствами обладает нетривиальным эндоморфизмом Γ, при котором $\Gamma a^{(0)} \subset H_0$ и $\Gamma b \subset H_0$, то для любого $\nu \geqslant 1$ существует нетривиальный эндоморфизм $\Gamma^{(\nu)}$, при котором $\Gamma^{(\nu)} a^{(0)}$, $\Gamma^{(\nu)} b \subset H_\nu$, но хотя бы одно из $\Gamma^{(\nu)} a^{(0)}$, $\Gamma^{(\nu)} b$ не содержится в $H_{\nu-1}$.*

Так как в силу сделанных предположений кольцо эндоморфизмов группы G нетривиально, то α квадратично над полем рациональных чисел R; следовательно, α — корень уравнения с целыми коэффициентами

$$l_0 \alpha^2 + (k_0 - v_0)\alpha - u_0 = 0. \tag{17}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что коэффициенты этого уравнения взаимно просты. Коэффициенты этого уравнения определяют нетривиальный эндоморфизм Γ при помощи матрицы $T_0 \subset \mathfrak{M}_0$

$$T_0 = \begin{pmatrix} k_0 & u_0 \\ l_0 & v_0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что можно построить такой нетривиальный эндоморфизм $\Gamma^{(\nu)}$, что $\Gamma^{(\nu)}$ будет определяться матрицей $T \subset \mathfrak{M}_\nu$, но $T_\nu \not\subset \mathfrak{M}_{\nu-1}$. Чтобы построить такой эндоморфизм, мы должны определить целые числа k_ν, l_ν, u_ν, v_ν, причем так, чтобы *не имели места одновременно два сравнения:*

$$k_\nu \equiv 0\,(p), \quad l_\nu \equiv 0\,(p).$$

Таким образом, искомый эндоморфизм определяется следующим образом:

$$\Gamma^{(\nu)} a^{(0)} = k_\nu a^{(\nu)} + v_\nu b,$$
$$\Gamma^{(\nu)} b = l_\nu a^{(\nu)} + v_\nu b;$$

при этом целые числа $k_\nu, l_\nu, u_\nu, v_\nu$ должны удовлетворять соотношению

$$u_\nu - \alpha v_\nu - p^{-\nu}(k_\nu + \alpha l_\nu)(\alpha - (\alpha)_\nu) = 0;$$

отсюда

$$l_\nu \alpha^2 + [k_\nu - (\alpha)_\nu l_\nu - p^\nu v_\nu]\alpha - [p^\nu u_\nu + (\alpha)_\nu k\ ] = 0. \tag{18}$$

Мы получили для α квадратное уравнение, а так как α квадратично над полем рациональных чисел, то это уравнение должно с точностью до постоянного множителя совпадать с уравнением (17). Будем подбирать целые числа $k_\nu, u_\nu, l_\nu, v_\nu$ так, чтобы уравнения (17) и (18) просто совпадали, т. е. чтобы имели место равенства:

$$l_\nu = l_0, \tag{19}$$

$$k_\nu - (\alpha)_\nu l_\nu - p_\nu v_\nu = k_0 - v_0, \tag{20}$$

$$p^\nu u_\nu + (\alpha)_\nu k_\nu = u_0. \tag{21}$$

Из (19) и (21) получим

$$k_\nu = k_0 - v_0 + (\alpha)_\nu l_0 + p^\nu v_\nu; \tag{22}$$

подставляя это в (21), получим

$$p^\nu u_\nu + (\alpha)_\nu (k_0 - v_0) + (\alpha)_\nu^2 l_0 + (\alpha)_\nu p^\nu v_\nu = u_0,$$

откуда

$$p^\nu u_\nu + (\alpha)_\nu p^\nu v_\nu = u_0 + (\alpha)_\nu v_0 - (k_0 + (\alpha)_\nu l_0)(\alpha)_\nu;$$

в силу (17)

$$u_0 + (\alpha)_\nu v_0 - (k_0 + (\alpha)_\nu l_0)(\alpha)_\nu = p^\nu t,$$

где t — целое число. Отсюда

$$p^\nu u_\nu + (\alpha)_\nu p^\nu v_\nu = p^\nu t,$$

т. е

$$u_\nu + (\alpha)_\nu v_\nu = t$$

и, следовательно,

$$u_\nu = t - (\alpha)_\nu v_\nu. \tag{23}$$

Если v_ν выбрано произвольным, а числа l_ν, k_ν и u_ν определены по формулам (19), (22) и (23), то эти числа будут удовлетворять уравнению (18), т. е. определять эндоморфизм, принадлежащий к $\mathfrak{M}_\nu$. Этот эндоморфизм не может принадлежать к $\mathfrak{M}_{\nu-1}$, т. е. не может быть одновременно $(l_\nu, p) = (k_\nu, p) = p$. Действительно, допустим, что $l_\nu = l_0$ делится на p и k_ν делится на p, тогда из (22) следует $(k_0 - v_0, p) = p$, а из (21) вытекает $(u_0, p) = p$. Это, однако, противоречит предположению, что коэффициенты уравнения (17) взаимно просты.

§ 8

При тех же предположениях о группе, как и в предыдущем параграфе, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 7. *Пусть g — произвольный элемент группы G, принадлежащий к H_0,*

$$g = s_0 a + t_0 b \quad (a^{(0)} = a).$$

Тогда для любого ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) существует такой эндоморфизм Γ, при котором $\Gamma g \subset H_\nu$, но $\Gamma g \not\subset H_{\nu-1}$.

Пусть α — корень неприводимого уравнения

$$l\alpha^2 + (k - v)\alpha - u = 0.$$

Нужный нам эндоморфизм будем искать среди эндоморфизмов, определяемых матрицами

$$\begin{pmatrix} k_\mu & u_\mu \\ l_\mu & v_\mu \end{pmatrix}$$

при разных μ, для которых $l_\mu = l$ и не может быть одновременно

$$(l, p) = (k_\mu, p) = p.$$

Как это следует из предыдущего, эти эндоморфизмы могут быть определены из соотношений

$$p^\mu u_\mu + (\alpha)_\mu k_\mu = u, \qquad (21')$$

$$k_\mu = k - v + p^\mu v_\mu + (\alpha)_\mu l, \qquad (22')$$

где v_μ можно рассматривать как произвольный целочисленный параметр. В дальнейшем лишь такие эндоморфизмы будут рассматриваться.

Не уменьшая общности, можно считать, что хотя бы один из коэффициентов s_0, t_0 взаимно прост с p. Если бы имело место

$$s_0 = p^\theta s, \quad t_0 = p^\theta t,$$

где хотя бы одно из s, t было взаимно просто с p, то

$$g = p^\theta \bar{g}, \quad \bar{g} = sa + tb.$$

Если бы, далее, наша теорема была доказана для случая, когда хотя бы один из коэффициентов при a и b был взаимно прост с p, то это означало бы, что каково бы ни было ν, существует эндоморфизм Γ, при котором $\Gamma g \subset H_{\nu+\theta}$, но $\Gamma \bar{g} \not\subset H_{\nu+\theta-1}$, но тогда $\Gamma g \subset H_\nu$, но $\Gamma g \not\subset H_{\nu-1}$, т. е. теорема справедлива и для g. Таким образом, мы вправе предполагать, что хотя бы один из коэффициентов s_0, t_0 взаимно прост с p. В соответствии с этим нам придется рассмотреть два случая.

Случай I. $g = p^\theta sa + tb$, $(s, p) = (t, p) = 1$, $\theta > 0$. Пусть Γ — эндоморфизм группы G, определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} k_\mu & u_\mu \\ l_\mu & v_\mu \end{pmatrix}$$

с указанными выше свойствами,

$$\Gamma g = (p^\theta s k_\mu + t l_\mu)\, a^{(\mu)} + (p^\theta s u_\mu + t v_\mu)\, b.$$

Введем, используя (22′), обозначение

$$\bar{A}_\mu = p^\theta s k_\mu + t l_\mu = p^\theta s (k - v) + p^{\theta+\mu} s v_\mu + p^\theta s (\alpha)_\mu l + tl.$$

Принадлежность Γg к той или иной из групп H_ν решает коэффициент $\bar{A}_\mu$ при $a^{(\mu)}$; при этом его слагаемое $p^{\theta+\mu} s v_\mu$ всегда будет давать слагаемое в Γg, принадлежащее к H_0, так как в силу определяющих соотношений

$$p^{\theta+\mu} s v_\mu a^{(\mu)} \subset H_0.$$

Поэтому следует рассмотреть лишь остальные слагаемые в $\bar{A}_\mu$.

Введем обозначение

$$A_\mu = p^\theta s(k-v) + p_\theta s(\alpha)_\mu l + tl.$$

1. Пусть $(l, p^\theta) = p^{\theta-i}$, $i \geqslant 1$. Тогда, для любого μ, $(A_\mu, p^\theta) = p^{\theta-i}$; поэтому, полагая $\mu = \theta - i + \nu$, получаем такой эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_{\theta-i+\nu}$, что

$$\Gamma g \subset H_\nu, \text{ но } \Gamma g \not\subset H_{\nu-1}.$$

2. $l = p^\theta \bar{l}$, $(\bar{l}, p) = 1$. Тогда

$$A_\mu = p^\theta (s(k-v) + s(\alpha)_\mu p^\theta \bar{l} + t\bar{l}) = p^\theta A'_\mu,$$

где

$$A'_\mu = s(k-v) + s(\alpha)_\mu p^\theta \bar{l} + t\bar{l}.$$

Так как

$$A'_\mu = A'_{\mu-1} + p^{\theta+\mu-1} s(\alpha)_\mu \bar{l},$$

то $(A'_\mu, p) = p$ влечет за собой $(A'_{\mu-1}, p) = p$.

2.1. Пусть $(A_1, p) = 1$. Тогда $(A'_\mu, p) = 1$ для любого $\mu = 1, 2, \ldots$ В этом случае, полагая $\mu = \theta + \nu$, получаем такой эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_{\theta+\nu}$, что

$$\Gamma g \subset H_\nu, \text{ но } \Gamma g \not\subset H_{\nu-1}.$$

2.2. Пусть $A'_1 = s(k-v) + s(\alpha)_1 p^\theta \bar{l} = p^\varepsilon \delta_1$; $(\delta_1, p) = 1$, $\varepsilon > 0$.

2.21. $\varepsilon < \theta + 1$. Тогда при любом μ

$$A'_\mu = p^\varepsilon \delta_\mu, \quad (\delta_\mu, p) = 1,$$

так как

$$A'_\mu = A'_1 + [p^{\theta+1}\alpha_2 + p^{\theta+2}\alpha_3 + \ldots + p^{\theta+\mu-1}\alpha_\mu] s\bar{l} =$$
$$= p^\varepsilon \delta_1 + p^{\theta+1} [\alpha_2 + p\alpha_3 + \ldots + p^{\mu-2}\alpha_\mu] s\bar{l};$$

отсюда при любом μ

$$A_\mu = p^{\theta+\varepsilon} \delta_\mu;$$

поэтому, полагая $\mu = \theta + \varepsilon + \nu$, получаем такой эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_{\theta+\varepsilon+\nu}$, что

$$\Gamma g \subset H_\nu, \text{ но } \Gamma g \not\subset H_{\nu-1}.$$

2.22. $\varepsilon \geqslant \theta + 1$, т. е. $A'_1 = s(k-v) + t\bar{l} + s(\alpha)_1 p^\theta \bar{l} = p^{\theta+1}\delta$. Отсюда $s(k-v) + t\bar{l} = p^\theta \bar{\omega}$, причем $(\bar{\omega}, p) = 1$. Теперь

$$A'_1 = p^\theta (\bar{\omega} + s(\alpha)_1 \bar{l}) = p^{\theta+1}\delta,$$

откуда

$$\bar{\omega} + s(\alpha)_1 \bar{l} = p\delta.$$

Существует такое γ, что

$$\bar{\omega} + s(\alpha)_\gamma \bar{l} = p^\varkappa \lambda \quad ((\lambda, p) = 1 \text{ и } \varkappa < \gamma),$$

так как если бы для всякого γ было

$$\bar{\omega} + s(\alpha)_\gamma \bar{l} \equiv 0 \, (p^\gamma),$$

то это противоречило бы квадратичности α над полем рациональных чисел.

Для указанного γ

$$A'_{\gamma} = p^{\theta+\varkappa}\lambda, \quad \varkappa < \gamma.$$

Так как

$$\bar{\omega} + s(\alpha)_{\gamma+\nu} l = \bar{\omega} + s(\alpha)_{\gamma} l + (p^{\gamma} s\alpha_{\gamma+1} + \ldots + p^{\gamma+\nu-1} s\alpha_{\gamma+\nu}) \bar{l}$$

и $\varkappa < \gamma$, то

$$\bar{\omega} + s(\alpha)_{\gamma+\nu} l = p^{\varkappa}\lambda_{\nu}, \quad (\lambda_{\nu}, p) = 1.$$

Поэтому $A_{\gamma} = p^{2\theta+\varkappa}\lambda$ и вообще

$$A_{\gamma+\nu} = p^{2\theta+\varkappa}\lambda_{\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

2.221. Пусть $\gamma \geqslant 2\theta + \varkappa$. Тогда эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_{\gamma}$ отобразит элемент g в $H_{\gamma-(2\theta+\varkappa)}$, а эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_{\gamma+\nu}$ отобразит элемент g в $H_{\gamma-(2\theta+\varkappa)+\nu}$, но не в $H_{\gamma-(2\theta+\varkappa)+\nu-1}$. Чтобы найти эндоморфизм, отображающий g в H_{ν}, но не в $H_{\nu-1}$, надо взять, следовательно, эндоморфизм

$$p^{\gamma-(2\theta+\varkappa)}\Gamma, \quad \Gamma \subset \mathfrak{M}_{\gamma+\nu}.$$

2.222. $\gamma < 2\theta + \varkappa$. Тогда эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_{2\theta+\varkappa}$ таков, что $\Gamma g \subset H_0$, а эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_{2\theta+\varkappa+\nu}$ отображает g в H_{ν}, но не в $H_{\nu-1}$.

3. $l = p^{\rho}\bar{l}$, $(\bar{l}, p) = 1$, $\rho > \theta$. Тогда

$$A_{\mu} = p^{\theta}[s(k-v) + s(\alpha)_{\mu} p^{\rho} l + t p^{\rho-\theta}\bar{l}],$$

т. е. $A_{\mu} = p^{\theta} A'_{\mu}$, где $A'_{\mu} = s(k-v) + s(\alpha)_{\mu} p^{\rho}\bar{l} + t p^{\rho-\theta}\bar{l}$. Для любого $\mu = 1, 2, \ldots$, $(A'_{\mu}, p) = 1$, так как если $(A'_{\mu}, p) = p$, то $(k - v, p) = p$, а тогда в силу формулы (22′) $(k_{\mu} p) = p$, что противоречит нашему выбору эндоморфизмов. Отсюда эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_{\theta+\nu}$ таков, что

$$\Gamma g \subset H_{\nu}, \text{ но } \Gamma g \not\subset H_{\nu-1}.$$

Этим случай I полностью исчерпан.

Случай II. $g = sa + p^{\theta} tb$, $(s, p) = (t, p) = 1$, $\theta \geqslant 0$. Аналогично тому, как в случае I, получаем

$$\Gamma g = (sk_{\mu} + p^{\theta} tl)\, a^{(\mu)} + (su_{\mu} + p^{\theta} tv_{\mu})\, b.$$

Обозначим через $\bar{A}_{\mu}$ коэффициент при $a^{(\mu)}$

$$\bar{A}_{\mu} = sk_{\mu} + p^{\theta} tl = s(k-v)\, p^{\mu} sv_{\mu} + (\alpha)_{\mu} sl + p^{\theta} tl.$$

Подобно тому, как и в случае I, принадлежность Γg к той или иной из групп H_{ν} решается слагаемым $A_{\mu} = s(k-v) + (\alpha)_{\mu} sl + p^{\theta} tl$, так как коэффициент $p^{\mu} sv_{\mu}$ дает слагаемое элемента Γg $p^{\mu} sv_{\mu} a^{(\mu)}$, принадлежащее к H_0 в силу определяющих соотношений.

1. $(l, p) = p$. Тогда $(A_{\mu}, p) = 1$, так как если $(A_{\mu}, p) = p$, то, как это следует из формулы, определяющей A_{μ}, $(k - v, p) = p$, а тогда из (22)

$(k_\mu, p) = p$, что противоречит нашему выбору эндоморфизмов. Эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_\nu$ (из числа нами рассматриваемых) таков, что $\Gamma g \subset H_\nu$, но $\Gamma g \not\subset H_{\nu-1}$.

2. $(l, p) = 1$. Так как

$$A_\mu = A_{\mu-1} + p^{\mu-1} s\alpha_\mu l,$$

то из $(A_\mu, p) = p$, $\mu > 1$, следует

$$(A_{\mu-1}, p) = p.$$

2.1. Пусть $(A_1, p) = 1$. Тогда для любого $\mu = 1, 2, \ldots$ $(A_\mu, p) = 1$ и эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_\nu$ таков, что

$$\Gamma g \subset H_\nu, \text{ но } \Gamma g \not\subset H_{\nu-1}.$$

2.2. Пусть $A_1 = p^\rho \vartheta$, $(\vartheta, p) = 1$, $\rho \geqslant 1$. Тогда существует такое γ, что

$$s(k-v) + s(\alpha)_\gamma l + p^\theta t l = p^\varkappa \varphi,$$

где $(\varphi, p) = 1$, а $\varkappa < \gamma$. Это вытекает из квадратичности α над полем рациональных чисел. Так как

$$A_{\gamma+\nu} = s(k-v) + s(\alpha)_\gamma l + p^\theta t l + p^\gamma s(\alpha_{\gamma+1} + p\alpha_{\gamma+2} + \ldots + p^{\nu-1}\alpha_{\gamma+\nu}) l,$$

то

$$A_{\gamma+\nu} = p^\varkappa \varphi + p^\gamma B = p^\varkappa(\varphi + p^{\gamma-\varkappa} B) = p^\varkappa \varphi_\nu,$$

где

$$B = s(\alpha_{\gamma+1} + p\alpha_{\gamma+2} + \ldots + p^{\nu-1}\alpha_{\gamma+\nu}) l, \quad \varphi_\nu = \varphi + p^{\gamma-\varkappa} B.$$

Так как $\varkappa < \gamma$ и $(\varphi, p) = 1$, то $(\varphi_\nu, p) = 1$. Таким образом,

$$A_{\gamma+\nu} = p^\varkappa \varphi_\nu, \quad (\varphi_\nu, p) = 1.$$

Поэтому эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_\gamma$ отображает g в $H_{\gamma-\varkappa}$, эндоморфизм $\Gamma \subset \mathfrak{M}_{\gamma+\nu}$ отображает g в $H_{\gamma-\varkappa+\nu}$, но не в $H_{\gamma-\varkappa+\nu-1}$, а эндоморфизм $\overline{\Gamma} = p^{\gamma-\varkappa}\Gamma$ $(\Gamma \subset \mathfrak{M}_{\gamma+\nu})$ таков, что

$$\overline{\Gamma} g \subset H_\nu, \text{ но } \overline{\Gamma} g \not\subset H_{\nu-1}.$$

Доказательство теоремы 7 закончено. Укажем одно следствие этой теоремы.

Подгруппа H группы G называется *вполне характеристической*, если она при всех эндоморфизмах группы G отображается в себя, т. е. если $\Gamma H \subseteq H$, где Γ — произвольный эндоморфизм группы G.

Если G — p-примитивная абелева группа без кручения, ранга $n = 2$ и приведенного ранга $r = 1$, неразложимая в прямую сумму, и если кольцо эндоморфизмов группы G нетривиально, то в G не существует вполне характеристических подгрупп ранга 1, а также вполне характеристических подгрупп, являющихся группами линейных форм.

Допустим, что вполне характеристическая подгруппа F группы G является группой линейных форм. Используя старые обозначения, мы можем написать $G = \sum_\nu H_\nu$. Не уменьшая общности, можно считать, что

$F \subset H_0$, так как существует такое ν, что $F \subset H_\nu$, но мы всегда можем соответственно изменить образующие группы G.

Мы показали, однако, что для любого элемента группы H_0 существуют эндоморфизмы, отображающие его в группу H_ν с как угодно большим номером ν, что не совместимо с полной характеристичностью группы F. Отсюда же получается, что в группе G отсутствуют вполне характеристические подгруппы ранга 1 и приведенного ранга 0, т. е. бесконечные циклические. Таким образом, остается показать, что отсутствуют вполне характеристические подгруппы ранга 1 и приведенного ранга 1, т. е. подгруппы типа R_p. Этот же факт следует непосредственно из того, что мы предполагали группу неразложимой в прямую сумму. Как известно ([1]), подгруппа типа R_p является прямым слагаемым для группы G, а поэтому, в силу сделанных о группе G предположений, таких подгрупп она вообще не может иметь.

Заметим, что ввиду того, что при $r=1$ кольцо эндоморфизмов коммутативно, всякая подгруппа группы G, имеющая вид ΓG, где Γ — произвольный эндоморфизм группы G, будет вполне характеристической.

§ 9

ТЕОРЕМА 8. *Пусть G_1 и G_2 — две p-примитивные абелевы группы без кручения, ранга $n=2$ и приведенного ранга $r=1$, неразложимые в прямую сумму, и пусть α_1 и α_2 — p-адические числа, определяющие соответственно группы G_1 и G_2. Если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ соответственно нетривиальные кольца эндоморфизмов этих групп и если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ изоморфны между собой, то $R(\alpha_1)=R(\alpha_2)$, где R — поле рациональных чисел.*

Пусть α_1 и α_2 будут соответственно корни уравнений

$$l_1\alpha_1^2+(k_1-v_1)\alpha_1-u_1=0,$$
$$l_2\alpha_2^2+(k_2-v_2)\alpha_2-u_2=0.$$

Как следует из теоремы 5 § 6, можно считать, что $\mathfrak{M}_1 \subset R(\alpha_1)$ и $\mathfrak{M}_2 \subset R(\alpha_2)$, причем кольцо целых чисел содержится как в $\mathfrak{M}_1$, так и в $\mathfrak{M}_2$. Для всякого элемента $\omega \subset R(\alpha_1)$ (аналогично для $R(\alpha_2)$) существует такое целое число $t \neq 0$, что $t\omega \subset \mathfrak{M}_1$ (соответственно, $\mathfrak{M}_2$). В самом деле, $\omega = q_1+\alpha_1 q_2$ где $q_1, q_2 \subset R$. Пусть f — наименьшее кратное знаменателей чисел q_1 и q_2, тогда $l_1 f\omega \subset \mathfrak{M}_1$. Действительно, $l_1\alpha_1 \subset \mathfrak{M}_1$, как число, определяющее эндоморфизм, который задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ l_1 & v_1-k_1 \end{pmatrix},$$

поэтому $l_1 f q_2\alpha_1 \subset \mathfrak{M}_1$. С другой стороны, $l_1 f q_1 \subset \mathfrak{M}_1$, так как определяет тривиальный эндоморфизм; следовательно, $l_1 f\omega \subset \mathfrak{M}_1$.

Теперь мы можем показать, что

$$R(\alpha_1) \cong R(\alpha_2).$$

Действительно, нам дано, что $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$. Пусть $a_1 \subset R(\alpha_1)$; тогда, как только что было показано, существует такое целое m_1, что $m_1 a_1 \subset \mathfrak{M}_1$. В силу изоморфизма между $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, элементу $m_1 a_1$ соответствует некоторый элемент $b_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Тогда на $R(\alpha_1)$ определим отображение φ

$$\varphi(a_1) = \frac{b_1}{m_1}, \quad \frac{b_1}{m_1} \subset R(\alpha_2).$$

Отображение φ взаимно однозначно. Прежде всего покажем, что оно однозначно. Пусть a_1 будет произвольный элемент из $R(\alpha_1)$ и пусть $m_1 a_1 \subset \mathfrak{M}_1$, причем m_1 — наименьшее целое число с этим свойством. Тогда по определению φ, если

$$m_1 a_1 \leftrightarrow b_1 \subset \mathfrak{M}_2,$$

то

$$\varphi(a_1) = \frac{b_1}{m_1}.$$

С другой стороны, пусть $q m_1 a_1 \subset \mathfrak{M}_1$, где q — произвольное целое число. Если

$$q m_1 a_1 \leftrightarrow b \subset \mathfrak{M}_2,$$

то, опять по определению φ,

$$\varphi(a_1) = \frac{b}{q m_1}.$$

Но так как $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ и $m_1 a_1 \leftrightarrow b_1$, то $q m_1 a_1 \leftrightarrow q b_1$, следовательно, $b = q b_1$, а поэтому

$$\varphi(a_1) = \frac{b}{q m_1} = \frac{q b_1}{q m_1} = \frac{b_1}{m_1}.$$

Этим однозначность φ доказана.

Предположим теперь, что $a_1 \subset R(\alpha_1)$ и $a_2 \subset R(\alpha_1)$ таковы, что $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Пусть $m_1 a_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $m_2 a_2 \subset \mathfrak{M}_1$ и пусть $m_1 a_1 \leftrightarrow b_1$; $m_2 a_2 \leftrightarrow b_2$. Тогда $\varphi(a_1) = \frac{b_1}{m_1}$, $\varphi(a_2) = \frac{b_2}{m_2}$, а так как по условию $\frac{b_1}{m_1} = \frac{b_2}{m_2}$, то $m_2 b_1 = m_1 b_2$. Из $m_2 a_2 \leftrightarrow b_2$ следует $m_1 m_2 a_2 \leftrightarrow m_1 b_2$, из $m_1 a_1 \leftrightarrow b_1$ следует $m_2 m_1 a_1 \leftrightarrow m_2 b_1$, а так как $m_2 b_1 = m_1 b_2$, то $m_2 m_1 a_1 = m_1 m_2 a_2$, откуда $a_1 = a_2$. Таким образом, отображение φ взаимно однозначное.

Покажем, что это есть отображение на все поле $R(\alpha_2)$. Действительно, пусть b — произвольный элемент из $R(\alpha_2)$, тогда существует такое m, что $mb \subset \mathfrak{M}_2$, но в этом случае, если при изоморфизме $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ элементу mb соответствует некоторый элемент a, то по определению φ

$$\varphi\left(\frac{a}{m}\right) = b, \text{ где } \frac{a}{m} \subset R(\alpha_1).$$

Таким образом, φ есть взаимно однозначное отображение поля $R(\alpha_1')$ на поле $R(\alpha_2)$, причем поле R остается на месте.

Остается доказать, что φ есть изоморфное отображение. Пусть даны элементы a_1 и a_2 из поля $R(\alpha_1)$, причем $m_1a_1 \subset \mathfrak{M}_1$, $m_2a_2 \subset \mathfrak{M}_1$; тогда

$$\varphi(\alpha_1) = \frac{b_1}{m_1}, \quad \varphi(a_2) = \frac{b_2}{m_2},$$

где b_1 и b_2 принадлежат $\mathfrak{M}_2$, причем $m_1a_1 \longleftrightarrow b_1$, $m_2a_2 \longleftrightarrow b_2$. Возьмем элемент $a_1 + a_2$. Так как

$$m_1m_2(a_1 + a_2) \subset \mathfrak{M}_1$$

и

$$m_1m_2(a_1 + a_2) = m_2m_1a_1 + m_1m_2a_2 \longleftrightarrow m_2b_1 + m_1b_2,$$

то

$$\varphi(a_1 + a_2) = \frac{b_1}{m_1} + \frac{b_2}{m_2} = \varphi(a_1) + \varphi(a_2),$$

т. е. сумме элементов из $R(\alpha_1)$ соответствует сумма образов в $R(\alpha_2)$.

Аналогично для тех же элементов a_1 и a_2 будет

$$m_1m_2a_1a_2 \subset \mathfrak{M}_1, \text{ но } m_1m_2a_1a_2 = m_1a_1m_2a_2 \longleftrightarrow b_1b_2;$$

поэтому

$$\varphi(a_1 \cdot a_2) = \frac{b_1 \cdot b_2}{m_1 \cdot m_2} = \varphi(a_1)\varphi(a_2),$$

т. е. произведению элементов соответствует произведение образов.

Таким образом, мы показали что φ — изоморфное отображение $R(\alpha_1)$ на $R(\alpha_2)$, при котором поле R остается на месте, т. е. поля $R(\alpha_1)$ и $R(\alpha_2)$ эквивалентны над R, а так как это — квадратичные расширения поля R, то они просто совпадают, т. е. $R(\alpha_1) = R(\alpha_2)$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать в случае $n = 3$, $r = 1$, что если матрица (α_1, α_2) задает группу G_1, а матрица (β_1, β_2) — группу G_2 и $\mathfrak{M}_1 \cong \mathfrak{M}_2$ и нетривиальны, а группы G_1 и G_2 неразложимы в прямую сумму, то $R(\alpha_1, \alpha_2)$ эквивалентно $R(\beta_1, \beta_2)$ над полем R.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
22.XII.1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kurosch A., Primitive torsionsfreie Abelschen Gruppen vom endlichen Range, Annals of Mathematics, 38 (1937), 175—203.

[2] Мальцев А., Абелевы группы конечного ранга без кручения, Матем. сб., 4 (46) (1938), 45—68.

[3] Derry D., Über eine Klasse von Abelschen Gruppen, Proc. London Math. Soc., 43 (1937), 490—506.

[4] Курош А., Теория групп, М.—Л., 1944.

Z. KISHKINA. ENDOMORPHISMS OF p-PRIMITIVE ABELIAN GROUPS WITHOUT TORSION

SUMMARY

This paper is devoted to the investigation of endomorphisms of p-primitive abelian groups without torsion of finite rank [as to definitions, see A. Kurosh ([1])].

In § 2 the rings of endomorphisms of groups of rank 1 are described, as well as finite direct sums of such groups (Theorems 1 and 2).

In §§ 3—6 we describe the ring of endomorphisms of a p-primitive abelian group G without torsion of finite rank n and of reduced rank r determined by a p-adic matrix A.

THEOREM 3. *The ring of endomorphisms of a p-primitive abelian group G without torsion of rank n and of reduced rank r determined by a p-adic matrix* $A=(\alpha_{ij})$ $(i=1,2,\ldots,r;\ j=1,2,\ldots,s;\ r+s=n)$ *is isomorphic to a ring of matrices of order n* $T=\begin{pmatrix} M & R \\ F & Q \end{pmatrix}$ *over the ring* R_p *of rational number whose denominators are powers of the prime p. Here M is a square matrix of order r, R is a rectangle matrix with r rows and is columns, F is a rectangle matrix with s rows and r columns, Q is a square matrix of order s. These matrices satisfy the following conditions:*

1. $R+AQ-(M+AF)A=0$.

2. *There exists an integer* $\nu \geqslant 0$ *such that the matrices* $p^{\nu}M$, $p^{\nu}F$, $Q-FA_{\nu}$ *are integral, where* A_{ν} *is the matrix composed by the* ν*th segments of the elements* α_{ij} *of the matrix A.*

THEOREM 4. *The ring of endomorphisms of a p-primitive abelian group G without torsion of finite rank n and of reduced rank r determined by a p-adic matrix* $A=(\alpha_{ij})$ *is trivial, if and only if every relation*

$$U+AV-(K+AL)A=0,$$

where U, V, K, L are integral matrices, for which the relation has sense, implies

$$U=0,\quad L=0,\ V=mE_s,\quad K=mE_r,$$

where m is an integer, E_s and E_r are unit matrices of order s and r respectively.

By the trivial ring of endomorphisms we mean the ring consisting only of endomorphisms of the form: $g \to mg$, where g is an element of G and m is an integer chosen arbitrarily, but fixed for every endomorphism.

Corollary. *The ring of endomorphisms of a p-primitive abelian group G without torsion of rank 2 and of reduced rank 1, which cannot be decomposed into a direct sum, is non-trivial, if and only if the integral p-adic number α determining the group G is quadratic over the field R of rational numbers, i. e. if the field $R(\alpha)$ is of the second degree with respect to R.*

THEOREM 5. *Let G be a p-primitive abelian group without torsion of rank n and of reduced rank r, which contains no infinite cyclic group as its direct summand. If G is determined by an integral p-adic matrix $A = (\alpha_{ij})$, then the ring of endomorphisms of G is isomorphic to a subring of the complete ring of matrices of order r over the field $R(\alpha_{ij})$, where $R(\alpha_{ij})$ is the extension of the field of rational numbers by the p-adi numbers α_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, s)$.*

Corollary. *The ring of endomorphisms of a p-primitive abelian group G without torsion of rank n and of reduced rank $r = 1$ which contains no infinite cyclic group as its direct summand, is commutative.*

This corollary contains, as a particular case, a result due to Derry concerning the group of automorphisms of a group G of rank $n = 2$ and of reduced rank $r = 1$ that is not decomposable into a direct sum.

In §§ 7—9 we give a more detailed discussion of endomorphisms of p-primitive abelian groups of rank 2 and of reduced rank 1.

If G is a p-primitive abelian group without torsion of rank $n = 2$ and of reduced rank 1, then, in the notations of the paper (¹), $G = \sum_{\nu} H_{\nu}$, where $H_0 = [a^{(0)}, b]$ and $p^{\nu} H_{\nu} \subset H_0$.

THEOREM 6. *Let G be a p-primitive abelian group without torsion of rank 2 and of reduced rank 1, which cannot be decomposed into a direct sum. Let, further, $\mathfrak{M}$ be the (non-trivial) ring of endomorphisms of G. If the group G possesses a non-trivial endomorphism Γ such that $\Gamma a^{(0)} \subset H_0$ and $\Gamma b \subset H_0$, then, for every integer $\nu \geqslant 1$, there exists a non-trivial endomorphism $\Gamma^{(\nu)}$ such that $\Gamma^{(\nu)} a^{(0)}$, $\Gamma^{(\nu)} b \subset H_{\nu}$, while at least one of the elements $\Gamma^{(\nu)} a^{(0)}$, $\Gamma^{(\nu)} b$ does not belong to $H_{\nu-1}$.*

Using this theorem, we can prove

THEOREM 7. *Suppose that G satisfies all the conditions of the preceding theorem. If g is an element of G belonging to H_0, then, for any $\nu = 1, 2, \ldots$, there exists an endomorphism $\Gamma^{(\nu)}$ such that $\Gamma^{(\nu)} g \subset H_{\nu}$, but $\Gamma^{(\nu)} g \not\subset H_{\nu-1}$.*

Hence we obtain under the same conditions imposed on G:

If the ring of endomorphisms of G is non-trivial, then G has no completely characteristic subgroups of rank 1, as well as completely characteristic subgroups that are groups of linear forms.

THEOREM 8. *Let* G_1 *and* G_2 *be p-primitive abelian groups without torsion of rank 2 and of reduced rank 1, which cannot be decomposed into a direct sum. Let, further,* α_1 *and* α_2 *be p-adic numbers that determine* G_1 *and* G_2*, respectively. If the non-trivial rings of endomorphisms* $\mathfrak{M}_1$ *and* $\mathfrak{M}_2$ *of the groups* G_1 *and* G_2 *are isomorphic, then* $R(\alpha_1) = R(\alpha_2)$*, where R is the field of rational numbers.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 233—240 Série mathématique

Ю. К. СОЛНЦЕВ

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе изучается множество ω- или α-предельных точек интегральной кривой динамической системы на плоскости и способ приближения ее к этому множеству.

В своем классическом мемуаре (¹) И. Бендиксон исследовал предельное поведение интегральной кривой системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y) \tag{1}$$

для того случая, когда среди ее ω- или α-предельных точек имелось не более, чем конечное число особых точек. В настоящей работе мы разбираем общий случай.

Пусть $L=f(Q, t)$ — интегральная кривая системы (1), остающаяся для $t>0$ (соответственно, для $t<0$) в ограниченной части плоскости, и пусть $E_\omega(L)$ — множество ее ω-предельных точек — это ограниченное, связное, замкнутое множество без внутренних точек. Множество $E_\omega(L)$ распадается естественным образом на два подмножества Ω_s и Ω_h. Множество Ω_s состоит из всех особых точек, принадлежащих $E_\omega(L)$, — это очевидно замкнутое множество. Нас в дальнейшем будут интересовать компоненты C_s множества Ω_s, которые мы будем называть «особыми компонентами»; множество Ω_h состоит из всех обыкновенных точек, принадлежащих $E_\omega(L)$. Наша задача — ближе охарактеризовать множества Ω_s и Ω_h, а также способ приближения L к $E_\omega(L)$.

Определение 1. Скажем, что интегральная кривая L *примыкает* при $t \to +\infty$ (соответственно, при $t \to -\infty$) к особой компоненте C_s, если множество ее ω- (соответственно, α-) предельных точек принадлежит C_s.

Определение 2. Скажем, что интегральная кривая $L=f(Q, t)$ *спиралевидно приближается* к интегральной кривой Λ, если, какова бы

---

* Пользуюсь случаем выразить благодарность проф. Немыцкому за постоянное наблюдение над моей работой (*автор*).

ни была точка $P \in \Delta$ и достаточно малый кусок нормали R_1PR_2 к Δ в точке P, кривая $f(Q, t)$, начиная с некоторого $t > t_0$, имеет бесчисленное множество точек пересечения с R_1PR_2, причем либо все эти точки пересечения лежат на R_1P, либо все они лежат на PR_2.

ТЕОРЕМА 1. *Множество обыкновенных точек $\Omega_h \subseteq E_\omega(L)$ либо заполняет все $E_\omega(L)$ — в этом случае $E_\omega(L)$ есть простая замкнутая линия, либо заполняет не более, чем счетное множество интегральных кривых, каждая из которых обоими своими концами примыкает к особым компонентам. Кривая L при этом спиралевидно приближается к каждой из этих кривых.*

Пусть $R \in \Omega_h$, $R \bar{\in} L$; через эту точку проходит некоторая интегральная кривая $f(R, t)$, и пусть $E_\omega f(R, t)$ — множество ее ω-предельных точек; $E_\omega f(R, t) \subseteq E_\omega(L)$. Рассуждением, совершенно аналогичным рассуждению Бендиксона, легко показать, что при $E_\omega f(R, t)$, не совпадающем с $f(R, t)$, $E_\omega f(R, t)$ не может содержать обыкновенных точек, а следовательно, $E_\omega f(R, t)$, как замкнутое и связное множество, принадлежит к одной компоненте C_s. Аналогичное рассуждение пригодно и для множества α-предельных точек интегральной кривой $f(R, t)$.

Покажем теперь, что L спиралевидно приближается к $f(R, t)$. В самом деле, пусть $P \in f(R, t)$ и NPN' — достаточно короткий кусок нормали. Пусть Q' и Q'' — два последовательных пересечения L с этим куском нормали; обе эти точки обязательно лежат либо на NP, либо на PN'. В самом деле, Q' и Q'' лежат по одну сторону от $P \in f(R, t)$, так как в противном случае интегральная кривая L одним своим концом входила бы в замкнутую область, ограниченную куском нормали $Q'Q''$ и дугой кривой L между точками Q' и Q'', и, следовательно, P не могла бы быть ω-предельной точкой для L. Наконец, легко показать, что точка Q'', соответствующая большему значению параметра, будет ближе к P, чем точка Q'. Отсюда вытекает, что различных интегральных кривых, содержащихся в Ω_h, не более, чем счетное множество. В самом деле, пусть $f_\alpha(P, t)$ — одна из таких кривых. Возьмем на ней две точки P_1^α и P_2^α и столь малые куски нормалей $N_1P_1^\alpha N_1'$ и $N_2P_2^\alpha N_2'$, чтобы в области G_α, ограниченной этими кусками, дугой кривой L: N_1N_2 и некоторой кривой $N_1'N_2'$, не содержалось никаких точек Ω_h, кроме дуги $P_1^\alpha P_2^\alpha$. Подобную область мы можем найти, так как L спиралевидно приближается к $f_\alpha(P, t)$ и, следовательно, на $N_1P_1^\alpha$ и $N_2P_2^\alpha$ точки L образуют счетные последовательности, имеющие своими предельными точками лишь точки P_1^α и P_2^α, а отрезки нормалей $N_1'P_1^\alpha$ и $N_2'P_2^\alpha$ вовсе не пересекаются с L. Обозначим через S_α круг с центром в некоторой внутренней точке дуги $P_1^\alpha P_2^\alpha$ и целиком погруженный в область G_α. Тогда S_α для различных α не пересекаются, а следовательно, подобных кругов не более, чем счетное множество, т. е. и различных $f_\alpha(P, t)$ также не более, чем счетное множество.

Пусть изменение параметра τ от 0 до 1 соответствует обходу некоторой окружности в положительном направлении.

Определение 3. Пусть E — произвольное замкнутое и связное множество на плоскости; скажем, что $f(\tau)$ есть его *циклическое от-*

ображение, если каждой точке окружности, т. е. каждому значению τ из $0 \leqslant \tau < 1$, соответствует замкнутое и связное подмножество $f(\tau)$ из E, причем из условия: последовательность точек τ_n сходится к точке τ — следует, что $\mathrm{lt}\, f(\tau_n) \subseteq f(\tau)$.

ТЕОРЕМА 2. *Множество $E_\omega(L)$ имеет циклическое отображение, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1°. *$f(\tau)$ есть либо обыкновенная точка, либо особая компонента.*

2°. *Множество значений τ (точек на круге), которым соответствуют особые компоненты, есть нигде не плотное замкнутое множество.*

3°. *$f(\tau)$ — взаимно однозначное и непрерывное отображение, если τ таково, что $f(\tau) \in \Omega_h$.*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\tau_1 < \tau_2$ и пусть U_{τ_1} и U_{τ_2} — две произвольные непересекающиеся окрестности $f(\tau_1)$ и $f(\tau_2)$; тогда существует такое T, зависящее лишь от выбора U_{τ_1} и U_{τ_2}, что для $t > T$ кривая L поочередно посещает U_{τ_1} и U_{τ_2}, т. е. после того как L покидает U_{τ_1} и перед следующим посещением U_{τ_1}, она должна посетить U_{τ_2}.*

Теоремы 2 и 3 представляют собой непосредственное обобщение теоремы Бендиксона о спиралевидном приближении интегральной кривой к некоторому полициклу.

Доказывать обе эти теоремы мы будем одновременно. Прежде всего множество $E_\omega(L)$ представим в виде суммы

$$E_\omega(L) = \Omega_s + K_1 + K_2 + \ldots + K_n + \ldots,$$

где K_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ — интегральные дуги, входящие в $E_\omega(L)$; по теореме 1 их счетное число. Рассмотрим теперь окружность радиуса $\frac{1}{2\pi}$, выберем на ней начальную точку 0 и за параметр примем длину дуги.

Поставим K_1 в соответствие интервал $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, причем ясно, что это соответствие мы можем сделать взаимно однозначным и взаимно непрерывным так, что движению от 0 к $\frac{1}{4}$ соответствует движение по K_1 в положительную сторону, т. е. в сторону возрастания параметра t на K_1. Точно так же поставим в соответствие K_2 интервал $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. На каждой K_n выберем определенную точку P_n и проведем в P_n малый участок $N_n N'_*$ нормали к K_n. N_n возьмем в ту сторону от P_n, чтобы L пересекала $P_n N_n$, а не $N'_* P_n$ (теорема 1).

Пусть $Q_1^*, Q_2^*, \ldots, Q_m^*, \ldots$ — последовательные точки пересечения интегральной кривой L с нормалью $P_n N_n$, $t_1^* < t_2^* < \ldots < t_m^* < \ldots$ — соответствующие им значения параметра на L.

Выберем $\bar{Q}_1^1$ на $P_1 N_1$.

Выберем Q_1^2 так, чтобы $t_1^2 > \bar{t}_1^1$ и t_1^2 было наименьшим из удовлетворяющих этому условию. Теперь за Q_1^1 возьмем ту точку, для которой $t_1^1 < t_1^2$ и t_1^1 — наибольшее из удовлетворяющих этому условию. Этим выбором Q_1^1 и Q_1^2 мы определили последовательности

$$Q_1^1,\ Q_2^1, \ldots, Q_m^1, \ldots \tag{2}$$

$$Q_1^2,\ Q_2^2, \ldots, Q_m^2, \ldots \tag{3}$$

После того как L прошла через Q_1^1, она пройдет Q_1^2 прежде, чем любую другую точку последовательностей (2) и (3). Затем она должна пройти или Q_2^1 или Q_2^2.

Пусть A_m^* — область, ограниченная $L(Q_m^*, Q_{m+1}^*)$ и отрезком $Q_m^* Q_{m+1}^*$. L после Q_1^2 пройдет через Q_2^1, иначе

$$\text{или } L(t > t_2^2) \subset A_1^2 \quad \text{и} \quad P_1 \not\subset A_1^2,$$
$$\text{или } L(t > t_2^2) \not\subset A_1^2 \quad \text{и} \quad P_1 \subset A_1^2,$$

что невозможно.

Итак, $t_1^1 < t_1^2 < t_2^1$. Но теперь легко видеть, что Q_1^2 и Q_2^1 играют роль Q_1^1 и Q_1^2, т. е. $t_1^2 < t_2^1 < t_2^2$.

Очевидно, что мы получили

$$\begin{gathered} t_1^1 < t_1^2 < \\ < t_2^1 < t_2^2 < \\ < t_3^1 < t_3^2 < \\ \cdots\cdots \\ < t_m^1 < t_m^2 < \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

Это показывает правильную цикличность L в окрестностях точек P_1 и P_2.

Пусть, далее, P_1' — другая точка на K_1, $t(P_1') > t(P_1)$. Взяв Q_m^1 столь близко к P_1, чтобы R_1^1 — первая точка пересечения $L(t > t_m^1)$ с нормалью в P_1' к K_1 лежала также достаточно близко к P_1', устанавливаем, что

$$t_m^1 < t(R_1^1) < t_m^2 < t_{m+1}^1 < t(R_2^1) < t_{m+1}^2 < \ldots$$

Мы видим, что L циклична вблизи K_1 и K_2.

Отсюда же видна правильность установленного соответствия между K_1 и K_2 и параметром $\bar\tau$ на окружности. Порядку точек на окружности $\bar\tau$ соответствует естественный порядок точек K_1 и K_2 по отношению к L, а именно: мы скажем, что $\alpha \prec \beta$, $\alpha \in \Omega_h$, $\beta \in \Omega_h$, если, начиная с некоторого $m = M$, $L(Q_m^1, Q_{m+1}^1)$ пересекает сначала малую окрестность (нормаль) точки α, а потом β. На окружности τ это дает $\tau_\alpha < \tau_\beta$. Обратно, из $\tau_\alpha < \tau_\beta$ следует $\alpha \prec \beta$. Здесь $\tau_\alpha = \bar\tau(\alpha) - \tau(P_1)$.

Обратимся теперь к характеристике K_3. Пусть m_3 — наименьшее из чисел m, для которых $L(Q_m^1, Q_{m+1}^1)$ пересекает малую нормаль P_3N_3.

$$L(Q_{m_3}^1, Q_{m_3+1}^1) = L(Q_{m_3}^1, Q_{m_3}^2) + L(Q_{m_3}^2, Q_{m_3+1}^1)$$

пересечет P_3N_3 в точке $Q_{m_3}^3$, лежащей либо между $Q_{m_3}^1$ и $Q_{m_3}^2$, либо между $Q_{m_3}^2$ и $Q_{m_3+1}^1$. Следующие точки $Q_{m_3+p}^3$ пересечения L с N_3Q_3 будут в первом случае расположены так:

$$t_{m_3+p}^1 < t_{m_3+p}^3 < t_{m_3+p}^2$$

во втором:

$$t_{m_3+p}^2 < t_{m_3+p}^3 < t_{m_3+p+1}^1.$$

Это следует из того, что $\{K_3, K_2\}$ и $\{K_1, K_3\}$ имеют те же свойства, что и $\{K_1, K_2\}$.

Действительно, если L прошла окрестность P_1, потом P_2 и, наконец, P_3, то она должна пройти снова окрестность P_1, а затем уже P_2, так как $P_1 \prec P_2$.

Итак мы имеем:

$$\text{или } P_1 \dashv P_3 \dashv P_2,$$
$$\text{или } P_1 \dashv P_2 \dashv P_3.$$

А тогда, как мы видели, и для любых

$$P'_1 \in K_1, \ P'_2 \in K_2, \ P'_3 \in K_3$$

имеем соответственно

$$\text{или } P'_1 \dashv P'_3 \dashv P'_2,$$
$$\text{или } P'_1 \dashv P'_2 \dashv P'_3,$$

т. е.

$$K_1 \dashv K_3 \dashv K_2,$$

или

$$K_1 \dashv K_2 \dashv K_3.$$

Устанавливаем соответствие между K_3 и интервалом на окружности так, чтобы сохранить порядок—в первом случае:

$$K_3 \rightleftarrows \left(\frac{4}{4\cdot 3}, \frac{5}{4\cdot 3}\right) = (\bar{\tau}_3, \bar{\tau}'_3),$$

во втором:

$$K_3 \rightleftarrows \left(\frac{10}{4\cdot 3}, \frac{11}{4\cdot 3}\right) = (\tau_3, \bar{\tau}'_3).$$

Ясно, что из $\tau_\alpha < \tau_\beta$ следует $\alpha \dashv \beta$ и обратно.

Замечание. Если мы с самого начала поменяли бы ролями K_1 и K_2, то легко видеть, что порядок расположения K_1, K_2, K_3 сохранится, если будем считать его по окружности, —т. е., например, $K_1 - K_3 - K_2$ и $K_2 - K_1 - K_3$ считать одним и тем же расположением, — это и необходимо так сделать, если заметить, что K_1 и K_2 равноправны и что L возвращается периодически в окрестность любой точки из Ω_h.

Далее мы устанавливаем место K_4 в нашей цепи. Пусть, например, $K_1 \dashv K_2 \dashv K_3$, тогда возможны три случая:

$$K_1 \dashv K_4 \dashv K_2 \dashv K_3,$$
$$K_1 \dashv K_2 \dashv K_4 \dashv K_3,$$
$$K_1 \dashv K_2 \dashv K_3 \dashv K_4.$$

Соответственно каждому случаю устанавливаем наше соответствие между $\{K\}$ и точками на окружности. А именно, K_4 соответствует среднему из трех равных интервалов, лежащих на сегменте, ограниченном теми двумя из интервалов, соответствующих K_1, K_2, K_3, между которыми вставлено K_4; назовем его (τ_4, τ'_4).

Поступая таким образом с K_5, K_6, ..., мы установим наше искомое упорядочение множества Ω_h.

Действительно, если $\alpha \dashv \beta$ и $\alpha, \beta \in K_p$, то $\tau_\alpha < \tau_\beta$ в силу самого установления соответствия $K_p \rightleftarrows (\tau_p, \tau'_p)$; если же $\alpha \in K_p$, $\beta \in K_q$, то $K_p \dashv K_q$, а потому $\tau_\alpha < \tau_\beta$.

Очевидно и обратное: если $\tau_\alpha < \tau_\beta$, то $\alpha \dashv \beta$ в установленном нами смысле предшествования.

Рассмотрим множество точек на окружности τ, которые не соответствуют точкам множества Ω_h. Это множество F замкнуто, так как смежными к нему интервалами являются (τ_n, τ'_n), $n=1, 2, \ldots$, соответствующие характеристикам K_n.

K_n примыкает к компонентам C_n^+ и C_n^- (теорема 1).

Пусть F содержит сегмент $[\tau'_p, \tau_q]$, т. е. K_p непосредственно предшествует K_q. Тогда $C_p^+ = C_q^-$. Действительно, пусть $P_p \in K_p$, $P_q \in K_q$; $P_p \dashv P_q$. Из предыдущего следует, что неособыми предельными точками для участков $L(Q_1^p, Q_1^q), L(Q_2^p, Q_2^q), \ldots, L(Q_m^p, Q_m^q), \ldots$ могут служить только точки $K_p(t \geqslant t(P_p))$, $K_q(t \leqslant t(P_q))$. Но множество всех предельных точек для этих участков связно, т. е. $C_p^+ = C_q^-$, иначе оно разбивалось бы на

$$K_p(t \geqslant t(P_p)) + C_p^+, \quad C_q^- + K_q(t \leqslant t(P_q))$$

и особые компоненты $C_\alpha, C_\beta, \ldots$

Раздвинем интервалы (τ_p, τ'_p) и (τ_q, τ'_q) так, чтобы $\tau'_p = \tau_q$,—тогда свойства нашего соответствия, конечно, сохраняются.

Произведем эту операцию со всеми сегментами F. Тогда F станет замкнутым и нигде не плотным множеством. Причем всякой изолированной точке его, т. е. общему концу двух интервалов

$$(\tau_p, \tau'_p), \quad (\tau_q, \tau'_q), \quad \tau'_p = \tau_q,$$

соответствует особая компонента $C_p^+ = C_p^-$, к которой примыкают K_p и K_q, причем ясно, что K_q есть продолжение K_p через C_p^+.

Теперь поставим в соответствие компонентам C_n^+, C_n^- концы τ'_n, τ_n соответствующего K_n интервала. Соответствие $\tau_n \to C_n$ однозначно; обратное же, вообще говоря, неоднозначно, так как может быть $C_i = C_j$ при $i \neq j$.

Очевидно, что C_n упорядочены теперь в том же смысле, что и обыкновенные точки, а именно, если $\tau_{n_1} < \tau_{n_2}$ и соответствующие $C_{n_1}^-$ и C_{n_2} различны, то, взяв непересекающиеся окрестности $U(C_{n_1})$ и $U(C_{n_2})$, будем иметь, что, начиная с $m=M$, $L(Q_m^1, Q_{m+1}^1)$ заходит сначала в $U(C_{n_1})$, потом в $U(C_{n_2})$.

Для доказательства достаточно заметить, что $K_{n_1}^- \dashv K_{n_2}$ и что $K_{n_1}^-$ примыкает к C_{n_1}, $K_{n_2}^-$ примыкает к C_{n_2}. Если же $C_{n_1} = C_{n_2}$, то $L(Q_m^1, Q_{m+1}^1)$ заходит сначала в $U(C_{n_1}) \cdot U(P'_{n_1})$, потом в $U(C_{n_1}) \cdot U(P'_{n_2})$, где P'_{n_1}, P'_{n_2} — произвольные точки K_{n_1} и K_{n_2}, сколь угодно близкие к C_{n_1}, а $U(P'_{n_1})$, $U(P'_{n_2})$ — достаточно малые непересекающиеся окрестности этих точек.

На окружности τ осталось множество F' точек второго рода множества F, точкам которого ничего пока не соответствует, каждая его точка есть предел правых и левых концов интервалов (τ_p, τ'_p).

Пусть τ_0—точка F':

$$\tau_0 = \lim_{m\to\infty} \tau'_{n_m}, \quad \tau'_{n_1} < \tau'_{n_2} < \ldots < \tau_0;$$

$$\tau_0 = \lim_{m\to\infty} \tau_{s_m}, \quad \tau_{s_1} > \tau_{s_2} > \ldots > \tau_0.$$

Тогда соответствующие компоненты C_{n_m} и C_{s_m} сходятся к одному и тому же связному подмножеству C_σ' особой компоненты C_σ.

Действительно, если бы имелись две таких предельных компоненты C_1 и C_2, то, отделив их непересекающимися окрестностями, замечаем, что имелась бы характеристика K_r, такая, что

$$K_{n_m} \dashv K_r \dashv K_{s_m} \quad \text{для всех} \quad m = 1, 2, \ldots,$$

т. е.

$$\tau'_{n_m} < \tau_r < \tau'_r < \tau_{s_m}, \quad \tau'_r - \tau_r > 0,$$

что невозможно.

Поставим в соответствие точке τ_σ компоненту C_σ; этим опять сохраняется порядок, установленный прежде, и упорядочиваются все C_σ в нашем смысле порядка—именно, какова бы ни была другая точка или компонента с параметром $\tau_* < \tau_\sigma$, начиная с $m = M$, $L(Q^1_m, Q^1_{m+1})$ заходит сначала в $U(\alpha)$, потом в $U(C_\sigma)$, где $U(\alpha)$, $U(C_\sigma)$—непересекающиеся, достаточно малые окрестности α и C_σ.

Легко видеть, что мы исчерпали множество $E_\omega(L)$. Действительно, точки характеристик $K_1, \ldots, K_n, \ldots$, получили параметр, все C также, ибо если $C \in \Omega_s$, то или имеется K, примыкающая к C, или C—предельная для таковых.

Итак, каждому τ_α на окружности соответствует неособая точка или особая компонента $\alpha = f(\tau_\alpha)$. Очевидно, что установленное соответствие обладает всеми требуемыми в теоремах 2 и 3 свойствами.

Если α — неособая точка, то $f(\tau_\alpha)$ непрерывна и взаимно однозначна. Если $f(\tau)$ — особая компонента, то $f(\tau)$ непрерывна в следующем смысле:

$$\operatorname*{lt}_{\tau_n \to \tau} f(\tau_n) \subseteq f(\tau).$$

Это ясно из того, что или $f(\tau) = C_k$, или $f(\tau)$ содержит предел таких компонент.

Установленное соответствие дает естественный порядок в $E_\omega(L)$. Если $\tau_\alpha < \tau_\beta$ то $\alpha \dashv \beta$, где $\alpha \dashv \beta$ означает, что, начиная с достаточно большого $m = M$, $L(Q^1_m, Q^1_{m+1})$ заходит сначала в достаточно малую окрестность α, потом в достаточно малую окрестность β, возвращаясь в Q^1_{m+1}, в окрестность P_1, после чего опять L заходит сначала в окрестность α и т. д.

Тем самым теоремы 2 и 3 доказаны.

Поступило
24. VIII. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bendixson Ivar, Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta math., 24 (1901), 1—88.

G. SOLNTZEV. ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF INTEGRAL CURVES OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

1. Bendixson studied [1] the asymptotic behaviour of an integral curve $L = f(Q, t)$ of the system of differential equations

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

for the case, where there is only a finite number of singular points among its ω- or α-limit points. The general case is considered in this paper.

Let $L = f(Q, t > 0)$ remain in a bounded domain of the plane. The set of ω-limit points $E_\omega(L) = \Omega_s + \Omega_h$ of this curve is a continuum without inner points. Here Ω_s is the set of singular points belonging to $E_\omega(L)$, the components C_s of which will be called «singular components», Ω_h is the set of all regular points in $E_\omega(L)$.

Definition 1. We say that the integral curve L *adjoins* the singular component C_s as $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), if the set $E_\omega(L)$ (resp. $E_\alpha(L)$) is contained in C_s.

Definition 2. We say that $L = f(Q, t)$ *tends spiralwise* to an integral curve Λ if, for any point $P \in \Lambda$ and a sufficiently small segment of the normal R_1PR_2 to Λ at P, the curve L intersects R_1PR_2 at an infinity of points for $t > t_0$, so that all these points belong either to R_1P or to PR_2.

THEOREM 1. *The set Ω_h fills up either the whole $E_\omega(L)$ or a set of integral curves K_n, at most denumerable, everyone of which adjoins singular components in both directions. In the first case, $E_\omega(L)$ is a simple closed curve, in the second one — L tends spiralwise to every K_n.*

Definition 3. Let E be an arbitrary closed simply-connected set in the plane. We say that $f(\tau)$ is a *cyclic mapping of E*, if a closed simply-connected subset $f(\tau)$ of E is associated to every point of the circle $0 \leqslant \tau < 1$, so that $\tau = \lim \tau_n$ implies $\mathrm{lt}\, f(\tau_n) \subseteq f(\tau)$.

THEOREM 2. *The set $E_\omega(L)$ possesses a cyclic mapping satisfying the following conditions:*

1. *$f(\tau)$ is either a regular point or a singular component.*

2. *The set of τ (points on the circle) such that $f(\tau)$ are singular component is closed and nowhere dense.*

3. *$f(\tau)$ is a biunivoque continuous mapping, whenever $f(\tau) \in \Omega_h$.*

THEOREM 3. *Suppose $\tau_1 < \tau_2$ and U_{τ_1}, U_{τ_2} are any non overlapping neighbourhoods of $f(\tau_1)$ and $f(\tau_2)$. Then there exists T dependent only on the choice of U_{τ_1} and U_{τ_2} such that for $t > T$ the curve crosses U_{τ_1} and U_{τ_2} alternately.*

Theorems 2 and 3 are immediate generalizations of Bendixson's theorem on the winding of the integral curve round a polycycle.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 241—256 Série mathematique

Б. Н. ДЕЛОНЕ

ЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД В ГЕОМЕТРИИ ЧИСЕЛ

В работе дается новый метод в геометрии чисел, который автор называет «локальным». Этот мотод применяется к выводу основной теоремы о приближении рациональными дробями к иррациональным числам, теоремы о минимуме неопределенной двойничной квадратичной формы и теоремы о минимуме кубической двойничной формы. Попутно дан геометрический вывод теоремы о приближениях Чебышева.

Иногда бывает нужно найти наиболее плотную из всех решеток, не имеющих точек в некоторой заданной области и удовлетворяющих еще тем или иным дополнительным условиям. Эту задачу часто можно решить следующим, так сказать, «локальным» способом. Выбирается некоторая определенная конечная конфигурация точек решетки и та же задача решается только для этой конфигурации. Если далее удается убедиться, что 1° такая конфигурация имеется в любой из рассматриваемых решеток и что 2° та решетка, которая определяется этой найденной экстремальной конфигурацией, и вся в целом не имеет точек в рассматриваемой области и удовлетворяет дополнительным условиям, то, очевидно, она и есть искомая экстремальная.

В качестве примеров на этот локальный метод мы рассмотрим следующие задачи:

I. Доказательство теоремы Гурвиц — Бореля о рациональных приближениях с выводом из нее теоремы Чебышева о неоднородных линейных выражениях с точной константой.

II. Задачу о минимуме неопределенной двойничной квадратичной формы.

III. Задачу о минимуме кубической двойничной формы.

I. Доказательство теоремы Гурвиц — Бореля. Вывод неравенства Чебышева с точной константой из теоремы Гурвиц — Бореля

1. Доказательство теоремы Гурвиц—Бореля

Соседние рациональные дроби $\frac{p}{q}$ с данным зафиксированным знаменателем q, расположенные по величине, отличаются друг от друга на $\frac{1}{q}$; поэтому, каково бы ни было вещественное число a, всегда есть

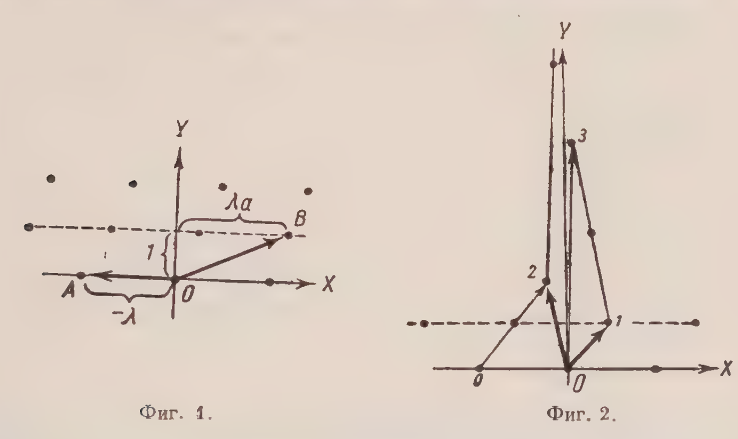
дробь $\frac{p}{q}$ такая, что $\left|a-\frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{2|q|}$. Такая дробь называется наилучшим приближением к a с знаменателем q. Однако, как это заметил еще Лагранж, для любого заданного числа a всегда существует бесконечно много таких специальных знаменателей $q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_n, \ldots$ для каждого a — своих, что для любого из них можно подобрать числитель p_n так, что $\left|a-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$. Лежандр показал, что для любого a даже есть бесконечно много таких знаменателей, что $\left|a-\frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2}$. В дополнение к результату Лежандра Вален показал, что если раскладывать a в непрерывную дробь, то среди любых двух ее последовательных подходящих, по крайней мере одна будет лежандровским приближением. В 1891 г. Гурвиц, исходя из соображений, изложенных в начальных страницах знаменитой диссертации Маркова (1), показал, что для любого a существует бесконечно много дробей $\frac{p}{q}$ таких, что $\left|a-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$, но что уже не для всякого a существует бесконечно много таких, что $\left|a-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda q^2}$, где $\lambda > \sqrt{5}$, т. е. что точная константа в знаменателе есть $\sqrt{5}$. Тем самым было, конечно, также показано, что, и подавно, показатель 2 в знаменателе не может быть заменен бо́льшим. В своей большой работе 1903 г. Борель сделал к теореме Гурвица такое же добавление, как Вален к теореме Лежандра, а именно он показал, что из любых трех последовательных подходящих хоть одна является гурвицевским приближением.

Начнем вывод теоремы Гурвиц — Бореля с геометризации задачи. Перепишем неравенство $\left|a-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda q^2}$ так: $|(\lambda a q-\lambda p)\cdot q| < 1$ или, положив $\lambda a q-\lambda p=x$, $q=y$, так: $|x, y|<1$. Примем x, y за прямоугольные координаты точек и будем называть область точек $|xy| < 1$, лежащих между сопряженными гиперболами $xy = \pm 1$, областью γ. Для (p, q), равных $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, мы будем иметь соответственно (x, y) равные $(0, 0)$, $(-\lambda, 0)$, $(\lambda a, 1)$ (фиг. 1). Мы видим, что p и q будут координатами точек (x, y) по отношению к реперу OAB и совокупности всех пар целых чисел p, q будет, следовательно, на плоскости x, y соответствовать совокупность точек решетки, построенной на репере OAB. Мы будем обозначать эту решетку $\Gamma_{a,\lambda}$.

Если в решетке $\Gamma_{a,\lambda}$ есть хоть одна точка, отличная от начала, лежащая на оси Y, т. е. есть такие целые p, q $(q \neq 0)$, что $x=\lambda a q-$ $-\lambda p=0$, то $a=\frac{p}{q}$ рациональное, и обратно. Этот случай неинтересен, и мы будем далее предполагать, что $\Gamma_{a,\lambda}$ не имеет точек, отличных от начала на оси Y.

Решетка $\Gamma_{a,\lambda}$ имеет линейный ряд точек на оси X и ближайший к нему параллельный линейный ряд, проходящий через точку B. Полоса между этими линейными рядами составлена из параллелограмов, равных и параллельных OAB и имеющих площадь λ. Рассмотрим ту точку линейного ряда, параллельного оси X, проходящего через B,

которая наиболее близка к оси Y, и обозначим ее 1 (фиг. 2). Отложим от ближайшей к оси Y точки o решетки, лежащей на оси X по другую сторону, чем 1, вектор $O1$ наибольшее целое положительное число раз такое, что конец 2 отложенного вектора лежит от оси Y еще по ту же сторону, где точка o (на чертеже два раза). Отложим затем из точки 1 вектор $O2$ наибольшее целое положительное число



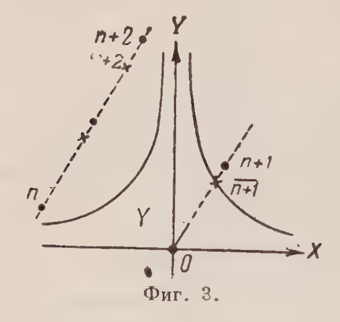
Фиг. 1. Фиг. 2.

раз такое, что конец 3 отложенного вектора еще лежит по ту же сторону от оси Y, где точка 1 (на чертеже три раза), и т. д. Площади параллелограмов $O12$, $O23$, ... все также равны λ, так как параллелограм $O12$ получается из параллелограма $Oo1$ перенесением его вершины o параллельно его основанию $O1$ в точку 2, параллелограм $O23$ получается из параллелограма $O12$ перенесением его вершины 1 параллельно его основанию $O2$ и т. д. Точки $1, 2, 3$, ... мы будем называть подходящими. Можно показать, что дроби $\frac{p}{q}$, составленные из координат p, q этих точек, будут обычными подходящими той непрерывной дроби, в которую раскладывается число a. В этом состоит известное геометрическое толкование непрерывных дробей, данное Клейном в 1896 г. В самом конце своего изложения Клейн говорит, что таким образом можно, должно быть, получить наглядный вывод теоремы Гурвица, однако этого вывода он не дает.

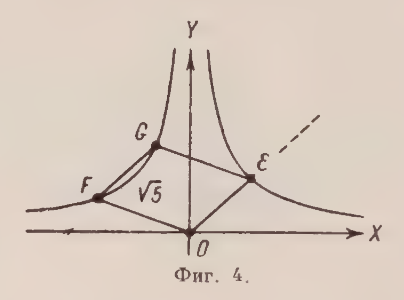
Покажем, как локальным методом из этой геометрии непрерывных дробей немедленно получается теорема Гурвиц — Бореля.

Точка O (фиг. 3) и три любых последовательных подходящих n, $n+1$, $n+2$ дают следующую конфигурацию точек. Вектор $\overrightarrow{n, n+2}$ есть целая положительная кратность вектора $\overrightarrow{O, n+1}$ и лежит в смежном с ним координатном угле. Будем называть любую конфигурацию такого рода конфигурацией δ. Посмотрим, какова должна быть конфигурация δ для того, чтобы точки ее $n, n+1$, $n+2$ не лежали в области γ и площадь s параллелограма $O, n, n+1$ (фиг. 2), ей соответствующего, была наименьшей при этом возможной. При гиперболическом «повороте» плоскости относительно асимптот X, Y область γ

перейдет в себя, площадь s не изменится, вектор $\overrightarrow{n, n+2}$ останется той же кратностью вектора $\overrightarrow{O, n-1}$, векторы эти останутся лежащими в своих координатных углах и, если точки $n, n+1, n+2$ до «поворота» не лежали в области γ, то и после поворота они не будут в ней лежать; наконец, при помощи соответственно подобранного «поворота» можно передвинуть точку $n+1$ на биссектрису соответствующего ей



Фиг. 3.



Фиг. 4.

координатного угла. Можно, следовательно, ограничиться рассмотрением только таких конфигураций δ, у которых точка $n+1$ лежит на биссектрисе координатного угла. Если у такой конфигурации δ точка $n+1$ не лежит на границе области γ, то ее можно заменить другой конфигурацией δ $O, n, \overline{n+1}, \overline{n+2}$, с меньшей площадью s, у которой точка $\overline{n+1}$ уже лежит на границе области γ, т. е. в вершине соответственной гиперболы. Далее, для такого вектора $\overrightarrow{O, \overline{n+1}}$ оптимальным, в смысле малости площади s, будет случай, когда вектор $\overrightarrow{n, \overline{n+2}}$ равен лишь один раз взятому вектору $\overrightarrow{O, \overline{n+1}}$ и оба конца его лежат на соответственной гиперболе симметрично относительно биссектрисы того координатного угла, в котором она лежит, как на фиг. 4. Ввиду того, что от любой конфигурации δ, у которой точки $n, n+1, n+2$ не лежат в γ, можно так перейти к этой специальной конфигурации $OEFG$, с точностью до гиперболического поворота, *единственной*, лишь уменьшая площадь s соответствующего ей параллелограма, — эта конфигурация оптимальная.

Легкий подсчет показывает, что площадь параллелограма $OEFG$ равна $\sqrt{5}$. Обозначим решетку, построенную на этом параллелограмме, через M. Никакая решетка $\Gamma_{a,\lambda}$, даже если ее $s=\lambda=\sqrt{5}$, не может быть решеткой M, так как у решетки $\Gamma_{a,\lambda}$ ось X имеет на себе точки, отличные от точки O, а ось Y, по сделанному предположению, их не имеет. Решетка же M, очевидно, симметрична относительно биссектрисы того координатного угла, где лежит вектор FG, и, следовательно как у ней, так и у любой из нее, получаемой гиперболическим поворотом, либо обе оси X и Y имеют на себе точки, отличные от начала, либо обе не имеют.

Приняв во внимание все сказанное, мы видим, что, если $\lambda \leqslant \sqrt{5}$, то хоть одна среди каждых трех последовательных подходящих точек любой решетки $\Gamma_{a,\lambda}$ лежит в области γ, т. е. удовлетворяет неравенству

$$|(\lambda a q - \lambda p) q| < 1 \quad \text{или} \quad \left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\lambda q^2}.$$

Остается показать, что $\lambda = \sqrt{5}$ — наибольшая константа, при которой неравенство $\left| a - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\lambda q^2}$ удовлетворяется для любого a бесконечным числом дробей $\frac{p}{q}$, т. е., что, какое бы ни взять положительное ε и $\lambda = \sqrt{5}(1+\varepsilon)$, для такого λ будут существовать такие a, что у решеток $\Gamma_{a,\lambda}$, кроме точек на оси X, есть у каждой лишь конечное число точек в области γ. Мы построим такую решетку при помощи некоторых преобразований решетки M.

Докажем сначала, что решетка M не имеет, кроме начала, никаких других точек в области γ. Легко видеть, что координаты x, y точек E и G суть $(1, 1)$ и $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Если принять векторы, идущие из точки O в эти точки, за координатные, то точки решетки M будут точками с целыми координатами u, v по отношению к этому реперу, причем

$$x = u + v\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad y = u + v\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

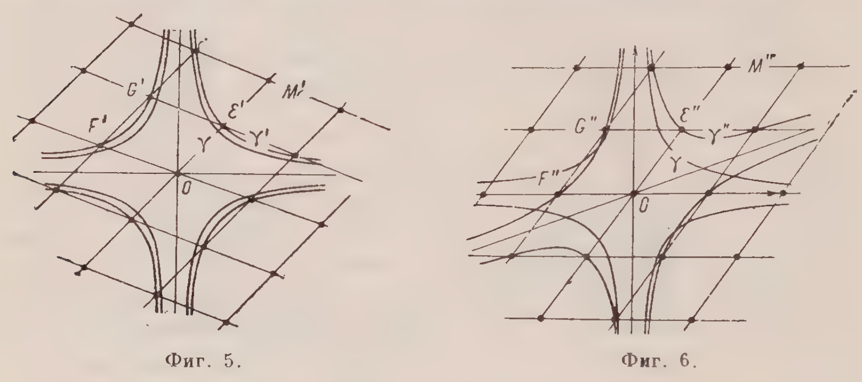
Область γ в координатах u, v запишется неравенством

$$|xy| = \left| \left(u + v\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(u + v\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right| = |u^2 + uv - v^2| < 1,$$

левая часть которого при целых u, v, т. е. для точек решетки M, есть целое положительное число или ноль. Но нулем она будет только, если либо x либо y будут нулем, что возможно при целых u, v, только если $u=0$, $v=0$, так как иначе рациональное число $u + \frac{v}{2}$ равнялось бы иррациональному числу $\pm\frac{v\sqrt{5}}{2}$, чего быть не может. Таким образом, решетка M, кроме начала, на имеет точек в области γ.

Сделаем гомотетию из начала такую, чтобы площадь основного параллелограма решетки M сделалась равной $\sqrt{5}(1+\varepsilon)$. Обозначим через M' и γ' (фиг. 5) ту решетку и область, в которые при этом преобразуются M и γ. Сделаем теперь сдвиг плоскости относительно оси Y такой, чтобы один из линейных рядов точек решетки M', проходящий через O, например OF', сделался перпендикулярным к оси Y, т. е. оказался на старой оси X. Пусть после этого решетка M' и область γ' преобразуются в M'' и γ''. γ'' будет областью, заключающеюся между двумя сопряженными гиперболами, одна из асимптот которых есть — так же, как и у γ и γ' — ось Y, а другая — та прямая, в которую после

этого сдвига преобразуется ось X, причем параметр этого гиперболического креста такой же, как у γ', т. е. равен $1+\varepsilon$. Легко видеть, что, начиная с некоторого места вдоль оси Y, область γ лежит внутри области γ'' (фиг. 6). Но все точки решетки M'' не лежат в области γ'', и, следовательно, начиная с некоторого места вдоль оси Y, не лежат и в области γ. Что же касается ветвей области γ, охватывающих ось



Фиг. 5. Фиг. 6.

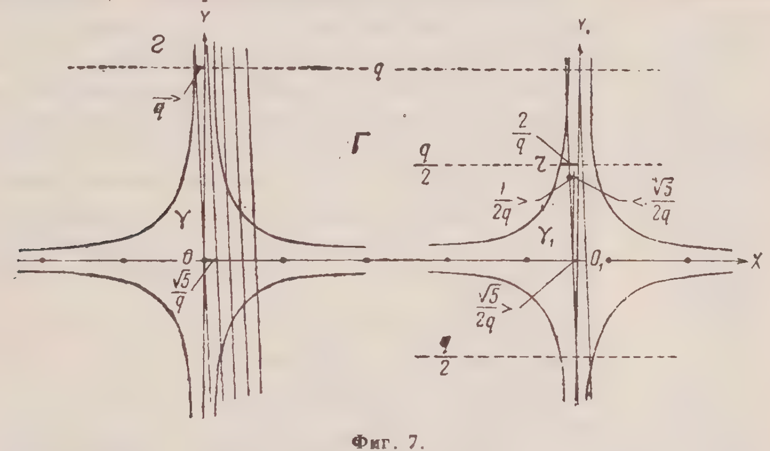
X, то в них лежит линейный ряд OF'' решетки M'', начиная с некоторого места вдоль оси X, не лежит никаких других точек M'', так как эти ветви, начиная с некоторого места, идут внутри полоски, заключенной между обоими параллельными к OF'', соседними с ним линейными рядами M''. Сделав еще, если нужно, гиперболический поворот такой, чтобы расстояние между осью X и ближайшим к ней параллельным рядом M'' сделалось равным 1, мы получим из M'' некоторую решетку $\Gamma_{a,\lambda}$ с $\lambda=\sqrt{5}\,(1+\varepsilon)$, которая, кроме линейного ряда точек на оси X, может иметь лишь конечное число точек, принадлежащих области γ. Другими словами, какое бы малое зафиксированное положительное число ε ни было, для $\lambda=\sqrt{5}\,(1+\varepsilon)$, для полученного a, не будет существовать бесконечного числа дробей $\frac{p}{q}$, удовлетворяющих неравенству $\left|a-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\lambda q^2}$.

Теорема Гурвиц — Бореля таким образом доказана полностью.

2. Вывод неравенства Чебышева с точной константой из теоремы Гурвиц — Бореля

Чебышев в большом своем мемуаре [2] замечает, что теория непрерывных дробей дает решение вопроса о приближении к нулю линейного выражения $aq-p$ при помощи целых p и q, а что вопрос о приближении такого выражения не к нулю, а к заданному числу b, т. е. вопрос о приближении к нулю неоднородного выражения $aq-p-b$ уже более трудный, хотя тоже может быть решен при помощи непрерывных дробей. В 1866 г. точная константа Маркова — Гурвица $\lambda=\sqrt{5}$ для неравенства $|(aq-p)\,q|<\frac{1}{\lambda}$ не была еще известна. Для аналогич-

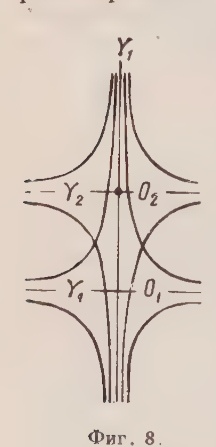
ного неравенства $|(aq-p-b)q|<\frac{1}{\lambda}$, где a иррационально, Чебышев нашел, что его можно удовлетворить всегда бесчисленным числом пар целых p, q $(q \neq 0)$, например, если $\lambda=\frac{1}{2}$. Улучшению константы λ в неравенстве Чебышева было посвящено много работ, но в них обычно ставились еще те или иные дополнительные условия, — таковы работы Эрмита, Хинчина, Блихфельда. Были также предложены разные обобщения Минковским, Ремаком, Чеботаревым, Морделем, но точная константа для задачи самого Чебышева была дана, насколько я знаю, лишь недавно Жогиным ([3]); она оказалась такой же, как и в задаче Гурвиц — Бореля. Покажем геометрически, как получается результат Чебышева в этой окончательной форме, т. е. покажем, что для любого иррационального a и любого b всегда есть бесконечно много пар целых чисел p, q, для которых $|(aq-p-b)q|<\frac{1}{\lambda}$ для $\lambda=\sqrt{5}$. Из предыдущего ясно, что это не всегда имеет место для $\lambda>\sqrt{5}$, например, даже для $b=0$. Первую, несколько более сложную, чем приводимая дальше, геометризацию вывода Жогина дала О. С. Лодыженская.



Фиг. 7.

Заметим, что геометрически существование для данного иррационального a и любого данного b бесконечного числа целых p, q, удовлетворяющих написанному неоднородному неравенству, значит, что как бы в решетке $\Gamma_{a,\lambda}$ с данным иррациональным a и $\lambda=\sqrt{5}$ ни смещать фигуру γ вдоль оси X, как бы ни выбирать b, в ней всегда будет лежать бесконечно много точек этой решетки, не лежащих на оси X. Обозначим смещенную область γ через γ_1, ее центр через O_1 а ее вертикальную асимптоту через Y_1. Рассмотрим какую-нибудь гурвицевскую точку Γ в γ (фиг. 7). Координата y ее равна ее q. Параллелограмы решетки $\Gamma_{a,\sqrt{5}}$, составляющие полоску между линейным рядом $O\Gamma$ и первым ему параллельным линейным рядом, имеют площадь $s=\lambda=\sqrt{5}$. Ширина такой полоски в направлении оси X поэтому равна $\frac{\sqrt{5}}{q}$. Все точки рассматриваемой решетки Γ расположены на сторонах таких прилежащих друг к другу полосок.

Рассмотрим ту из таких полосок, которая накрывает центр O_1 смещенной области γ_1, и ту из ее сторон, которая ближе пересекает ось X к точке O_1. Так как на сторонах полосок точки лежат на расстояниях q (по вершинам) друг от друга, то на этой стороне будет лежать точка $Ч$, для которой $-\frac{q}{2} < y \leqslant \frac{q}{2}$. Ширина области γ_1 (в направлении X) от ее края до оси Y_1 для $-\frac{q}{2} < y \leqslant \frac{q}{2}$ не меньше $\frac{2}{q}$. Расстояние же точки $Ч$ от оси Y_1 состоит из двух кусков, один из которых меньше $\frac{\sqrt{5}}{2q}$, другой меньше $\frac{1}{2q}$ (последнее получается, если учесть подобие прямоугольных треугольников с гипотенузами $OГ$ и $O_1Ч$), но $\frac{\sqrt{5}}{2q} + \frac{1}{2q} < \frac{2}{q}$, так как $\sqrt{5} + 1 < 4$. Каждая точка $Г$, следовательно, дает точку $Ч$ нашей решетки, лежащую в области γ_1. Остается доказать, что, выбирая все более и более далекие точки $Г$ вдоль оси Y_1, можно получить все новые и новые точки $Ч$. Для этого надо отдельно рассмотреть тот случай, когда ось Y_1 проходит через некоторую точку O_2 решетки Г. Нижняя ветвь области γ_2 (фиг. 8) этой точки (если точка O_2 лежит в верхней ветви γ_1), начиная с некоторого места, лежит в области γ_1, а в ней есть бесконечно много точек Г. Можно, следовательно, предполагать, что на Y_1 нет точек Г. В этом случае, взяв некоторую точку $Г_1$, мы получим ей соответствующую точку $Ч_1$, расстояние δ_1 которой от оси Y_1 может быть, конечно, гораздо меньше, чем расстояние $Г_1$ от оси Y, но оно — некоторое определенное положительное число. Тогда можно взять следующую точку $Г_2$ с таким большим q, чтобы $\frac{\sqrt{5}}{2q} + \frac{1}{2q}$ для нее было меньше δ_1 и она тогда даст точку $Ч_2$ с $\delta_2 < \delta_1$. Продолжая так дальше, мы будем получать все новые и новые точки $Ч$ с все меньшими δ.



Фиг. 8.

Теорема Чебышева с точной постоянной $\lambda = \sqrt{5}$, таким образом, доказана.

II. Задача о минимуме неопределенной двойничной квадратичной формы

Неопределенная двойничная квадратичная форма φ есть, иначе говоря, произведение двух вещественных двойничных линейных форм

$$\varphi(u, v) = au^2 + 2buv + cv^2 = (\alpha' u + \beta' v)(\alpha'' u + \beta'' v).$$

Если u, v — декартовы координаты и t — постоянная, то линия $\varphi(u, v) = t$ есть гипербола, асимптоты которой суть $\alpha' u + \beta' v = 0$, $\alpha'' u + \beta'' v = 0$, а $\varphi(u, v) = -t$ сопряженная гипербола. Выбором репера $\mathscr{E}$ декартовой системы u, v можно достичь того, чтобы асимптоты эти

были взаимно перпендикулярны и чтобы гиперболы $\varphi(u, v) = \pm t$ выражались в прямоугольных координатах x, y уравнениями $xy = \pm t$. Посмотрим, каковы для этого должны быть прямоугольные координаты x, y векторов репера $\mathcal{E}$. Пусть они будут (a_1, a_2), (b_1, b_2), — в таком случае $x = a_1 u + b_1 v$, $y = a_2 u + b_2 v$ и тогда должно быть

$$(a_1 u + b_1 v)(a_2 u + b_2 v) = (\alpha' u + \beta' v)(\alpha'' u + \beta'' v),$$

т. е. должны иметь место равенства

$$a_1 u + b_1 v = \rho'(\alpha' u + \beta' v); \quad a_2 u + b_2 v = \rho''(\alpha'' u + \beta'' v),$$

где $\rho'\rho'' = 1$. Приравнивая здесь коэффициенты при u и v в левых и правых частях, получаем

$$a_1 = \rho'\alpha', \ a_2 = \rho''\alpha'' \ \text{и} \ b_1 = \rho'\beta', \ b_2 = \rho''\beta'',$$

т. е. репер $\mathcal{E}$ есть репер, составленный векторами (α', α'') (β', β''), а также все те реперы, которые получаются из него гиперболическим поворотом по отношению к осям XY. При таком сопоставлении форме $\varphi(u, v)$ будет соответствовать репер $\mathcal{E}$, парам (u, v) целочисленных значений u и v — точки решетки, построенной на этом репере, а значениям формы при этих u, v — параметры t тех гипербол $xy = t$, на которых лежат эти точки. Площадь $s = \begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$ основного параллелограма этой решетки равна $\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}$, причем

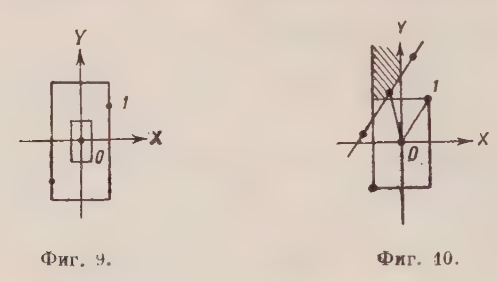
$$\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix}^2 = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$$

— дискриминанту D формы φ. Обратно, всякий репер $\mathcal{E}$ соответствует в этом смысле некоторой неопределенной двойничной квадратичной форме. Например, репер OEG решетки M дает форму $u^2 + uv - v^2$.

Задача о минимуме неопределенной двойничной квадратичной формы состоит в том, чтобы из всех таких форм, имеющих данный дискриминант D, найти ту, если такая существует, которая имеет наибольший минимум, т. е. у которой наименьшее ее абсолютное значение, соответствующее целым u, v, не равным одновременно нулю, наибольшее. Мы будем вместо этой решать задачу, которая ей, очевидно, эквивалентна, — из всех таких форм с данным минимумом искать ту, дискриминант которой наименьший. Геометрически задача в этой постановке сводится к разысканию самой плотной решетки, — если такая существует, — среди таких, одна из точек которых есть начало, и которые не имеют точек в области γ. Покажем, что такой решеткой является найденная выше решетка M.

Действительно, пусть какая-либо решетка, имеющая одну точку в начале O, не имеет других точек на осях X и Y. Возьмем какой-

нибудь весьма малый прямоугольник (фиг. 9) с центром в начале и сторонами, параллельными осям X, Y, и будем его увеличивать гомотетично из начала, пока он не встретит точку решетки. Назовем ее точкой *1*. Прямоугольник с центром в O и вершиной в *1* будет тогда пустой внутри и на границе (кроме точек O в центре и *1*, -1 в двух противоположных его углах), так как если бы были еще точки на его границе, то были бы на оси X или Y еще точки решетки, кроме начала. Ближайший параллельный к $O1$ ряд должен, следовательно, иметь одну



Фиг. 9. Фиг. 10.

точку *2* в заштрихованной области. Отложив от точки *1* (фиг. 10) наибольшее целое положительное число раз вектор $O2$, чтобы конец его *3* еще находился по ту же сторону от оси Y, как и точка *1*, мы получим конфигурацию δ. Но наименьшая площадь параллелограма конфигурации δ, концы которой не лежат в области γ, как мы показали выше, у конфигурации δ, дающей решетку M. Экстремальная квадратичная форма, следовательно, u^2+uv-v^2.

III. Задача о минимуме кубической двойничной формы положительного определителя

Первыми нашли минимальные кубические двойничные формы Морделл (4) и Давенпорт (5).

Кубическая двойничная форма положительного определителя D есть произведение трех вещественных двойничных линейных форм

$$f(u, v) = au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 = (\alpha' u + \beta' v)(\alpha'' u + \beta'' v)(\alpha''' u + \beta''' v).$$

Определитель двойничной формы n-го порядка, т. е. произведение квадратов всех разностей ее корней на $2(n-1)$-ю степень старшего ее коэффициента, если форма написана в виде произведения линейных форм

$$(\alpha' u + \beta' v)(\alpha'' u + \beta'' v) \ldots (\alpha^{(n)} u + \beta^{(n)} v)$$

через коэффициенты этих линейных форм, пишется, как легко видеть, как квадрат произведения всех определителей 2-го порядка, составленных из матрицы $\begin{pmatrix} \alpha' & \alpha'' & \ldots & \alpha^{(n)} \\ \beta' & \beta'' & \ldots & \beta^{(n)} \end{pmatrix}$:

$$D = (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2 (\alpha'\beta''' - \alpha'''\beta')^2 \ldots (\alpha^{(n-1)}\beta^{(n)} - \alpha^{(n)}\beta^{(n-1)})^2.$$

Он есть целая рациональная функция от коэффициентов формы. Так, для кубической формы

$$D=(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2(\alpha'\beta'''-\alpha'''\beta')^2(\alpha''\beta'''-\alpha'''\beta'')^2=$$
$$=b^2c^2-4ac^3-4b^3d+18abcd-27a^2d^2.$$

Если u, v — декартовы координаты по отношению к некоторому реперу $\mathcal{E}$ и t — постоянная, то линия 3-го порядка $f(u,v)=t$ имеет асимптоты

$$\alpha'u+\beta'v=0,\quad \alpha''u+\beta''v=0,\quad \alpha'''u+\beta'''v=0,$$

а $f(u,v)=-t$ сопряженная ей линия 3-го порядка, имеющая эти же асимптоты. В координатах x, y, репер E которых состоит из векторов одинаковой длины 1, делающих угол в 60° друг с другом, уравнения $xy(x+y)=\pm t$ выражают две сопряженные соасимптотические линии 3-го порядка, асимптоты которых — ось X, ось Y и прямая $x+y=0$, наклоненные друг к другу под углами в 60°. Совокупность этих двух линий имеет гексагональную симметрию. Выбором репера $\mathcal{E}$ декартовых координат u, v можно достичь того, чтобы линии $f(u,v)=\pm t$ совпадали с линиями $xy(x+y)=\pm t$. Посмотрим, каковы для этого должны быть координаты x, y векторов $\mathcal{E}$ по отношению реперу E. Пусть они будут (a_1, a_2), $(b_1\, b_2)$; в таком случае $x=a_1u+b_1v$; $y=a_2u+b_2v$ и должно быть

$$xy(x+y)=(a_1u+b_1v)(a_2u+b_2v)[(a_1+a_2)u+(b_1+b_2)v]=$$
$$=(\alpha'u+\beta'v)(\alpha''u+\beta''v)(\alpha'''u+\beta'''v),$$

т. е. должны иметь место равенства

$$a_1u+b_1v=\rho'(\alpha'u+\beta'v);\quad a_2u+b_2v=\rho''(\alpha''u+\beta''v);$$
$$(a_1+a_2)u+(b_1+b_2)v=\rho'''(\alpha'''u+\beta'''v),$$

где $\rho'\rho''\rho'''=1$. Приравнивая здесь коэффициенты при u и v в левых и правых частях, получим, после исключения ρ', ρ'', ρ''', для определения a_1, b_1, a_2, b_2 систему трех линейных однородных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} \beta' & -\alpha' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta'' & \alpha'' \\ \beta''' & -\alpha''' & \beta''' & -\alpha''' \end{pmatrix},$$

откуда получаем следующие равенства:

$$a_1=\lambda\alpha'(\alpha'''\beta''-\alpha''\beta''');\quad b_1=\lambda\beta'(\alpha'''\beta''-\alpha''\beta''');$$
$$a_2=\lambda\alpha''(\alpha'\beta'''-\alpha'''\beta');\quad b_2=\lambda\beta''(\alpha'\beta'''-\alpha'''\beta'),$$

где λ — множитель, который мы найдем так. Возьмем точку $(u,v)=(1,0)$, координаты ее x, y будут $(x,y)=(a_1,a_2)$. Должно быть $f(1,0)=$ $=a_1a_2(a_1+a_2)$, или иначе

$$\alpha'\alpha''\alpha'''=\lambda^3\alpha'(\alpha'''\beta''-\alpha'\beta''')\cdot\alpha''(\alpha'\beta'''-\alpha'''\beta')\cdot\alpha'''(\alpha'\beta''-\alpha''\beta'),$$

так как, после сокращений, получается $a_1+a_2=\lambda\alpha'''(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')$. Отсюда мы найдем λ. Подставив это λ в a_1, b_1, a_2, b_2 и вычисляя $s=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, получим, после сокращений,

$$s=\sqrt[3]{(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')(\alpha'\beta'''-\alpha'''\beta')(\alpha''\beta'''-\alpha'''\beta'')}.$$

Рассмотрим решетку, построенную на репере $\mathcal{E}$. При описанном сопоставлении формы f и репера $\mathcal{E}$ значениям формы $f(u, v)$, соответствующим целочисленным u, v, будут соответствовать значения параметра t той линии $xy(x+y)=t$, которая проходит через точку (u, v) этой решетки. Задача о минимуме кубической двойничной формы положительного определителя состоит, таким образом, в отыскании плотнейшей решетки, если такая существует, среди решеток, имеющих одну точку в начале O и не имеющих точек в области θ, определяемой неравенством $|xy(x+y)|<1$. Область θ играет ту же роль в рассматриваемой задаче, как область γ в рассмотренной выше задаче о минимуме неопределенной квадратичной двойничной формы.

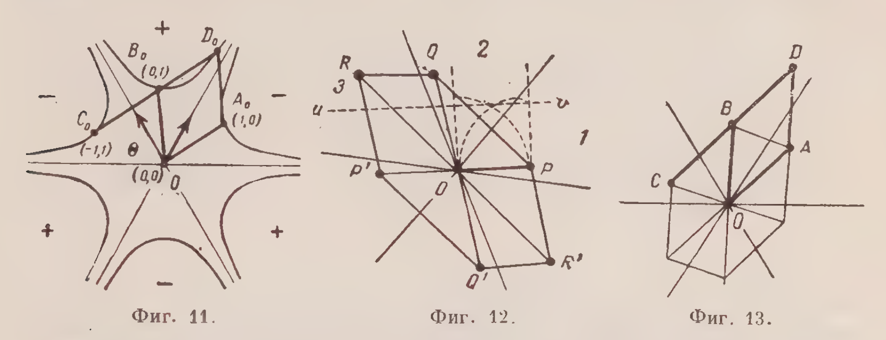
Рассмотрим кубическую двойничную форму

$$f_0(u, v) = -u^3 - u^2v + 2uv^2 + v^3 = (-1, -1, 2, 1)$$

положительного определителя $D=49$. Она целочисленна и не имеет рациональных корней; следовательно, для всех целых u, v, не равных нулю одновременно, абсолютная величина ее не меньше 1, т. е. соответствующая ей решетка N не имеет точек (кроме точки в начале), лежащих в области θ. Для этой формы мы имеем $f(1,0)=-1$; $f(0,1)=1$; $f(1, 1)=1$; $f(1,-1)=1$. Прямое построение репера $\mathcal{E}$ этой формы дает фигуру $OA_0B_0C_0D_0$ (фиг. 11), которую мы будем называть конфигурацией ζ_0. Вообще же конфигурацией ζ мы будем называть такую конфигурацию O, A, B, C, D, что OAB образует репер и координаты точек D и C по отношению к нему суть $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ и, кроме того, A, B, C лежат в трех последовательных углах между асимптотами и D в том же углу, где B. Покажем, что в любой решетке, имеющей одну точку в начале O и не имеющей других точек на наших асимптотах, всегда имеется такая конфигурация ζ, что OAB — основной репер этой решетки. Покажем, далее, что любая конфигурация ζ, «концы» которой, т. е. точки A, B, C, D, лежат вне θ, может быть непрерывным ее изменением, лишь уменьшающим площадь ее основного параллелограма, преобразована в конфигурацию ζ_0. Отсюда следует, что $(-1, -1, 2, 1)$ есть минимальная форма.

Начнем с доказательства существования конфигурации ζ в любой решетке, одной из точек которой является точка O и которая не имеет других точек на асимптотах фигуры θ. Для этого возьмем (фиг. 12) ближайшую к O точку P такой решетки и пусть она лежит в первом углу между асимптотами. Ближайший к OP параллельный ряд должен иметь точку, лежащую в полоске, ограниченной перпендикулярами к OP, восставленными в точках O и P и вне или на границе кругов радиуса OP с центрами в O и в P (см. фиг. 12), т. е. он должен лежать не ближе как на прямой uv. Но тогда те отрезки, которые имеет прямая, на которой он лежит, с вторым и третьим углами между асимптотами,—длиннее OP, и на ней, следовательно, есть точки, лежащие во втором и лежащие в третьем углу. Если Q — последняя его точка, лежащая во втором, а R — первая в третьем, то шестиуголь-

ник $PQRP'Q'R'$, составленный из шести одинаковых основных треугольников решетки, облегающих точку O, имеет по одной вершине в каждом из шести углов между асимптотами. Достроив (фиг. 13) один из этих треугольников до параллелограма, получим конфигурацию ζ.



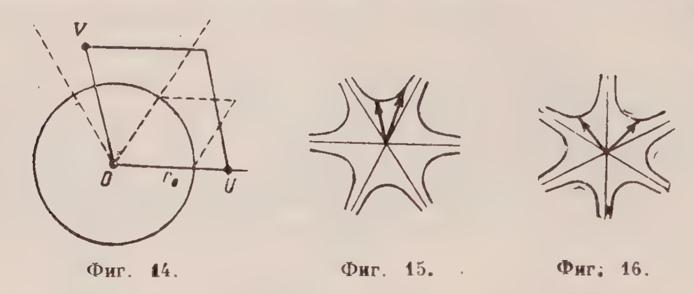
Фиг. 11. Фиг. 12. Фиг. 13.

Докажем теперь, что если «концы» A, B, C, D конфигурации ζ не лежат в области θ, то, все время сохраняя это условие, и непрерывно изменяя ζ так, чтобы площадь s параллелограма $OABD$ только убывала, можно любую такую конфигурацию ζ преобразовать в конфигурацию ζ_0. Для этого покажем сначала, что у всех ζ, «концы» которых лежат вне θ, площадь s ограничена снизу некоторой положительной постоянной. Действительно, сумма трех последовательных «центральных» углов шестиугольника $PQRP'Q'R'$ равна 180°. Больший из них, следовательно, не меньше 60°, а потому сумма двух меньших не более 120°, но она больше 60°, так как эта сумма охватывает один из углов в 60° между асимптотами. Пусть OU и OV (фиг. 14) те два «радиуса» шестиугольника, которые составляют этот угол, лежащий между 60° и 120°. Длины этих радиусов не меньше, чем радиус r_0 круга с центром в O, вписанного в θ. Но тогда площадь параллелограма OUV, а следовательно, и равная ей площадь s параллелограма OAB, во всяком случае не меньше, чем площадь пунктирного параллелограма (фиг. 14), т. е. чем площадь $\bar{s}$ параллелограма, построенного на сторонах, идущих из O к вершинам двух смежных гиперболических границ θ.

Пусть теперь дана некоторая конфигурация ζ, не имеющая своих «концов» в θ. Будем уменьшать эту ζ гомотетично к точке O. Площадь s ее при этом будет уменьшаться и, следовательно, один из «концов» ζ наткнется, наконец, на границу θ. Будем теперь равномерно сжимать ζ к прямой, проходящей через O и этот конец. Площадь s будет, далее, убывать и, следовательно, еще один, — второй «конец» ζ придет на границу θ. Векторы, идущие из начала в любые два из «концов» конфигурации ζ, образуют репер. Площадь параллелограма для пяти из этих реперов равна s, а для шестого $OCD - 2s$. Так как «концы» ζ лежат в трех смежных углах между асимптотами, то могут быть относительно этого репера всего три разных случая, а именно что векторы его идут к одной «гиперболической» ветви, к двум соседним и к двум

несоседним. Третий случай сводится к второму, если заменить один из двух векторов репера на обратный.

Будем в первом случае (фиг. 15) концы, лежащие на «гиперболе», сближать по ней к самому короткому из радиусов этой «гиперболы»,

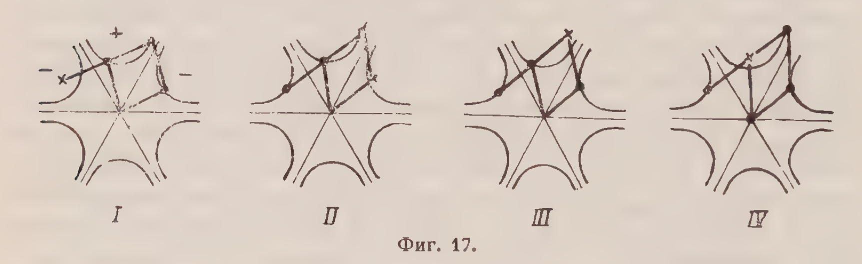


Фиг. 14. Фиг. 15. Фиг. 16.

лежащему между ними. Площадь s будет при этом убывать и, следовательно, в конце концов на границу θ попадет еще третий «конец» ζ.

Во втором случае (фиг. 16), когда «концы», попавшие на границу θ, лежат на двух смежных ветвях (как легко показать, передвигая их в сторону уходящей асимптоты) также будем уменьшать площадь до нуля, и, следовательно, третий «конец» ζ также, в конце концов, попадет на границу θ.

Три конца ζ могут лежать на границе θ четырьмя разными способами I, II, III, IV (фиг. 17).



Фиг. 17.

Рассматривая репер OAB конфигурации ζ, как задающий некоторую кубическую двойничную форму f, мы получаем в этих случаях соответственно:

I $f(1, 0) = -1$, $f(0, 1) = 1$, $f(1, 1) = 1$,
II $f(0, 1) = 1$, $f(1, 1) = 1$, $f(-1, 1) = -1$,
III $f(1, 0) = -1$, $f(0, 1) = 1$; $f(-1, 1) = -1$,
IV $f(1, 0) = -1$, $f(1, 1) = 1$, $f(-1, 1) = -1$,

и таким образом в каждом из этих случаев мы получаем форму f и дискриминант D:

I $f = (-1, b, 1-b, 1)$ $D = b^4 - 10b^3 + 31b^2 - 30b - 23$.
II $f = (a, -1, 1-a, 1)$ $D = 4a^4 - 12a^3 + 4a^2 - 24a + 5$,
III $f = (-1, b, b+3, 1)$ $D = b^4 + 6b^3 + 27b^2 + 54b + 81$,
IV $f = (-1, b, 2, -b)$ $D = 4b^4 + 13b^2 + 32$.

Во всех четырех случаях, как это показывает исследование графика D, как функции от параметра b (a — в случае II), если учитывать еще неравенство, налагаемое на этот параметр тем, что четвертый «конец» ζ должен лежать в соответствующем кармане, образуемом θ, D есть монотонная функция от этого параметра. Изменяя этот параметр в соответственную сторону, мы будем уменьшать $s=\sqrt[6]{D}$, причем, как показывает исследование, как раз до тех пор, пока и четвертый «конец» не придет на границу θ. Но в этом случае будет

$$f(1,0)=-1;\ f(0,1)=1;\ f(1,1)=1;\ f(-1,1)=-1$$

и, следовательно, $f=(-1, -1, 2, 1)$. Эта форма, таким образом, — оптимальная.

Поступило
21. III. 1945

ЛИТЕРАТУРА

1 Марков А. А., О бинарных квадратичных формах положительного определителя, СПб, 1880.

2 Чебышев П. Л., Об одном арифметическом вопросе, Собрание сочинений, т. I, стр. 639—684.

3 Жогин И. И., К теории диофантовых приближений, Ученые записки МГУ, вып. 73, кн. 5, стр. 37—40, 1944.

4 Mordell L. J., The minimum of a binary cubic form (I), (II), Journ. Lond. Math. Soc., 18 (1943), 201—217.

Davenport H., The minimum of a binary cubic form, Journ. Lond. Math. Soc., 18 (1943), 168—176.

B. DELAUNAY. LOCAL METHOD IN THE GEOMETRY OF NUMBERS

SUMMARY

Suppose we have to determine the densest grating satisfying some given conditions. It is possible to choose a finite aggregate of points of a grating and to seek such a configuration of the points, which satisfies the given conditions and determines the densest grating. Such a method may be called local method, because the consideration of infinite gratings is replaced by that of a configuration of a finite number of points.

To find the minimum of an indefinite binary quadratic form and to prove Hurwitz—Borel's theorem I consider the configuration δ, while the configuration ζ is used in order to find the minimum of a cubic binary form.

By the way I give a very simple, geometrical proof of Tchebycheff's approximation theorem.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 257–274 Série mathématique

В. С. ФЕДОРОВ

О МОНОГЕННОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

(*Представлено академиком* Н. Н. Лузиным)

Автор вводит понятие сопряженности пары действительных функций трех действительных аргументов с некоторым вектором и изучает свойства этих пар функций. Такие функции характеризуются некоторыми дифференциальными свойствами, которые являются естественным обобщением известных дифференциальных свойств моногенной функции комплексного аргумента.

§ 1. Определения и примеры

1. Определение. Мы скажем, что в данной области D функция $u(x, y, z)$ есть сопряженная с функцией $v(x, y, z)$ относительно вектора $\vec{a}$, или что пара функций (u, v) сопряжена с $\vec{a}$, и будем писать $(u, v) \sim \vec{a}$, если эти функции в области D дважды непрерывно дифференцируемые, т. е. имеют непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков и если в каждой точке области D

$$\nabla u = \nabla v \times \vec{a}, \quad \nabla v = \vec{a} \times \nabla u, \tag{1}$$

$$\nabla u \times \nabla v \neq 0^*. \tag{2}$$

Здесь и далее $\nabla \equiv \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты осей координат (прямолинейных и прямоугольных). Вектор $\vec{a}$ или постоянный или переменная функция точки области D. Очевидно, что $(v, u) \sim -\vec{a}$ и также $(u, -v) \sim -\vec{a}$.

ТЕОРЕМА I. *Необходимое и достаточное условие существования вектора* $\vec{a}$, *с которым данная пара функций* (u, v) *будет сопряженной в области* D, *состоит в том, что в каждой точке этой области*

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0, \quad (\nabla u)^2 = (\nabla v)^2 \tag{3}$$

(*эти функции предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми и подчиненными условию* (2) *везде в* D).

* Вообще везде в дальнейшем мы будем предполагать, что градиенты всех рассматриваемых нами функций отличны от нуля везде в области D.

Доказательство. Необходимость условия (3) вытекает из (1). Наоборот, из (3) следует (1), если положить

$$m\vec{a} = \nabla u \times \nabla v. \tag{4}$$

где

$$m = (\nabla u)^2. \tag{5}$$

Замечание. Очевидно, что для данной пары (u, v) этот вектор $\vec{a}$ однозначно определяется и притом с помощью уравнений (4) и (5), так что всегда

$$\vec{a}^2 = 1. \tag{6}$$

Полагая здесь и далее $\vec{a} = (p, q, s)$ (так всегда записываем выражение вектора через его проекции на оси координат), находим из (4)

$$mp = \frac{d(u, v)}{d(y, z)}, \qquad mq = \frac{d(u, v)}{d(z, x)}, \qquad ms = \frac{d(u, v)}{d(x, y)}. \tag{7}$$

Заметим также, что всегда полагаем $\zeta = u + iv$.

Условие (3) примет вид

$$(\nabla\zeta)^2 = 0. \tag{3'}$$

Соотношение $(u, v) \sim \vec{a}$ будем писать так: $\zeta \sim \vec{a}$.

2. Примеры. — 1°. $u = z$, $v = \rho$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2°. $u = z^2 - \rho^2$, $v = 2z\rho$. В этих примерах $\rho\vec{a} = (-y, x, 0)$.

3°. $\zeta = u_0 + iv_0$ или $\zeta = f(u_0 \pm iv_0)$,

где

$$u_0 + iv_0 = \frac{x - \alpha + i(y - \beta)}{z - \gamma + r}, \tag{8}$$

$$r = +\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}, \tag{9}$$

$f(u_0 + iv_0)$ — произвольная аналитическая функция, не имеющая особых точек для значений $u_0 + iv_0$, соответствующих точкам области D, в которой $\zeta \sim \vec{a}$; α, β, γ — произвольные постоянные, такие, конечно, чтобы $u_0 + iv_0$ была непрерывно дифференцируемой в области D (подробнее об этом см. § 5).

Кроме того, рассматриваются только такие значения аргумента аналитической функции $f(u_0 + iv_0)$, для которых производная этой функции по ее комплексному аргументу отлична от нуля (все эти оговорки необходимо иметь в виду, когда в дальнейшем будем говорить об аналитической функции $f(u + iv)$, если $(u, v) \sim \vec{a}$ в некоторой области, например, в следующем примере 4°; значение этих оговорок выясняется далее — в теореме IV § 3).

Для функции (8) имеем

$$u_0 + iv_0 \sim \vec{a}, \qquad u_0 - iv_0 \sim -\vec{a},$$

где

$$\vec{a} = \left(\frac{x - \alpha}{r}, \frac{y - \beta}{r}, \frac{z - \gamma}{r}\right). \tag{10}$$

Поэтому (§ 3, теорема IV) $f(u_0 \pm iv_0) \sim \pm \vec{a}$.

4°. Комплексные линейные функции от x, y, z и аналитические функции от этих линейных функций: $\zeta = u_1 + iv_1$ или $\zeta = f(u_1 \pm iv_1)$, где

$$u_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \qquad v_1 = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta', \tag{11}$$

причем, если положить

$$\vec{b} = (\alpha; \beta, \gamma), \quad \vec{c} = (\alpha', \beta', \gamma'), \quad \vec{a} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|},$$

то должны иметь (необходимое и достаточное условие):

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \quad |\vec{b}| = |\vec{c}|,$$

причем $\vec{b} \neq 0$, $\vec{c} \neq 0$. В этом случае $f(u_1 \pm iv_1) \sim \pm \vec{a}$. Здесь $f(u_1 + iv_1)$ — произвольная аналитическая функция, не имеющая особых точек для значений $u_1 + iv_1$, соответствующих точкам области D.

Отметим случай, когда вектор $\vec{a}$ есть градиент некоторой функции $\varphi(x, y, z)$, так что уравнения (1) получат вид

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix}, \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{I}$$

В случае $\varphi = z$ эти уравнения переходят в известные уравнения Коши — Римана и $u + iv$ в этом случае представляет собой аналитическую функцию от $x + iy$.

Основная задача. Для данной области D найти все такие функции (u, v, φ), для которых везде в этой области выполняются условия (I) (область D берем конечного диаметра).

Эта задача разрешена полностью в § 5 *.

§ 2. Основные результаты

1. Решениями основной задачи являются функции примеров 3° и 4° и только эти функции (в этом случае $\vec{a} = \nabla \varphi$, где φ — бигармоническая; u, v — гармонические).

2. Всевозможные пары гармонических функций (u, v), из которых каждая сопряжена с некоторыми вектором $\vec{a}$, образуют множество всех решений каждой из следующих задач.

---

* Функции u, v предполагаем, как всегда, дважды непрерывно дифференцируемыми, причем их градиенты отличны от нуля везде в D.

Задача II. Найти все такие комплексные гармонические функции $u+iv$ от (x, y, z), чтобы произвольная аналитическая $F(u \pm iv)$ была также комплексной гармонической функцией от (x, y, z) *.

Задача III. Найти все такие комплексные гармонические функции $u+iv$ от (x, y, z), чтобы во всякой точке регулярности такой функции нашлось для любого направления l ортогональное к нему направление t, для которого имеем в этой точке

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{M}$$

причем направление t можно сделать каким угодно при подходящем выборе направления l. Эти две задачи решены в § 6.

3. Три гармонические функции не могут иметь во всех точках какой-нибудь области попарно ортогональные и равные по длине градиенты, если хоть одна из этих функций не линейная (см. § 8).

§ 3. Основные свойства сопряженных функций

Отметим основные свойства функций, подчиненных условиям (3), как гармонических, так и не гармонических. Изучаем течение векторных линий поля $\vec{a}$, которые будем всегда называть L-линиями. Всякая такая линия получается, как пересечение поверхностей $u=C_1$, $u=C_2$, и мы отнесем этой L-линии точку (C_1, C_2) плоскости переменного $\zeta=u+iv$. В каждой точке области D вследствие (6) хотя один из якобианов системы (7) отличен от нуля. Поэтому для всякой точки области D найдется такая ее окрестность B, что 1) между множеством всех L-линий, расположенных внутри B, и множеством соответствующих точек (C_1, C_2) имеется взаимно однозначное и непрерывное соответствие, причем эти точки (C_1, C_2) образуют некоторую область Ω на плоскости переменного ζ; 2) всякая непрерывно дифференцируемая функция точки области B является непрерывно дифференцируемой функцией от (u, v, t), где или $t=x$, или $t=y$, или $t=z$. Эту область Ω назовем соответствующей окрестности B.

Будем всегда считать эту окрестность B образованной отрезками L-линий, начала которых лежат на одной плоскости, перпендикулярной оси t, и образуют одно основание B, а концы — на другой плоскости, перпендикулярной оси t, и образуют другое основание B. Заметим, что ось t — это та из осей x, y, z, для которой $\vec{a} \cdot \nabla t$ отлично от нуля в каждой точке области B.

ТЕОРЕМА II. *Пусть в данной области $\zeta \sim \vec{a}$ и пусть Q — такая непрерывно дифференцируемая функция в этой области, что в каждой точке области $\nabla Q \cdot \vec{a}=0$. Тогда найдется такая окрестность всякой точки области, что Q есть непрерывно дифференцируемая функция точки (u, v) в соответствующей области Ω.*

---

* Эта задача, в сущности, не нова. С. Л. Соболев и В. И. Смирнов решили аналогичную задачу для волнового уравнения, откуда сразу получается решение задачи II, если преобразовать волновое уравнение Лапласа известной заменой независимых переменных (см., например, [4]).

В самом деле, в окрестности B имеем

$$\nabla Q=\frac{\partial Q}{\partial u}\nabla u+\frac{\partial Q}{\partial v}\nabla v+\frac{\partial Q}{\partial t}\nabla t, \quad \nabla Q\cdot\vec{a}=\frac{\partial Q}{\partial t}(\nabla t\cdot\vec{a}).$$

Из условий теоремы отсюда следует, что везде в B $\frac{\partial Q}{\partial t}=0$, что и нужно.

ТЕОРЕМА III. *Если в некоторой области две пары функций сопряжены с одним и тем же вектором, скажем, если $(u, v)\sim\vec{a}$ и $(P, Q)\sim\vec{a}$, тогда в каждой из областей Ω $P+iQ$ есть аналитическая регулярная функция от $u+iv$ с производной, отличной от нуля в этой области.*

В самом деле, в силу соотношения $(P, Q)\sim\vec{a}$ везде в данной области $\vec{a}\cdot\nabla Z=0$, где $Z=P+iQ$. По теореме II в любой области Ω $Z=f(u, v)$, причем в каждой точке области Ω

$$f_u^2+f_v^2=0, \tag{12}$$

так как $(\nabla Z)^2=0$ (ср. уравнение (3')) и $(\nabla Z)^2=m(f_u^2+f_v^2)$ (см. (4) и (5)). Кроме того, $\nabla P\times\nabla Q=h\nabla u\times\nabla v$, где $h=m^{-1}(\nabla P)^2$ и потому $h>0$, а также

$$\frac{d(P, Q)}{d(x, y)}=h\frac{d(u, v)}{d(x, y)}$$

и аналогично для координат (y, z) и (z, x). Отсюда в каждой точке области Ω

$$\frac{d(P, Q)}{d(u, v)}>0$$

и, значит, в силу (12), $f_u+if_v=0$, что и нужно. При этом, в силу известных уравнений Коши — Римана, $\nabla P\times\nabla Q=(P_u^2+Q_v^2)\nabla u\times\nabla v$ и, значит, P_u+iQ_u отлична от нуля.

ТЕОРЕМА IV. *Если в некоторой области D $(u, v)\sim\vec{a}$ и значения, принимаемые переменной $\zeta=u+iv$ в этой области D, принадлежат области регулярности аналитической функции $f(\zeta)$, то, полагая $f(\zeta)=P+iQ$ и считая $\frac{df}{d\zeta}\neq 0$ для указанных значений ζ, имеем в области D: $(P, Q)\sim\vec{a}$.*

Доказательство. Имеем $P=P(u, v)$, $Q=Q(u, v)$,

$$\nabla P=P_u\nabla u+P_v\nabla v, \quad \nabla Q=Q_u\nabla u+Q_v\nabla v.$$

Отсюда и из известных уравнений Коши — Римана выводим, в силу $(u, v)\sim\vec{a}$,

$$\vec{a}\times\nabla P=\nabla Q, \quad \nabla Q\times\vec{a}=\nabla P$$

и, кроме того,

$$\nabla P\times\nabla Q=(P_u^2+Q_u^2)(\nabla u\times\nabla v).$$

ТЕОРЕМА V. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы две функции, сопряженные относительно $\vec{a}$ в некоторой области D, были гармоническими в этой области, состоит в том, что $\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{a}=0$ везде в D.*

Доказательство. Из $(u, v) \sim \vec{a}$ выводим, произведя операцию div над обеими частями уравнений (1):

$$\Delta v = \nabla u \cdot \operatorname{rot} \vec{a}, \quad \Delta u = -\nabla v \cdot \operatorname{rot} \vec{a}, \tag{13}$$

откуда и из (4) § 1 и следует теорема.

§ 4. Некоторые общие свойства векторного поля $\vec{a}$ в случае гармонических функций u, v

Пусть дано, что в каждой точке области D

$$(u, v) \sim \vec{a}, \quad \Delta u = 0, \quad \Delta v = 0, \tag{14}$$

Отсюда и из (13) найдем, что везде в области D

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \mu \vec{a}, \tag{15}$$

где μ — некоторая скалярная функция точки области D, так что

$$s_y - q_z = \mu p, \quad p_z - s_x = \mu q, \quad q_x - p_y = \mu s. \tag{16}$$

Так как $\vec{a}^2 = 1$, то из (15) следует прямолинейность всех L-линий в данной области (теорема Гамильтона — см. ([2]), стр. 322).

Установим теперь систему дифференциальных уравнений для функций μ и ω, где положено $\omega = \operatorname{div} \vec{a}$. Прежде всего на основании известных равенств $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$, $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$, найдем из (6) и (15)

$$\nabla \mu \cdot \vec{a} + \mu \omega = 0, \tag{17}$$

$$\vec{a} \cdot \nabla \omega - \vec{a} \cdot \Delta \vec{a} = \mu^2. \tag{18}$$

С другой стороны, из (6) получим дифференцированием по x (обозначим через $\vec{a}_x$ частную производную $\vec{a}$ по x и т. п.)

$$\vec{a} \cdot \vec{a}_x = 0, \tag{19}$$

$\vec{a}_x^2 = -\vec{a} \cdot \vec{a}_{xx}$ и аналогично для y и z, так что

$$\sum \vec{a}_x^2 = -\vec{a} \cdot \Delta \vec{a}, \tag{20}$$

где

$$\sum \vec{a}_x^2 = \vec{a}_x^2 + \vec{a}_y^2 + \vec{a}_z^2.$$

Из (18) и (20) находим

$$\vec{a} \cdot \nabla \omega - \mu^2 = -\sum \vec{a}_x^2. \tag{21}$$

Докажем теперь, что в произвольной точке M области D

$$\sum \vec{a}_x^2 = \frac{1}{2} (\omega^2 + \mu^2). \tag{22}$$

Для этого заметим, что $\operatorname{rot} (\vec{a} \times \nabla u) = 0$, откуда *

$$(\nabla u, \nabla) \vec{a} - (\vec{a}, \nabla) \nabla u + \vec{a} \Delta u - (\nabla u) \omega = 0, \tag{23}$$

$$* \quad (\nabla u, \nabla) \vec{a} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \vec{a}}{\partial z},$$

$$(\vec{a}, \nabla) \nabla u = p \frac{\partial \nabla u}{\partial x} + q \frac{\partial \nabla u}{\partial y} + s \frac{\partial \nabla a}{\partial z},$$

$$\vec{a} = (p, q, s).$$

а из уравнения $\nabla u \cdot \vec{a}=0$ выводим

$$\nabla u \cdot \vec{a}_x = -\vec{a} \cdot \nabla u_x;\ \nabla u \cdot \vec{a}_y = -\vec{a} \cdot \nabla u_y;\ \nabla u \cdot \vec{a}_z = -\vec{a} \cdot \nabla u_z. \tag{24}$$

Для сокращения выкладок возьмем «местную» систему координат, связанную со взятой точкой M, давая в этой системе осям x, y, z соответственно направления векторов Δu, Δv, $\vec{a}$, вычисленных в этой точке M. Для этих векторов в этой «местной» системе координат получим: $p=q=0$, $s=1$, $\frac{\partial \vec{a}}{\partial z}=0$ (в силу прямолинейности L-линий), а потому $p_z=q_z=s_z=0$. Кроме того, $u_y=u_z=0$. Поэтому уравнения (16), (23) и (24) получат следующий вид (учитывая еще, что $\Delta u=0$):

$$\mu = q_x - p_y, \quad s_x = s_y = 0, \tag{25}$$

$$u_x \vec{a}_x - \nabla u_z = \omega \nabla u, \tag{26}$$

$$u_x p_x = -u_{xz},\ u_x p_y = -u_{yz},\ u_{zz}=0, \tag{27}$$

откуда (заметив, что $\omega = p_x + q_y + s_z$) находим

$$\omega = 2p_x,\ q_x = -p_y,\ q_y = p_x,\ \mu = 2q_x,$$

а потому

$$\vec{a}_x = (p_x, q_x, 0), \quad \vec{a}_y = (-q_x, p_x, 0).$$

В этой «местной» системе координат формула (22) очевидна, а в силу (16) и (20) она будет справедливой и для любой системы (x, y, z) прямолинейных и прямоугольных координат.

Чтобы не возвращаться больше к этой «местной» системе координат, докажем тут же важную для дальнейшего формулу.

$$2\vec{a} \cdot [p(\vec{a}_y \times \vec{a}_z) + q(\vec{a}_z \times \vec{a}_x) + s(\vec{a}_x \times \vec{a}_y)] = \sum \vec{a}_x^2. \tag{28}$$

В «местной» системе координат эта формула для векторов, вычисленных в точке M, принимает следующий вид:

$$2\vec{a} \cdot (\vec{a}_x \times \vec{a}_y) = \sum \vec{a}_x^2 \tag{29}$$

и вполне очевидна.

Вернемся теперь к «старым координатам» x, y, z, обозначая «местные» координаты x, y через ξ, η, а направляющие косинусы этих «местных» осей — через (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$. «Местную» координату z назовем ζ. Имеем

$$\vec{a}_\xi = \alpha \vec{a}_x + \beta \vec{a}_y + \gamma \vec{a}_z, \quad \vec{a}_\eta = \alpha' \vec{a}_x + \beta' \vec{a}_y + \gamma' \vec{a}_z$$

и, вследствие (20),

$$\sum \vec{a}_x^2 = \vec{a}_\xi^2 + \vec{a}_\eta^2 + \vec{a}_\zeta^2.$$

Поэтому уравнение (29) и получит в «старых» координатах вид (28).

Далее, из (21) и (22) находим

$$2\nabla\omega\cdot\vec{a}=\mu^2-\omega^2. \qquad (30)$$

§ 5. Решение основной задачи

ТЕОРЕМА VI. *Если в некоторой области D имеем* $(u, v)\sim\nabla\varphi$, *тогда, полагая* $\omega=\Delta\varphi$, $\nabla\varphi=(p, q, s)$, *получим в каждой точке этой области*

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{\partial p}{\partial x}=\omega(1-p^2),\ 2\frac{\partial q}{\partial x}=-\omega pq,\ 2\frac{\partial s}{\partial x}=-\omega ps,\\ &2\frac{\partial p}{\partial y}=-\omega pq,\ 2\frac{\partial q}{\partial y}=\omega(1-q^2),\ 2\frac{\partial s}{\partial y}=-\omega qs,\\ &2\frac{\partial p}{\partial z}=-\omega ps,\ 2\frac{\partial q}{\partial z}=-\omega qs,\ 2\frac{\partial s}{\partial z}=\omega(1-s^2).\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Доказательство. Полагая $\nabla\varphi=\vec{a}$, получим, вследствие (4) и (6),

$$\left.\begin{aligned} \nabla p&=\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}=\alpha\nabla u+\beta\nabla v,\\ \nabla q&=\frac{\partial\vec{a}}{\partial y}=\alpha'\nabla u+\beta'\nabla v,\\ \nabla s&=\frac{\partial\vec{a}}{\partial z}=\alpha''\nabla u+\beta''\nabla v,\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

где α, α', ...— непрерывно дифференцируемые функции от x, y, z. Пусть

$$\vec{A}=(\alpha, \alpha', \alpha''),\quad \vec{B}=(\beta, \beta', \beta''), \vec{\Gamma}=\vec{A}\times\vec{B}$$

Равенство (28) получит вид

$$2\vec{a}\cdot\vec{\Gamma}=\vec{A}^2+\vec{B}^2. \qquad (33)$$

Далее (в силу (32) и очевидного равенства $p\nabla p+q\nabla q+s\nabla s=0$), $\vec{A}\cdot\vec{a}=0$, $\vec{B}\cdot\vec{a}=0$, и потому

$$\vec{\Gamma}=\lambda\nabla\varphi, \qquad (34)$$

где λ — функция точки (x, y, z), а значит, в силу (6) § 1,

$$\vec{\Gamma}^2=A^2\cdot B^2\cdot\sin^2\theta=\lambda^2, \qquad (35)$$

где θ — угол между векторами $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Из (33), (34), (35) находим

$$\frac{A^2+B^2}{2}=\lambda=A\cdot B\cdot\sin\theta.$$

Следовательно, либо $A=B=0$ и потому, в силу (32), левые части уравнений (31), а также ω равны нулю, так что эти уравнения имеют место, либо $\vec{A}\perp\vec{B}$, $A=B$, $\lambda>0$ и, стало быть, в силу (34),

$$\vec{A}=\vec{B}\times\nabla\varphi,\quad \vec{B}=\nabla\varphi\times\vec{A}. \qquad (36)$$

Теперь заметим, что из (32), в частности, находим

$$\left.\begin{aligned} q_x=\alpha u_y+\beta v_y,\quad p_y=\alpha' u_x+\beta' v_x,\\ s_x=\alpha u_z+\beta v_z,\quad p_z=\alpha'' u_x+\beta'' v_x,\\ s_y=\alpha' u_z+\beta' v_z,\ q_z=\alpha'' u_y+\beta'' v_y,\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

а так как $\operatorname{rot}\vec{a}=0$, то из (37) получим

$$A\times\nabla u=-(\bar{B}\times\nabla v). \qquad (38)$$

С другой стороны, из (1) и (36) выводим, что

$$\bar{A}\times\nabla u=\bar{B}\times\nabla v.$$

Отсюда и из (38) и (36) находим

$$\bar{A}=n\nabla u,\qquad \bar{B}=n\nabla v, \qquad (39)$$

где n — некая скалярная функция точки (x, y, z).

Введем векторы

$$\vec{P}=\bar{\vec{a}}_x-mn\vec{i},\quad \vec{Q}=\bar{a}_y-mn\vec{j},\quad \vec{R}=\bar{a}_z-mn\vec{k},$$

где, как всегда, m определяется из (5). Из (32) и (39) находим

$$\vec{P}\cdot\nabla u=\alpha m-mn\nabla u\cdot\vec{i}=\alpha m-\alpha m=0,\quad \vec{P}\cdot\nabla v=0$$

и потому $\vec{P}=\varepsilon\nabla\varphi$, где ε — скалярная функция точки (x, y, z) (см. равенство (4) § 1, в котором полагаем $\vec{a}=\nabla\varphi$). При этом, в силу (6) § 1

$$\varepsilon=\vec{P}\cdot\nabla\varphi=\vec{a}_x\cdot\vec{a}-mn\vec{a}\cdot\vec{i}=-mnp,$$

так что

$$\vec{P}=-mnp\nabla\varphi.$$

Таким же методом докажем, что

$$\vec{Q}=-mnq\nabla\varphi,\qquad \vec{R}=-mns\nabla\varphi$$

Отсюда и получим равенства (31) с заменой ω через $2mn$, но так как $\omega=p_x+q_y+s_z$; $p^2+q^2+s^2=1$, то получаем равенства (31) без всяких изменений.

ТЕОРЕМА VII. *При условиях теоремы* VI *в каждой точке области* D (*полагая* $\nabla\varphi=\vec{a}$)

$$2\nabla\omega=-\omega^2\vec{a}. \qquad (40)$$

Доказательство. Из равенства $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}=\nabla\operatorname{div}\vec{a}-\Delta\vec{a}$ найдем, в случае $\vec{a}=\nabla\varphi$, $\omega=\operatorname{div}\vec{a}$:

$$\nabla\omega=\Delta\vec{a}. \qquad (41)$$

Из (31) имеем:

$$2\vec{a}_x=\omega(\vec{i}-p\vec{a}),\quad 2\vec{a}_y=\omega(\vec{j}-q\vec{a}),\quad 2\vec{a}_z=\omega(\vec{k}-s\vec{a}) \qquad (42)$$

и потому

$$2\Delta\vec{a}=\nabla\omega-\omega^2\vec{a}-(\vec{a}\cdot\nabla\omega)\vec{a}-\omega\,(p\vec{a}_x+q\vec{a}_y+s\vec{a}_z). \qquad (43)$$

Из (21) и (22) § 3 при $\mu=0$ находим

$$2\vec{a}\cdot\nabla\omega=-\omega^2. \qquad (44)$$

Из (41), (42), (43) и (44) и следует (40)

Из (40) вытекает

Следствие. *В области D ω — гармоническая, а, значит, φ — бигармоническая.*

В самом деле,

$$2\Delta\omega = 2\operatorname{div}\nabla\omega = -\operatorname{div}(\omega^2\vec{a}) = -\omega^2\operatorname{div}\vec{a} - \vec{a}\cdot\nabla(\omega^2) =$$

$$= -\omega^3 - 2\omega(\vec{a}\cdot\nabla\omega) = -\omega^3 + \omega^3 = 0.$$

ТЕОРЕМА VIII. *При условиях теоремы* VI *имеем: либо во всей области D*

$$\varphi = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \tag{45}$$

либо во всей этой области

$$\varphi = \pm\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} + \delta, \tag{46}$$

где α, β, γ, δ — постоянные.

Доказательство. Если в области D повсюду $\omega = 0$, то имеем случай (45), вследствие (31), так как $\nabla\varphi = (p, q, s)$. В противном случае найдется внутри D такая область Δ, в каждой точке которой ω отлична от нуля. Построим в области Δ следующие функции:

$$\alpha(x, y, z) = x - \frac{2p}{\omega}, \quad \beta(x, y, z) = y - \frac{2q}{\omega}, \quad \gamma(x, y, z) = z - \frac{2s}{\omega}. \tag{47}$$

Имеем

$$\nabla\alpha = \nabla x + \frac{2p\nabla\omega}{\omega^2} - \frac{2\Delta p}{\omega},$$

откуда, вследствие (31) и (40), везде в Δ: $\nabla\alpha = 0$. Аналогично докажем постоянство β и γ в области Δ. Поэтому и из (47) имеем в Δ (помня, что $p^2 + q^2 + s^2 = 1$):

$$\frac{4}{\omega^2} = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2, \tag{48}$$

где α, β, γ — постоянные в Δ. По известному свойству гармонических функций соотношение (48) будет справедливо во всей области D (с постоянными α, β, γ).

Из (40) и (48) и вытекает (46), так как $\vec{a} = \nabla\varphi$.

Таким образом, выяснены *необходимые* условия, которым должна удовлетворять функция φ в силу соотношения $(u, v) \sim \nabla\varphi$.

Докажем теперь, что эти условия являются *достаточными*, т. е. в случаях (45) и (46) существуют такие пары функций (u, v), гармонических в области D, для которых в этой области $(u, v) \sim \nabla\varphi$; при этом будут найдены и общие выражения таких функций.

Пусть дается область D. Возьмем функцию $\varphi = r$, где r определяется уравнением (9) § 1, причем постоянную точку (α, β, γ) возьмем вне D. Легко проверить, что для гармонической функции $u_0 + iv_0$ определяемой уравнением (8), имеем в области D $(u, v) \sim \nabla\varphi$, если постоянную точку (α, β, γ) выбрать так, чтобы луч L_0, выходящий из

этой точки и одинаково направленный с отрицательным лучом оси z, целиком проходил вне области D, так как

$$u_0 + iv_0 = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot e^{\lambda i},$$

если

$$x - \alpha = r \sin \alpha \cos \lambda, \quad y - \beta = r \sin \alpha \sin \lambda, \quad z - \gamma = r \cos \alpha.$$

Заметим, что, полагая, как всегда, $\nabla\varphi = (p, q, s)$, имеем

$$u_0(s+1) = p, \quad v_0(s+1) = q, \tag{49}$$

$$x = \alpha + pr, \quad y = \beta + qr, \quad z = \gamma + sr. \tag{50}$$

Обозначим через Σ ту область поверхности сферы единичного радиуса с центром в точке (α, β, γ), которую пересекают все лучи, выходящие из этой точки и проходящие через точки области (открытой) D. Посредством уравнений (49) область Σ взаимно однозначно и непрерывно отображается на некоторую область Ω плоскости переменного $u_0 + iv_0$ Всякая непрерывно дифференцируемая в области D функция от (x, y, z) является непрерывно дифференцируемой функцией от (u_0, v_0, r) в некоторой области пространства (u_0, v_0, r), на которую взаимно однозначно и непрерывно отображается область D посредством уравнений (49) и (50).

Если в области D $(u, v) \sim \nabla r$, то $u + iv = f(u_0 + iv_0)$, $f(u_0 + iv_0)$ голоморфна в области Ω, причем производная этой функции отлична от нуля в области Ω. Наоборот, полагая для всякой такой функции $f(u_0 + iv_0) = u + iv$, получим $(u, v) \sim \nabla r$ в области D.

Доказательство этих теорем ведется так же, как и теорем III и IV § 3; роль координаты t играет r.

Таким образом, для $\vec{a} = \pm \nabla r$ решения уравнений (1) § 1 имеют вид $f(u_0 \pm iv_0)$, где $f(u_0 + iv_0)$ — любая аналитическая функция с указанными выше свойствами.

Остается случай (45), т. е. случай постоянных p, q и s в области D. В этом случае общее решение уравнений (1) имеет вид $f(u_1 + iv_1)$, где $u_1 + iv_1$ определена в § 1 (пример 4), так же как и f. В самом деле, так как $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}\, m$ (§ 1) ($\vec{a}$ считаем, конечно, неравным нулю), то, например, координаты x и y любой точки области D будут линейными функциями от u_1, v_1 и z (или y и z являются линейными функциями от u_1, v_1 и x и т. п.). Таким образом, вся область D играет роль окрестности B любой своей точки (§ 3) и общее решение уравнения (1) для данного постоянного вектора $\vec{a}$ имеет вид $f(u_1 \pm iv_1)$, где f — произвольная аналитическая функция, голоморфная в области Ω, соответствующей указанной окрестности B, причем производная этой функции $f(u_1 + iv_1)$ отлична от нуля в области Ω.

§ 6. Решение задач II и III

Задача II решается сразу с помощью формулы

$$\Delta f(\zeta) \equiv f'(\zeta)\, \Delta\zeta + f''(\zeta)\, (\nabla\zeta)^2 = 0 \tag{51}$$

и аналогичной формулы для $f(u-iv)$. Из (51) следует $(\nabla\zeta)^2=0$, — условие, необходимое и достаточное. Приходим к уравнениям (3) § 1, причем, конечно, рассматриваем такую область D, в которой ζ — гармоническая и ее градиент отличен от нуля. Поэтому выполняется условие (2) § 1. Эти гармонические функции можно получить методом, предложенным С. Л. Соболевым [3] и В. И. Смирновым [4] для нахождения комплексных решений волнового уравнения.

Переходим к решению задачи III и докажем сперва некоторые свойства функций $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$, непрерывных в какой-нибудь области D и непрерывно дифференцируемых в некоторой точке P этой области, причем градиенты этих функций предполагаем отличными от нуля в точке P. Мы скажем, что эти функции обладают свойством $M(u, v)$ в точке P, если для *всякого* направления l найдется такое направление t, ортогональное к l, что в точке P имеем равенство (M) § 2. Легко доказать, что из свойства $M(u, v)$ в точке P следует, что в этой точке $\nabla u \perp \nabla v$. В самом деле, пусть l — направление ∇v в точке P. Отсюда и из (M) следует, что в точке P $\frac{\partial u}{\partial l}=0$ и, значит, $\nabla u \perp l$, т. е. $\nabla u \perp \nabla v$. Наоборот, пусть в некоторой точке P $\nabla u \perp \nabla v$. Полагаем $|\nabla v| = \mu |\nabla u|$. Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — орты векторов ∇u, ∇v, $\nabla u \times \nabla v$. Возьмем *какой-нибудь* луч l, выходящий из точки P, и обозначим через γ угол этого луча с вектором ∇u. В случае $\mu \geqslant 1$ рассмотрим все такие лучи λ, выходящие из точки P, для которых $|\nabla v| \cos\delta = |\nabla u| \cos\gamma$, где δ — угол луча λ с вектором ∇v $(0 \leqslant \gamma \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$. Поэтому в точке P

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial \lambda}; \tag{52}$$

для ортов $\bar{l}$ и $\bar{\lambda}$ лучей l и λ находим

$$\left.\begin{aligned} \bar{l} &= \bar{e}_1 \cos\gamma + \bar{e}_2 \sin\gamma \cos\alpha + \bar{e}_3 \sin\gamma \sin\alpha, \\ \bar{\lambda} &= \bar{e}_1 \sin\delta \sin\beta + \bar{e}_2 \cos\delta + \bar{e}_3 \sin\delta \cos\beta, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

где α (соответственно, β) — угол геометрической проекции вектора $\bar{l}$ на плоскость $(\bar{e}_2, \bar{e}_3)$ с вектором $\bar{e}_2$ (соответственно, угол геометрической проекции вектора $\bar{\lambda}$ на плоскость $(\bar{e}_3, \bar{e}_1)$ с вектором $\bar{e}_3$).

ТЕОРЕМА IX. *Свойство $M(u, v)$ в точке P есть необходимое и достаточное условие того, чтобы в этой точке было*

$$\nabla u \perp \nabla v, \quad |\nabla v| \geqslant |\nabla u|.$$

Доказательство. — 1. Сохраняя введенные обозначения, покажем, как выбрать из всех лучей λ такой луч t, который был бы ортогональным к данному лучу l. Условие ортогональности лучей l и t на основании (53) может быть записано в виде

$$a \cos\beta + b \sin\beta = c, \tag{54}$$

$$(a = \sin\alpha \sin\gamma \sin\delta,\ \ b = \cos\gamma \sin\delta,\ \ c = -\sin\gamma \cos\alpha \cos\delta).$$

Здесь a, b, c — данные числа, β — искомое число. К уравнению (54) присоединяем уравнение, определяющее угол δ (один и тот же для всех лучей λ при заданном луче l):

$$\cos\delta = \frac{|\nabla u|}{|\nabla v|}\cos\gamma. \tag{55}$$

Пусть теперь в точке P имеем: либо

$$|\nabla v| > |\nabla u|, \tag{56}$$

либо

$$|\nabla v| = |\nabla u| \tag{57}$$

Из (55) и (56) или (57) следует

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2;$$

значит, луч t существует, так как уравнение (54) с неизвестным β имеет действительные решения.

2. Наоборот, из свойства $M(u, v)$, как мы уже отметили, следует ортогональность градиентов данных функций, а также при произвольном γ имеем (55), откуда получим (56) или (57).

Следствие. *Если функции* $u(x, y, z)$ *и* $v(x, y, z)$ *обладают везде в области* D *свойствами* $M(u, v)$ *и* $M(v, u)$, *то эти функции удовлетворяют условиям* (3) § 1 *везде в* D.

Тем самым и решена задача III § 2.

§ 7. Об аналитических функциях двух аргументов

Даны две комплексные функции

$$\zeta_1 = u_1 + iv_1, \quad \zeta_2 = u_2 + iv_2, \tag{58}$$

гармонические в некоторой области D, причем либо обе эти функции имеют вид (8) § 1 (в случае различных точек (α, β, γ) и лучей* L_0, проходящих вне области D, — см. § 5), либо одна из функций имеет вид (8) (и луч L_0 проходит вне D), а другая — вид (11).

Задача. Какие аналитические функции $f(\zeta_1, \zeta_2)$ будут гармоническими в области D, как функции от (x, y, z) (считая, конечно, что эти аналитические функции — регулярные для значений ζ_1, ζ_2, соответствующих точкам области D)?

Для решения поставленной задачи будет доказана

ЛЕММА. *Из комплексных векторных равенств*

$$(\vec{a} + i\vec{b})^2 = 0, \quad (\vec{p} + i\vec{q})^2 = 0, \quad (\vec{a} + i\vec{b})(\vec{p} + i\vec{q}) = 0, \tag{59}$$

следует компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ *(считаем векторы* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *отличными от нуля).*

---

* Напоминаем, что лучом L_0 для функции

$$\frac{x-\alpha+i(y-\beta)}{z-\gamma+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}$$

мы назвали луч, выходящий из точки (α, β, γ) и имеющий направление, противоположное оси z.

Доказательство. Равенства (59) понимаем, как равносильные следующим равенствам:

$$\left.\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{a}^2=\vec{b}^2,\quad \vec{p}\cdot\vec{q}=0,\quad \vec{p}^2=\vec{q}^2,\\&\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{b}\cdot\vec{q},\quad \vec{a}\cdot\vec{q}+\vec{b}\cdot\vec{p}=0.\end{aligned}\right\}\tag{60}$$

Пусть теперь $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. Можем написать

$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c},\quad \vec{q}=\alpha'\vec{a}+\beta'\vec{b}+\gamma'\vec{c},$$

где α, β, ...— некоторые скаляры. Находим $\vec{a}\cdot\vec{p}$, $\vec{b}\cdot\vec{q}$, $\vec{a}\cdot\vec{q}$, $\vec{b}\cdot\vec{p}$, и из (60) получим

$$\alpha=\beta',\quad \beta=-\alpha',$$

откуда и из равенства $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ получаем $\gamma\cdot\gamma'=0$. Из последнего равенства вследствие равенства модулей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а также $\vec{p}$ и $\vec{q}$, следует, что $\gamma=\gamma'=0$, и лемма доказана.

Следствие. *Для рассматриваемых функций ζ_1 и ζ_2 равенство $\nabla\zeta_1\cdot\nabla\zeta_2=0$ не может иметь места во всех точках какой-нибудь области, расположенной в D.*

В самом деле, во всех точках области D (ввиду равенства (3′) § 1)

$$(\nabla\zeta_1)^2=0,\quad (\nabla\zeta_2)^2=0.\tag{61}$$

С другой стороны, градиенты функций ζ_1, ζ_2 могут быть компланарными * в некоторой точке области D только в случае совпадений L-линий функций (58), проходящих через эту точку (§ 3 и § 4). Отсюда и из свойств L-линий функций (58) (§ 4) и получается доказательство следствия леммы.

Теперь поставленная выше задача легко решается. Имеем

$$\Delta f(\zeta_1,\zeta_2)=\frac{\partial f}{\partial\zeta_1}\Delta\zeta_1+\frac{\partial f}{\partial\zeta_2}\Delta\zeta_2+\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta_1^2}(\nabla\zeta_1)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta_2^2}(\nabla\zeta_2)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta_1\partial\zeta_2}\nabla\zeta_1\cdot\nabla\zeta_2$$

Откуда и в силу гармоничности функций (58), а также из следствия леммы следует, что $f(\zeta_1,\zeta_2)$ имеет вид

$$F(\zeta_1)+\Phi(\zeta_2),$$

где F и Φ — аналитические функции. Таким образом, привлечение аналитических функций двух комплексных аргументов нисколько не расширяет класса построенных нами комплексных гармонических функций, которые характеризуются тем свойством, что аналитическая функция от любой из них — опять гармоническая функция от x, y, z, причем имеют место уравнения (1) § 1, т. е. вектор $\vec{a}$ такой, что $\operatorname{rot}\vec{a}=0$.

§ 8. Свойство трех попарно сопряженных функций

Мы назовем три функции от (x, y, z) попарно сопряженными в некоторой области, если градиенты этих функций в каждой

* Градиенты функций ζ_1 и ζ_2 называем компланарными, если компланарны градиенты функций: u_1, v_1, u_2, v_2.

точке области попарно ортогональны и имеют равные модули, отличные от нуля.

ТЕОРЕМА X. *Всякие три функции, гармонические и попарно сопряженные в некоторой области, суть линейные функции от x, y, z.*

Доказательство. Пусть u, v, w — три функции, гармонические и попарно сопряженные в некоторой области D. Существует такой вектор $\vec{a}$, что в области D $(u, v) \sim \vec{a}$ (§ 1), причем везде в D $\vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ (§ 3, теорема V). Так как везде в D вектор $\vec{a}$ коллинеарен ∇w, то найдется такая функция $\varphi(x, y, z)$, что $\vec{a} = \nabla \varphi$ и поэтому имеем в D уравнения (I) § 1. (В самом деле, $\vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} = 0$, а отсюда и из теоремы V следует, что везде в D $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$). Кроме того, $w = f(\varphi)$, а потому $\Delta w = \frac{d^2 f}{d\varphi^2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{df}{d\varphi} \Delta \varphi$. Следовательно, везде в области D

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{df}{d\varphi} \Delta \varphi = 0. \qquad (62)$$

Далее (в силу теоремы VIII § 5), либо $\varphi = \pm r + c$, * либо φ — линейная функция от x, y, z. В первом случае из (62) найдем

$$w = \frac{c_0}{r} + c_1 \quad (c_0 \neq 0); \qquad (63)$$

но этот случай невозможен, так как функция (63) не может иметь сопряженной функции, хотя бы и не гармонической, относительно какого бы ни было вектора, т. е. не существует такой функции $f(x, y, z)$, чтобы во всех точках какой-нибудь области было: $(\nabla w)^2 = (\nabla f)^2$, $\nabla w \cdot \nabla f = 0$. В самом деле, из второго равенства следует, что f — функция от $\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$ и $\frac{y-\beta}{z-\gamma}$, где α, β, γ — постоянные, те же как и в выражении для r, а потому во всех точках прямой

$$x - \alpha = at, \quad y - \beta = bt, \quad z - \gamma = ct$$

имеем

$$(\nabla w)^2 = \frac{A}{t^4}, \quad (\nabla f)^2 = \frac{B}{t^2},$$

причем A и B не зависят от параметра t. Поэтому-то модули градиентов функций w и f и не могут быть равными во всех точках любой области.

Остается второй случай: φ — линейная функция от x, y, z. Но тогда из (62) следует, что w — линейная функция от x, y, z. Аналогично доказывается линейность остальных двух гармонических функций.

Заметим, что N. Cioranesco [1] в 1932 г. указал, что три гармонические функции, градиенты которых имеют равные модули и попарно ортогональны во всех точках области их регулярности, являются ре-

---

* Здесь $r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$.

шениями задачи: для каких трех гармонических функций (трех аргументов) u, v, w функция

$$\frac{1}{\sqrt{(u+\lambda)^2+(v+\mu)^2+(w+\nu)^2}}$$

будет гармонической при всяких значениях действительных параметров λ, μ, ν. Однако N. Cioranesco не доказал существования таких гармонических функций.

Из только что доказанной теоремы следует, что эти гармонические функции — линейные; получим банальный случай триортогональной системы плоскостей.

Поступило
3. VII. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cioranesco N., Sur les fonctions harmoniques conjuguées, Bulletin des sciences mathématiques, 56 (1932), 55—64.

[2] Бляшке В., Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна.—I. Элементарная дифференциальная геометрия, Москва, 1935.

[3] Соболев С. Л., Общая теория диффракции волн на римановых поверхностях, Труды математического института им. В. А. Стеклова, IX (1935), 67—69.

[4] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, стр. 404—408, 1939.

V. FÉDOROFF. SUR LA MONOGÉNÉITÉ DANS L'ESPACE

RÉSUMÉ

Désignons partout dans ce qui suit par u et v (ou P et Q) des fonctions réelles des variables réelles x, y et z uniformes et continues dans un domaine D ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre. Nous allons écrire

$$u+iv\sim\vec{a} \tag{1}$$

à condition qu'on ait pour chaque point de D:

$$\nabla u=\nabla v\times\vec{a},\quad \nabla v=\vec{a}\times\nabla u \text{ et } \nabla u\times\nabla v$$

n'est pas nul; $\vec{a}$ est un vecteur (fonction du point (x, y, z)) et $i^2=-1$. Il est évident que pour qu'une fonction $u+iv$ possède ce vecteur $\vec{a}$, il est nécessaire et suffisant qu'en chaque point de D on ait

$$\nabla u\cdot\nabla v=0,\quad (\nabla u)^2=(\nabla v)^2\neq 0. \tag{2}$$

Cette propriété (2) est équivalente à la propriété suivante: un point quelconque M de D étant donné, il existe pour chaque rayon l issu de M un rayon t (issu de M) tel, qu'on ait:

1° $t\perp l$;

2° $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial v}{\partial t}$ (en ce point M) et $\nabla u\neq 0$.

Remarquons que les fonctions u et v qui possèdent la propriété (2) peuvent être harmoniques ou non dans D. Par exemple, $u=\sqrt{x^2+y^2}$ et $v=z$, ou $u=x^2+y^2-z^2$, $v=2z\sqrt{x^2+y^2}$ etc. Cela posé, l'auteur parvient à démontrer les théorèmes suivants:

1. La relation (1) étant donnée on a

$$f(u+iv)\sim\vec{a},\qquad f(u-iv)\sim-\vec{a}$$

pour toute fonction analytique $f(u+iv)$ holomorphe et ayant une dérivée non nulle pour les valeurs de $u+iv$ dans D.

2. Il résulte des relations

$$u+iv\sim\vec{a},\quad P+iQ\sim\vec{a}$$

qu'il existe un certain voisinage B de chaque point de D tel que $P+iQ$ est une fonction analytique de $u+iv$ dans B, holomorphe et ayant la dérivée non nulle pour les valeurs de $u+iv$ dans B.

3. Soit $u+iv\sim\nabla\varphi(x, y, z)$, c'est-à-dire on a en chaque point de D

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\begin{vmatrix}\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z}\end{vmatrix};\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\begin{vmatrix}\frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x}\end{vmatrix};\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\begin{vmatrix}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}\end{vmatrix};\qquad \frac{\partial v}{\partial z}=\begin{vmatrix}\frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{vmatrix}$$

(et ∇u est différent de zéro dans D). Toutes les fonctions u, v et φ qui vérifient ces équations différentielles sont de la forme suivante: ou bien

$$\pm \varphi = r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2},$$

α, β et γ étant des constantes réelles arbitraires, ou bien φ est une fonction linéaire de x, y, z. La fonction $u+iv$ est harmonique et $u+iv = f(\zeta)$, où $f(\zeta)$ est une fonction analytique arbitraire et où on a: ou bien

$$\zeta = \frac{x-\alpha+i(y-\beta}{z-\gamma+r}$$

(dans le cas $\varphi = r$), ou bien

$$\zeta = ax + by + cz,$$

a, b, c étant des constantes complexes arbitraires à condition $a^2+b^2+c^2=0$ (la fonction φ étant linéaire en x, y et z).

4. Les fonctions u, v et w harmoniques dans un domaine et y vérifiant les équations:

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0, \quad \nabla v \cdot \nabla w = 0, \ \nabla u \cdot \nabla w = 0, \quad (\nabla u)^2 = (\nabla v)^2 = (\nabla w)^2$$

sont nécessairement les fonctions linéaires de x, y et z.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 275–290 Série mathématique

Н. И. АХИЕЗЕР

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ОБРАЩЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

Предметом настоящей статьи, примыкающей к одной из моих заметок (1), являются формулы обращения сингулярных интегралов, когда область интегрирования есть система интервалов числовой оси. В отличие от других работ (2), здесь не требуется, чтобы функции удовлетворяли условию Hölder'a, а рассматриваются сингулярные интегралы, как операторы в гильбертовых пространствах суммируемых функций. Существенную роль в этом исследовании играют некоторые ортогональные системы полиномов, которые выступают здесь вместо функций $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, как известно, переводимых оператором Hilbert'a

$$HF=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}{}' F(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}d\varphi$$

соответственно в $\sin n\theta$, $-\cos n\theta$ (штрих у знака интеграла означает, что интеграл рассматривается, как главное значение в смысле Cauchy).

§ 1

Обозначим через E ограниченное точечное множество, состоящее из конечного или бесконечного числа открытых интервалов

$$\ldots, (a_k, b_k), (a_{k+1}, b_{k+1}), \ldots \quad (a_k < b_k < a_{k+1}).$$

Будем говорить, что определенная на множестве E суммируемая функция $p(x) \geqslant 0$ *принадлежит классу* A, если почти всюду в E существует

$$\tilde{p}(x)=\frac{1}{\pi}\int_E{}' \frac{p(t)}{x-t}dt$$

(функцию $\tilde{p}(x)$ называют *сопряженной* с $p(x)$ в смысле M. Riesz'a) и если почти всюду в E

$$\tilde{p}(x)=\alpha+\mu x-\sum_k\frac{\mu_k}{x-\alpha_k},$$

где $\mu\geqslant 0$, $\mu_k>0$, числа α_k вещественны, $\alpha_k \bar{\in} E$, и число этих точек α_k в каждом дополнительном к E интервале конечно (при этом сумма в правой части вообще может отсутствовать).

ЛЕММА 1. *Если обе функции* $p(x)$, $q(x)=\frac{1}{p(x)}$ $(x\in E)$ *принадлежат классу* A, *так что почти всюду в* E

$$\tilde{p}(x)=\alpha+\mu x-\sum_k \frac{\mu_k}{x-\alpha_k}, \qquad \tilde{q}(x)=\beta+\nu x-\sum_k \frac{\nu_k}{x-\beta_k},$$

то совокупности $S_\alpha=\{\alpha_k\}$, $S_\beta=\{\beta_k\}$ *не имеют общих точек и*

$$\beta=0,\quad \nu=0,\quad \text{если}\quad \mu>0,$$
$$\beta=-\frac{1}{\alpha},\quad \nu=0,\quad \text{если}\quad \mu=0,\quad \alpha\neq 0,$$
$$\nu>0,\quad \text{если}\quad \mu=0,\quad \alpha=0$$

ЛЕММА 2. *Если* $p(x)\in A$ *и если функция* $q(x)=\frac{1}{p(x)}$ $(x\in E)$ *принадлежит* L_E^r *при каком-нибудь* $r>1$, *то* $q(x)\in A$.

Доказательство. Рассмотрим функции

$$F(z)=\frac{1}{\pi}\int_E \frac{p(u)}{z-u}du+\sum_k \frac{\mu_k}{z-\alpha_k}-\alpha-\mu z, \tag{1}$$

$$G(z)=\frac{1}{\pi}\int_E \frac{q(u)}{z-u}du+\sum_k \frac{\nu_k}{z-\beta_k}-\beta-\nu z. \tag{2}$$

Они регулярны в верхней полуплоскости. Кроме того, предельные значения этих функций почти всюду на множестве E существуют и равны

$$F(x)=\tilde{p}(x)-ip(x)+\sum_k \frac{\mu_k}{x-\alpha_k}-\alpha-\mu x=-ip(x),$$

$$G(x)=\tilde{q}(x)-iq(x)+\sum_k \frac{\nu_k}{x-\beta_k}-\beta-\nu x=-iq(x).$$

А так как $(x)=\frac{1}{p(x)}$ $(x\in E)$, то по теореме единственности

$$F(z)\,G(z)=-1,$$

откуда справедливость леммы 1 вытекает без всякого труда. Переходим ко второй лемме. Возьмем функцию (1). Ее мнимая часть в верхней полуплоскости отрицательна. Тем же свойством обладает и функция

$$G(z)=-\frac{1}{F(z)},$$

и мы должны показать, что эта функция $G(z)$ допускает представление (2). Опираясь на известную теорему теории функций, нетрудно убедиться в том, что $G(z)$ во всяком случае допускает представление

$$G(z)=-\beta-\nu z+\sum_k \frac{\nu_k}{z-\beta_k}+\frac{1}{\pi}\int_E \frac{d\omega(u)}{z-u},$$

где $\omega(u)$ — некоторая неубывающая функция ограниченной вариации, непрерывная на концах каждого из интервалов, входящих в E, а параметры удовлетворяют условиям, которые входят в определение класса A.

Если (a, b) — один из интервалов, образующих E, то, в силу формулы обращения Stieltjes'а, при $a < u < b$

$$\frac{\omega(u-0)+\omega(u+0)}{2} = \omega(a) - \lim_{\eta\to+0}\int_a^u IG(t+i\eta)\,dt.$$

Но при $\eta > 0$

$$0 < -IG(u+i\eta) \leqslant -\frac{1}{IF(u+i\eta)} \leqslant \frac{1}{\frac{1}{\pi}\int\limits_E \frac{\eta p(v)\,dv}{(u-v)^2+\eta^2}} \leqslant \frac{\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \frac{\eta q(v)\,dv}{(u-v)^2+\eta^2}}{\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_a^b \frac{\eta\,dv}{(u-v)^2+\eta^2}\right]^2}.$$

Поэтому при $a \leqslant u \leqslant b$, $0 < \eta \leqslant b-a$

$$0 < -IG(u+i\eta) \leqslant C\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\eta q(v)\,dv}{(u-v)^2+\eta^2} = Cq(u;\eta) \quad (C \leqslant 16). \tag{3}$$

Так как, в силу предположения, $q(x) \in L_E^r$ $(r > 1)$, то

$$\left\{\int_a^b |q(u,\eta)|^r\,du\right\}^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta\,dt}{t^2+\eta^2}\left\{\int_a^b |q(u)|^r\,du\right\}^{\frac{1}{r}} = \left\{\int_a^b |q(u)|^r\,du\right\}^{\frac{1}{r}};$$

следовательно, на основании (3), существует такая константа K, что

$$\int_a^b |IG(u+i\eta)|^r\,du < K \qquad (0 < \eta \leqslant b-a).$$

А поскольку почти всюду в E

$$\lim_{\eta\to+0} G(u+i\eta) = -\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{F(u+i\eta)} = -\frac{i}{p(u)} = -iq(u),$$

то

$$\lim_{\eta\to+0}\int_a^u IG(t+i\eta)\,dt = -\int_a^u q(t)\,dt \qquad (a < u < b)$$

и представление (2) доказано.

Замечание. Если $p(x) \in A$ и $p(x) \in L_E^r$ $(r > 1)$, то ни одна из точек множества S_a не может быть концом какого-нибудь из интервалов, образующих E. Действительно, в силу теоремы M. Riesz'а, при $p(x) \in L_E^r$ $(r > 1)$

$$\int_E |\widetilde{p}(x)|^r\,dx < \infty.$$

В дальнейшем мы всюду будем предполагать, что обе функции $p(x)$, $q(x) = \frac{1}{p(x)}$ $(x \in E)$ принадлежат классу A, и будем придерживаться обозначений леммы 1. Кроме того, положим

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^x p_1(t)\,dt + \sum_{\alpha_i \leqslant x}\mu_i; \qquad \tau(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^x q_1(t)\,dt + \sum_{\beta_i \leqslant x}\nu_i,$$

где

$$p_1(t)=\begin{cases} p(t) & (t\in E) \\ 0 & (t\bar{\in} E) \end{cases},\quad q_1(t)=\begin{cases} q(t) & (t\in E) \\ 0 & (t\bar{\in} E) \end{cases},$$

введем также гильбертовы пространства $L^2\{d\sigma(x)\}$, $L^2\{d\tau(x)\}$ со скалярными произведениями

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}\,d\sigma(x),\qquad \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\overline{g_2(x)}\,d\tau(x).$$

В этих пространствах построим полные ортонормированные системы полиномов $\{P_n(x)\}_0^\infty$, $\{Q_n(x)\}_0^\infty$.

ТЕОРЕМА 1. *При сделанных выше предположениях почти всюду в E и в каждой точке множества S_β, не принадлежащей $\bar{E}$:*

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{P_n(t)}{x-t}\,d\sigma(t)=\begin{cases} Q_{n+1}(x) & (\mu>0), \\ \operatorname{sign}\alpha\cdot Q_n(x) & (\mu=0,\ \alpha\neq 0), \\ -Q_{n-1}(x) & (\mu=0,\ \alpha=0), \end{cases}$$

и, равным образом, почти всюду в E и в каждой точке множества S_α, не принадлежащей $\bar{E}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{Q_n(t)}{x-t}\,d\tau(t)=\begin{cases} -P_{n-1}(x) & (\mu>0), \\ -\operatorname{sign}\alpha\cdot P_n(x) & (\mu=0,\ \alpha\neq 0), \\ P_{n+1}(x) & (\mu=0,\ \alpha=0). \end{cases}$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $\mu>0$. Полагая

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z)-P_n(t)}{z-t}\,d\sigma(t)=P_n^*(z),$$

так что $P_n^*(z)$ есть многочлен степени $n-1$, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(t)}{z-t}\,d\sigma(t)=P_n(z)\{F(z)+\alpha+\mu z\}-P_n^*(z).$$

Отсюда почти всюду в E

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{P_n(t)}{x-t}\,d\sigma(t)=(\alpha+\mu x)\,P_n(x)-P_n^*(x)$$

и, кроме того, если $\xi\in S_\beta$, $\xi\bar{\in}\bar{E}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(t)}{\xi-t}\,d\sigma(t)=(\alpha+\mu\xi)\,P_n(\xi)-P_n^*(\xi),$$

так как

$$F(\xi)=0.$$

Таким образом, остается доказать, что

$$(\alpha+\mu z)\,P_n(z)-P_n^*(z)=Q_{n+1}(z).$$

На основании общей теории ортогональных полиномов

$$F(z)+\alpha+\mu z=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(u)}{z-u}=\frac{P_n^*(z)}{P_n(z)}+O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right)\qquad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(u)}{z-u} = G(z) = -\frac{1}{F(z)} = \frac{P_n(z)}{(\alpha+\mu z)\,P_n(z) - P_n^*(z)} + O\left(\frac{1}{z^{2n+3}}\right)$$

$$(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Это соотношение показывает, что

$$(\alpha + \mu z)\,P_n(z) - P_n^*(z) = L_n\,Q_{n+1}(z) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

где L_n от z не зависит. Так как $L_n > 0$, то остается доказать, что $L_n^2 = 1$.

Положим

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^k\,d\sigma(u) = s_k, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} u^k\,d\tau(u) = t_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Так как

$$F(z) \sim -\mu z - \alpha + \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \ldots$$

и

$$-\frac{1}{F(z)} = G(z) \sim \frac{t_0}{z} + \frac{t_1}{z^2} + \frac{t_2}{z^3} + \ldots,$$

то

$$\left.\begin{array}{ll} \mu t_0 = 1, \quad \mu t_1 = -\alpha t_0, & \mu t_2 = -\alpha t_1 + s_0 t_0, \\ \mu t_3 = -\alpha t_2 + s_0 t_1 + s_1 t_0, & \mu t_4 = -\alpha t_3 + s_0 t_2 + s_1 t_1 + s_2 t_0, \ \ldots \end{array}\right\} \qquad (4)$$

С другой стороны, полиномы $P_k(z)$, $P_k^*(z)$ удовлетворяют одному и тому же конечно-разностному уравнению

$$z y_k = b_{k-1}\,y_{k-1} + a_k y_k + b_k y_{k+1} \qquad (k = 1,\ 2, \ldots), \qquad (5)$$

где

$$a_0 = \frac{s_1}{s_0}, \qquad b_0 = \frac{\sqrt{s_0 s_2 - s_1^2}}{s_0},$$

причем

$$P_0(z) = \frac{1}{\sqrt{s_0}}, \qquad P_1(z) = \frac{z - a_0}{b_0\sqrt{s_0}}, \qquad P_0^*(z) = 0, \qquad P_1^*(z) = \frac{\sqrt{s_0}}{b_0}.$$

Полагая в уравнении (5)

$$y_k = (\alpha + \mu z)\,P_k(z) - P_k^*(z) = L_k\,Q_{k+1}(z) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

найдем, что

$$zQ_{k+1}(z) = \frac{b_{k-1}L_{k-1}}{L_k}\,Q_k(z) + a_k\,Q_{k+1}(z) + \frac{b_k L_{k+1}}{L_k}\,Q_{k+2}(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением

$$zQ_{k+1}(z) = B_k Q_k(z) + A_{k+1} Q_{k+1}(z) + B_{k+1}\,Q_{k+2}(z) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

которому удовлетворяют полиномы $Q_n(z)$, находим, что

$$B_k = \frac{b_{k-1} L_{k-1}}{L_k} \quad (k=1, 2, \ldots),$$

$$B_k = \frac{b_{k-1} L_k}{L_{k-1}} \quad (k=2, 3, \ldots).$$

Сравнение этих формул дает

$$L_k^2 = L_{k-1}^2 \quad (k=2, 3, \ldots).$$

Далее, основанное на соотношениях (4) вычисление показывает, что $B_1 = b_0$, и, значит,

$$L_1 = L_0.$$

Наконец,

$$L_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \{(\alpha + \mu u) P_0(u) - P_0^*(u)\}^2 d\tau(u) = \frac{1}{s_0}(\alpha^2 t_0 + 2\alpha\mu t_1 + \mu^2 t_2) = 1.$$

Поэтому

$$L_k^2 = 1 \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

и наше утверждение доказано.

Желая рассматривать функции, определенные только на множестве E, введем гильбертовы пространства $L_E^2\{p(x)\}$, $L_E^2\{q(x)\}$ со скалярными произведениями

$$\int_E p(x) f_1(x) \overline{f_2(x)}\, dx, \qquad \int_E q(x) g_1(x) \overline{g_2(x)}\, dx.$$

Далее, обозначим через $H\{p(x)\}$ совокупность всех функций $f(x)$ из $L_E^2\{p(x)\}$, которые ортогональны функции

$$\frac{1}{x-c}$$

при каждом $c \in S_\beta$ и еще функции (1), если $\nu > 0$, и аналогично определим $H\{q(x)\} \subset L_E^2\{q(x)\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть обе функции $p(x)$, $q(x)$ принадлежат L_E^r $(r > 1)$ и пусть, кроме того, ни одна из точек*

$$a = \lim_{i \to -\infty} a_i, \qquad b = \lim_{i \to \infty} b_i,$$

если E состоит из бесконечного числа интервалов, не принадлежит ни S_α, ни S_β. Тогда, какова бы ни была функция $g(x) \in H\{q(x)\}$, уравнение

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_E' p(t) \frac{f(t)}{x-t} dt \tag{6}$$

имеет (почти всюду в E) решение $f(x) \in H\{p(x)\}$; это решение в существенном единственно и дается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_E' q(t) \frac{g(t)}{t-x} dt \tag{7}$$

почти всюду в E.

Даваемое соотношениями (6), (7) *отображение* $H\{p(x)\}$ *на* $H\{q(x)\}$ *изометрично:*

$$\int\limits_E p(x)\,|f(x)|^2\,dx = \int\limits_E q(x)\,|g(x)|^2\,dx. \tag{8}$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением того случая (см. лемму 1), когда $\mu=0$, $\alpha\neq 0$, причем для определенности примем, что $\alpha>0$. Убедимся прежде всего в том, что оператор

$$T_p f = \frac{1}{\pi}\int\limits_E{}' p(t)\,\frac{f(t)}{x-t}\,dt \quad (x\in E)$$

определен всюду в $L_E^2\{p(x)\}$, и что его область значений принадлежит $L_E^2\{q(x)\}$. Так как $p(x)\in L_E^r$ $(r>1)$, то из $f(x)\in L_E^2\{p(x)\}$ следует, что $p(x)f(x)\in L_E^{\frac{2r}{r+1}}$. Отсюда, на основании известной теоремы M. Riesz'а о сопряженных функциях, вытекает, что интеграл (6) существует почти всюду и представляет функцию $g(x)$, для которой

$$\int\limits_E |g(x)|^{\frac{2r}{r+1}}\,dx \leqslant A_r\left\{\int\limits_E [p(x)]^r\,dx\right\}^{\frac{1}{r+1}}\left\{\int\limits_E p(x)\,|f(x)|^2\,dx\right\}^{\frac{r}{r+1}}, \tag{9}$$

где A_r зависит только от r. Доопределим функцию $f(x)$ на множестве S_α, полагая $f(\alpha_i)=0$, и введем в рассмотрение ряд Fourier функции $f(x)$

$$f(x)\sim\sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x),$$

где

$$c_m=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,P_m(x)\,d\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_E p(x)\,f(x)\,P_m(x)\,dx.$$

Положим, далее,

$$f_n(x)=\sum_{m=0}^{n} c_m P_m(x).$$

Тогда почти всюду в E и во всех точках множества S_β

$$h_n(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{f_n(t)}{x-t}\,d\sigma(t)=\sum_{m=0}^{n} c_m Q_m(x).$$

При этом

$$h_n(x)=g_n(x)+\lambda_n(x), \tag{10_1}$$

где

$$g_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_E{}' p(t)\frac{f_n(t)}{x-t}\,dt, \qquad \lambda_n(x)=\sum_k\frac{\mu_k f_n(\alpha_k)}{x-\alpha_k}.$$

Но в силу (9)

$$\int_E |g(x)-g_n(x)|^{\frac{2r}{r+1}}dx \leqslant B_r\left\{\int_E p(x)|f(x)-f_n(x)|^2 dx\right\}^{\frac{r}{r+1}};$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |g(x)-g_n(x)|^{\frac{2r}{r+1}}dx=0. \qquad (10_2)$$

С другой стороны, для любого $x\in E$

$$|\lambda_n(x)|\leqslant\frac{1}{\inf\limits_k|x-\alpha_k|}\sqrt{\sum_i\mu_i}\cdot\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_n(x)|^2 d\sigma(x)}$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(x)=0. \qquad (10_3)$$

Наконец,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h_n(x)-h_m(x)|^2 d\tau(x)=\sum_{k=m+1}^{n}|c_k|^2,$$

откуда

$$\lim_{m,\,n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|h_n(x)-h_m(x)|^2 d\tau(x)=0. \qquad (10_4)$$

Сопоставляя соотношения (10) между собою, мы приходим к выводу что $g(x)\in L^2_E\{q(x)\}$ и

$$g(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_k Q_k(x). \qquad (11)$$

Если мы будем определять функцию $g(x)$ с помощью (6) не только на множестве E, но и в точках множества S_β, то найдем, что

$$g(\beta_i)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k Q_k(\beta_i).$$

Действительно, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}|Q_k(\beta_i)|^2$$

сходится и, в силу теоремы 1,

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k Q_k(\beta_i)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sum_{k=0}^{\infty}P_k(x)Q_k(\beta_i)\,d\sigma(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{\beta_i-x}d\sigma(x).$$

Мы видим также, что если $f(x)\in H\{p(x)\}$, то $g(x)$ обращается в нуль во всех точках множества S_β. Поэтому, в силу (11), имеет место равенство (8). Покажем еще, что $g(x)\in H\{q(x)\}$, т. е., что $g(x)$ ортогональна $\frac{1}{x-\alpha_i}$ для всех $\alpha_i\in S_\alpha$.

Имеем снова, в силу теоремы 1,

$$\frac{1}{\pi}\int_E \frac{g(x)}{x-\alpha_i}\, q(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(x)}{x-\alpha_i}\, d\tau(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(\alpha_i) = f(\alpha_i) = 0.$$

Окончание доказательства труда не представляет.

§ 2

Переходя к примерам, примем вначале, что E состоит из конечного числа (конечных) интервалов

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots, (a_N, b_N)$$

и положим

$$R_a^b(x) = \sqrt{-\prod_{i=1}^{N} \frac{x-b_i}{x-a_i}} \geqslant 0 \quad (x \in E).$$

Пусть

$$p(x) = R_a^b(x)\left(\frac{x-a_2}{x-b_1}\right)^{\varepsilon_1} \cdots \left(\frac{x-a_N}{x-b_{N-1}}\right)^{\varepsilon_{N-1}},$$

причем каждое ε_i равно 0 или 1. Эта функция, как и $q(x) = \frac{1}{p(x)}$, принадлежит классу A, причем

$$\tilde{p}(x) = 1, \quad \tilde{q}(x) = -1 \quad (x \in E),$$

а также пространству L_E^r при $1 \leqslant r < 2$.

Ортогональные полиномы, отвечающие весам $p(x)$, $q(x)$, являются обобщением полиномов Чебышева

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}, \qquad \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} \quad (x = \cos\theta),$$

для которых общая теорема 1 непосредственно связана с упомянутым во введении свойством оператора Hilbert'а.

Беря

$$p(x) = R_a^b(x)\,(x-a_1)\left(\frac{x-a_2}{x-b_1}\right)^{\varepsilon_1} \cdots \left(\frac{x-a_N}{x-b_{N-1}}\right)^{\varepsilon_{N-1}},$$

найдем, что

$$\tilde{p}(x) = x - a_1 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(b_k - a_k) - \sum_{k=2}^{N} \varepsilon_{k-1}(a_k - b_{k-1}), \quad \tilde{q}(x) = 0.$$

Соответствующие ортогональные полиномы являются обобщением полиномов Чебышева

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad \cos n\theta \quad (x = \cos\theta).$$

Применяя теорему 2, получим некоторые формулы обращения. С помощью надлежащего дробно-линейного преобразования можно перейти

от этих формул к формулам обращения для случая, когда E содержит бесконечный интервал.

Вот относящаяся сюда простейшая

ТЕОРЕМА 3. *Пусть E состоит из $N(<\infty)$ интервалов*

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_N, b_N) \quad (a_1 \geqslant -\infty,\ b_N \leqslant \infty),$$

и пусть

$$p(x)=\begin{cases} \sqrt{-\dfrac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_N)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_N)}} & (a_1>-\infty,\ b_N<\infty),\\ \sqrt{\dfrac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{N-1})}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_N)}} & (a_1>-\infty,\ b_N=\infty),\\ \sqrt{\dfrac{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{N-1})}{(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_N)}} & (a_1=-\infty,\ b_N=\infty).\end{cases}$$

Тогда, какова бы ни была функция $g(x)\in L_E^2\{q(x)\}$, уравнение

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_E{}' p(t)\frac{f(t)}{x-t}\,dt \quad (\text{почти всюду в } E)$$

имеет в существенном одно решение $f(x)\in L_E^2\{p(x)\}$; это решение дается формулой

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_E{}' g(t)\,\frac{g(t)}{t-x}\,dt \quad (\text{почти всюду в } E);$$

при этом

$$\int_E p(x)\,|f(x)|^2\,dx=\int_E q(x)\,|g(x)|^2\,dx.$$

Подвергая переменную преобразованию

$$x=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

получаем формулы обращения интегралов с ядром Hilbert'а. Соответствующее предложение удобно представить в следующей форме.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть E состоит из $N(<\infty)$ интервалов*

$$(\alpha_1, \beta_1),\ (\alpha_2, \beta_2),\ \ldots,\ (\alpha_N, \beta_N),$$

где

$$-\pi<\alpha_1<\beta_1<\cdots<\alpha_N<\beta_N<\pi,$$

и пусть

$$p(\theta)=\sqrt{-\frac{\sin\frac{1}{2}(\theta-\beta_1)\cdots\sin\frac{1}{2}(\theta-\beta_N)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha_1)\cdots\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha_N)}}\,, \quad q(\theta)=\frac{1}{p(\theta)}$$

$$\Omega=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}(\beta_k-\alpha_k).$$

Тогда, каковы бы ни были функция $f(\theta)\in L_E^2\{p(\theta)\}$ и константа A, уравнение

$$f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_E{}' q(\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}\,g(\varphi)\,d\varphi+A \quad (\text{почти всюду в } E)$$

имеет в существенном одно решение $g(\theta) \in L_E^2\{q(\theta)\}$; *это решение дается формулой*

$$g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_E' p(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \varphi}{2} f(\varphi)\, d\varphi + B \quad (\textit{почти всюду в } E),$$

где константа B *должна быть найдена из соотношений*

$$\frac{1}{2\pi} \int_E p(\varphi) f(\varphi)\, d\varphi - \frac{\cos \Omega}{2\pi} \int_E q(\varphi) g(\varphi)\, d\varphi = A \sin \Omega,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_E q(\varphi) g(\varphi)\, d\varphi - \frac{\cos \Omega}{2\pi} \int_E p(\varphi) f(\varphi)\, d\varphi = B \sin \Omega.$$

При этом имеет место равенство

$$\int_E p(\varphi) \,|f(\varphi)|^2 \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \int_E q(\varphi) \,|g(\varphi)|^2 \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Далее, если $H\{p(\theta)\}$ *есть совокупность функций* $F(\theta) \in L_E\{p(\theta)\}$, *для которых*

$$\int_E p(\theta) F(\theta)\, d\theta = 0,$$

и аналогичный смысл имеет $H\{q(\theta)\}$, *то соотношения*

$$F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_E' q(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \theta}{2} G(\varphi)\, d\varphi \quad (\textit{почти всюду в } E)$$

$$G(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_E' p(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\theta - \varphi}{2} F(\varphi)\, d\varphi \quad (\textit{почти всюду в } E),$$

каждое из которых является обращением другого, дают изометрическое отображение $H\{q(\theta)\}$ *на* $H\{p(\theta)\}$.

Замечание. Аналогичное теореме 4 предложение справедливо для интегралов с ядром

$$\operatorname{cth} \frac{x - y}{2}.$$

§ 3

Рассмотрим теперь один интересный пример, в котором E состоит из бесчисленного множества интервалов (a_n, b_n), концы которых имеют абсциссы

$$a_n = \operatorname{th}(-a + nl), \quad b_n = \operatorname{th}(a + nl) \quad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, \ldots),$$

где

$$0 < a < \frac{l}{2},$$

так что

$$\lim_{n \to -\infty} a_n = -1, \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 1.$$

Положим

$$p(x)=\sqrt{-\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{b_k-x}{a_k-x}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sh}(a-\xi)}{\operatorname{sh}(a+\xi)}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(a+nl-\xi)\operatorname{sh}(a-nl-\xi)}{\operatorname{sh}(a+nl+\xi)\operatorname{sh}(a-nl+\xi)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\vartheta_1\left(\frac{ia-i\xi}{\pi};\ e^{-l}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{ia+i\xi}{\pi};\ e^{-l}\right)}}=e^{-\frac{2a}{l}\xi}\sqrt{\frac{\vartheta_1\left(\frac{a-\xi}{l};h\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a+\xi}{l};h\right)}},$$

где

$$x=\operatorname{th}\xi,\quad h=e^{-\frac{\pi^2}{l}}$$

и

$$\vartheta_1(u;h)=2\sqrt[4]{h}\sin\pi u-2\sqrt[4]{h^9}\sin 3\pi u+\ldots$$

Мы будем для краткости вместо $\vartheta_1(u;h)$ писать просто $\vartheta_1(u)$. Легко видеть, что обе функции $p(x)$, $q(x)=\frac{1}{p(x)}$ принадлежат L_E^r при $1\leqslant r<2$. Кроме того, легко проверить, что почти всюду в E

$$\tilde{p}(x)=1,\quad \tilde{q}(x)=-1.$$

Поэтому теоремы § 1 имеют место.

Мы можем написать следующие формулы обращения:

$$g(\xi)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-a+nl}^{a+nl}\sqrt{\frac{\vartheta_1\left(\frac{a-u}{l}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a+u}{l}\right)}}\,e^{\frac{-2au}{l}}\{\operatorname{cth}(\xi-u)+\operatorname{th}u\}f(u)\,du,\qquad(1)$$

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-a+nl}^{a+nl}\sqrt{\frac{\vartheta_1\left(\frac{a+u}{l}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a-u}{l}\right)}}\,e^{\frac{2au}{l}}\{\operatorname{cth}(u-\xi)-\operatorname{th}u\}g(u)\,du.\qquad(2)$$

Соотношение (2) будем рассматривать, как уравнение относительно $g(\xi)$, и примем, что

$$f(\xi)=e^{\frac{a}{l}\xi}\Phi(\xi),$$

где $\Phi(\xi)$ имеет период l и удовлетворяет условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-a+nl}^{a+nl}\sqrt{\frac{\vartheta_1\left(\frac{a-u}{l}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a+u}{l}\right)}}\,e^{\frac{-au}{l}}(1+\operatorname{th}u)\Phi(u)\,du=0.$$

Такое предположение допустимо, так как функция $f(\xi)$ должна удовлетворять неравенству

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-a+nl}^{a+nl}\sqrt{\frac{\vartheta_1\left(\frac{a-u}{l}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a+u}{l}\right)}}\,e^{\frac{-2au}{l}}\,|f(u)|^2\frac{du}{\operatorname{ch}^2 u}<\infty,$$

левая часть которого равна

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-a+nl}^{a+nl} \sqrt{\frac{\vartheta_1\left(\frac{a+u}{l}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a-u}{l}\right)}}\, e^{\frac{2au}{l}} \, |g(u)|^2 \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u},$$

а в остальном произвольна.

Решение уравнения (2) дается формулой (1), которая, в силу сделанных относительно $f(\xi)$ предположений, принимает вид

$$e^{\frac{a}{l}\xi} g(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a}{}' \sqrt{\frac{\vartheta_1\left(\frac{a-u}{l}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a+u}{l}\right)}}\, \Phi(u) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{l}(u-\xi+nl)} \{\operatorname{cth}(\xi-u-nl)-1\}\, du$$

и показывает, что функция

$$e^{\frac{a}{l}\xi} g(\xi) = \Psi(\xi)$$

также имеет период l.

Поэтому из (2) следует, что искомая функция будет удовлетворять соотношению

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-a+nl}^{a+nl} \sqrt{\frac{\vartheta_1\left(\frac{a+u}{l}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{a-u}{l}\right)}}\, e^{\frac{au}{l}} (1-\operatorname{th} u)\, \Psi(u)\, du = 0.$$

Суммирование встречающегося у нас ряда дает

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{a}{l}(u+nl)} \{\operatorname{cth}(u+nl)-1\} = -\frac{\vartheta_1'(0)}{l\vartheta_1\left(\frac{a}{2l}\right)} \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{l}-\frac{a}{2l}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{l}\right)}.$$

Производя замену переменной $\frac{\xi}{l}=x$, мы получаем следующее предложение:

ТЕОРЕМА 5. *Имеют место формулы обращения*

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{-\alpha}^{\alpha}{}' \sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha-u)}{\vartheta_1(\alpha+u)}}\, \frac{\vartheta_1\left(x-u-\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_1(x-u)} f(u)\, du,$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_{-\alpha}^{\alpha}{}' \sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha+u)}{\vartheta_1(\alpha-u)}}\, \frac{\vartheta_1\left(u-x-\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_1(u-x)} g(u)\, du,$$

где $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

Этими формулами устанавливается изометрическое соответствие между пространством функций $f(x)$, для которых

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha-x)}{\vartheta_1(\alpha+x)}}\,|f(x)|^2\,dx<\infty,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha-x)}{\vartheta_1(\alpha+x)}}\,f(x)\,\frac{\vartheta_4\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_4(x)}\,dx=0,$$

и пространством функций $g(x)$, *для которых*

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha+x)}{\vartheta_1(\alpha-x)}}\,|g(x)|^2\,dx<\infty,\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha+x)}{\vartheta_1(\alpha-x)}}\,g(x)\,\frac{\vartheta_4\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_4(x)}\,dx=0.$$

Заметим, что из этих формул обращения с помощью предельного перехода $h\to 0$ получается частный случай формул обращения с ядром Hilbert'a, рассмотренный нами выше (теорема 4).

Поступило
14. VIII. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И., Об одном классе формул обращения, Записки Харьковского авиационного института, 1941.

[2] Мусхелишвили Н. И., Приложение интегралов типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений, Труды Тбилисского математического института, 1941. (В статье имеются подробные указания на другие работы, посвященные той же теме.)

N. AKHIEZER. ON SOME INVERSION FORMULAE FOR SINGULAR INTEGRALS

SUMMARY

Denote by E a bounded point-set that consists of a finite or infinite number of open intervals

$$\ldots,\ (a_k,\ b_k),\ (a_{k+1},\ b_{k+1}),\ \ldots\quad (a_k<b_k<a_{k+1})$$

Let us say that a summable function $p(x)\geqslant 0$ defined on E belongs to the class A if

$$\frac{1}{\pi}\int_E{}' \frac{p(t)}{x-t}\,dt=\tilde{p}(x)$$

exists almost everywhere on E and is equal to

$$\alpha+\mu x-\sum_k\frac{\mu_k}{x-\alpha_k},$$

where $\mu\geqslant 0$, $\mu_k>0$, $\alpha_k\,\bar{\in}\,E$ and the number of points α_k in every interval complementary to E is finite*.

The function $q(x)=\frac{1}{p(x)}\,(x\in E)$ is considered together with $p(x)$. The following facts are established:

(i) If $p(x)\in A$ and $q(x)\in L_E^r$ for a value $r>1$, then $q(x)\in A$.

(ii) If both $p(x)$ and $q(x)$ belong to A, so that

* The accent at the integral sign means that the integral is to be considered as the principal value in the sense of Cauchy. The function $\tilde{p}(x)$ is called conjugate to $p(x)$ in the sense of M. Riesz.

$$\tilde{p}(x)=\alpha+\mu x-\sum_k \frac{\mu_k}{x-\alpha_k}, \quad \tilde{q}(x)=\beta+\nu x-\sum_k \frac{\nu_k}{x-\beta_k}$$

almost everywhere on E, then the sets $S_\alpha=\{\alpha_k\}$, $S_\beta=\{\beta_k\}$ have no common element and

$$\beta=0, \quad \nu=0, \quad \text{if} \quad \mu>0,$$

$$\beta=-\frac{1}{\alpha}, \ \nu=0, \quad \text{if} \ \mu=0, \quad \alpha\neq 0, \ \nu>0, \ \text{if} \ \mu=0, \ \alpha=0.$$

In what follows $p(x)$ and $q(x)$ are supposed to belong to the class A. The Hilbert spaces $L_E^2\{p(x)\}$ and $L_E^2\{q(x)\}$ are considered with the scalar products

$$\int_E f(x)\,\overline{g(x)}\,p(x)\,dx, \quad \int_E f(x)\,\overline{g(x)}\,q(x)\,dx,$$

as well as the Hilbert spaces $L^2\{d\sigma(x)\}$, $L^2\{d\tau(x)\}$ with the scalar products

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,d\sigma(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,d\tau(x),$$

where

$$\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} p_1(t)\,dt+\sum_{\alpha_i\leqslant x}\mu_i; \quad \tau(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} q_1(t)\,dt+\sum_{\beta_i\leqslant x}\nu_i,$$

thereby

$$p_1(t)=\begin{cases} p(t) & (t\in E), \\ 0 & (t\,\overline{\in}\,E), \end{cases} \qquad q_1(t)=\begin{cases} q(t) & (t\in E), \\ 0 & (t\,\overline{\in}\,E). \end{cases}$$

THEOREM 1. *If $\{P_n(x)\}_0^\infty$, $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ are complete orthonormalized systems of polynomials in $L^2\{d\sigma(x)\}$, $L^2\{d\tau(x)\}$ respectively, then*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(t)}{x-t}\,d\sigma(t)=\begin{cases} Q_{n+1}(x) & (\mu>0) \\ \operatorname{sign}\alpha\cdot Q_n(x) & (\mu=0, \ \alpha\neq 0) \\ -Q_{n-1}(x) & (\mu=0, \ \alpha=0) \end{cases}$$

almost everywhere in E and at every point of S_β, which does not belong to $\overline{E}$ and likewise

$$\int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{Q_n(t)}{x-t}\,d\tau(t)=\begin{cases} -P_{n-1}(x) & (\mu>0) \\ -\operatorname{sign} P_n(x) & (\mu=0, \ \alpha\neq 0) \\ P_{n+1}(x) & (\mu=0, \ \alpha=0) \end{cases}$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots; \ Q_{-1}(x)=P_{-1}(x)=0)$$

almost everywhere in E and at every point of S_α, which does not belong to $\overline{E}$.

Denote by $H\{p(x)\}$ the totality of functions $f(x)$ in $L_E^2\{p(x)\}$ that are orthogonal to

$$\frac{1}{x-c}$$

for every $c\in S_\beta$, as well as to 1, if $\nu>0$. The set $H\{q(x)\}\subset L_E^2\{q(x)\}$ is defined analogously.

THEOREM 2. *Suppose both* $p(x)$, $q(x)$ *belong to* L^r_E $(r>1)$ *and, in case* E *consists of an infinity of intervals, no point*

$$a=\lim a_i, \quad b=\lim b_i$$

belongs either to S_α *or to* S_β. *Then, whatever be a function* $g(x)\in H\{q(x)\}$, *the equation*

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_E' p(t)\frac{f(t)}{x-t}\,dt \tag{6}$$

has a solution $f(x)\in H\{p(x)\}$ *almost everywhere in* E. *This solution is unique (in essential) and is given by the formula*

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_E' q(t)\frac{g(t)}{t-x}\,dt \quad \text{(almost everywhere in } E). \tag{7}$$

The mapping of $H\{p(x)\}$ *onto* $H\{q(x)\}$ *determined by the formulae* (6) *and* (7) *is isometric:*

$$\int_E p(x)\,|f(x)|^2\,dx=\int_E q(x)\,|g(x)|^2\,dx. \tag{8}$$

Some particular cases are further considered that lead to a generalization of Hilbert's formula and to some formulae containing the elliptic ϑ-functions. As to the last case the following inversion formulae are obtained:

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{-\alpha}^{\alpha}{}'\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha-y)}{\vartheta_1(\alpha+y)}}\,\frac{\vartheta_1\left(x-y-\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_1(x-y)}f(y)\,dy,$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{-\alpha}^{\alpha}{}'\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha+y)}{\vartheta_1(\alpha-y)}}\,\frac{\vartheta_1\left(y-x-\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_1(y-x)}g(y)\,dy,$$

where $0<\alpha<\frac{1}{2}$ and

$$\vartheta_1(u)=2\sqrt[4]{h}\sin\pi u-2\sqrt[4]{h^9}\sin 3\pi u+\ldots;\quad 0<h<1.$$

These formulae establish a one-to-one correspondence between the space F of functions $f(x)$, for which

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha-x)}{\vartheta_1(\alpha+x)}}\,|f(x)|^2\,dx<\infty, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha-x)}{\vartheta_1(\alpha+x)}}\,f(x)\,\frac{\vartheta_4\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_4(x)}\,dx=0$$

and the space G of functions $g(x)$ such that

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha+x)}{\vartheta_1(\alpha-x)}}\,|g(x)|^2\,dx<\infty, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha+x)}{\vartheta_1(\alpha-x)}}\,g(x)\,\frac{\vartheta_4\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{\vartheta_4(x)}\,dx=0.$$

This correspondence is isometric:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha-x)}{\vartheta_1(\alpha+x)}}\,|f(x)|^2\,dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{\frac{\vartheta_1(\alpha+x)}{\vartheta_1(\alpha-x)}}\,|g(x)|^2\,dx.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 291–300 Série mathématique

А. И. МАЛЬЦЕВ

КОММУТАТИВНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ ПОЛУПРОСТЫХ АЛГЕБР ЛИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе находятся коммутативные подалгебры максимальной размерности всех простых комплексных алгебр Ли. Тем самым теорема Шура об абелевых подгруппах максимальной размерности группы всех неособенных матриц переносится на произвольные полупростые группы.

Рассмотрим группу $\mathfrak{A}_{n-1}$ всех матриц степени n над полем комплексных чисел, определитель которых равен 1. И. Шуром ([4]) доказана следующая теорема:

Наивысшая размерность абелевых подгрупп группы $\mathfrak{A}_{n-1}$ *равна* $\left[\frac{n^2}{4}\right]$. *При* $n > 3$ *абелевы подгруппы этой размерности переводятся друг в друга автоморфизмами* $\mathfrak{A}_{n-1}$.

Группы $\mathfrak{A}_{n-1}$ образуют одну серию простых комплексных групп Ли. Естественно возникает задача о нахождении абелевых подгрупп максимальной размерности во всех остальных простых, а тем самым, и полупростых группах Ли. Решение этой задачи составляет предмет настоящей работы. В дальнейшем вместо групп удобнее рассматривать их алгебры Ли, и речь идет о нахождении коммутативных подалгебр наивысшей размерности.

Пусть G — простая комплексная алгебра Ли, A — какая-либо максимальная коммутативная подалгебра, $a \in A$. Элемент a можно однозначно представить в форме $r + t$, где $[rt] = 0$, t — нильпотентный и r — семирегулярный элемент G (([1]; стр. 108). Из $[aA] = 0$ вытекает $[rA] = 0$. Так как A максимальная, то $r \in A$. Следовательно, либо все элементы A нильпотентны ($r = 0$), либо A содержит по крайней мере один семирегулярный элемент. Покажем, что основным является первый случай, в то время как во втором случае дело сводится к нахождению максимальных коммутативых подалгебр в простых группах низшей размерности. Действительно, пусть $r \in A$, где r — семирегулярен. Совокупность элементов G, перестановочных с A, образует полупростую алгебру $F \subset G$, которая распадается в прямую сумму простых алгебр $G_1, \ldots, G_s$ низшей размерности и еще, может быть, некоторой коммутативной подалгебры B. Алгебра A содержится в F. С другой стороны, ясно, что максимальные коммутативные подалгебры F представляют собою прямые суммы максимальных коммутативных подалгебр G_i. Таким образом, главная задача сводится к нахождению абелевых подалгебр макси-

мальной размерности, все элементы которых нильпотентны. Основной результат дает следующая

ТЕОРЕМА. *Каждая простая алгебра Ли, за исключением B_4, D_4, G_2, с точностью до автоморфизмов имеет только одну коммутативную подалгебру наивысшей размерности с нильпотентными элементами. Эта размерность равна* $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ *для алгебр* $A_{n-1} (n > 3)$, $\frac{1}{2} n(n-1)+1$ *для* $B_n (n > 4)$, $\frac{1}{2} n(n+1)$ *для* C_n, $\frac{1}{2} n(n-1)$ *для* D_n $(n > 4)$, 16, 27, 36, 9, 5 *соответственно для* E_6, E_7, E_8, F_4, B_3. *Алгебра* B_4 *имеет два класса сопряженных абелевых подалгебр наивысшей размерности* 7, D_4 — *два класса размерности* 6 *и* G_2 — *три класса размерности* 3.

Для вывода теоремы придется воспользоваться следующими замечаниями. Пусть G — заданная простая алгебра, H — ее максимальная регулярная абелева подалгебра. Из теории полупростых алгебр известно, что в G существует специальный базис вида

$$h_1, \ldots, h_n, e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_s},$$

где в качестве индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ удобно брать некоторую систему векторов из линейного пространства H. Векторы α_i называются корнями G. Таблица умножения имеет вид

$$[he_\alpha] = (h, \alpha) e_\alpha, \quad [e_\alpha e_{-\alpha}] = h_\alpha, \quad [e_\alpha e_\beta] = N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta}, \tag{1}$$

где $h \in H$, $N_{\alpha,\beta} = 0$, если $\alpha + \beta$ не есть корень, и $N_{\alpha,\beta} \neq 0$, если $\alpha + \beta$ — корень. Выбираем в H такое направление, чтобы корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ имели различные и отличные от нуля проекции, и считаем тот из корней бо̀льшим, проекция которого на это направление больше. В частности, положительными считаем корни с положительными проекциями. Совокупность элементов G, имеющих вид $a_1 e_{\alpha_1} + \ldots + a_m e_{\alpha_m}$ $(\alpha_i > 0)$, образует нильпотентную подалгебру, которую будем обозначать N. Подалгебра $R = H + N$ является максимальной разрешимой подалгеброй алгебры G.

Пусть A — некоторая коммутативная подалгебра G с нильпотентными элементами. Так как A заведомо разрешима, а все максимальные разрешимые сопряжены ([2]), то A сопряжена с некоторой подалгеброй $A^* \subset R$. По предположению элементы A^* нильпотентны, откуда $A^* \subset N$. Следовательно, при нахождении коммутативных подалгебр G можно ограничиться исследованием коммутативных подалгебр N.

Предположим теперь, что A — коммутативная подалгебра максимальной размерности в N. Так как в силу определения алгебры N все ее элементы выражаются линейно через e_{α_i} $(\alpha_i > 0)$, то то же самое имеет место и для элементов алгебры A. Выберем в A базис вида (ср. ([3])):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = e_{\alpha_{11}} + a_{12} e_{\alpha_{12}} + \ldots + a_{1t} e_{\alpha_{1t}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = e_{\alpha_{k1}} + a_{k2} e_{\alpha_{k2}} + \ldots + a_{kt} e_{\alpha_{kt}}, \end{array}\right\} \tag{2}$$

где $\alpha_{11} < \alpha_{21} < \ldots < \alpha_{k1}$, $\alpha_{i1} < \alpha_{i2} < \ldots < \alpha_{il}$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. Корни $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{k1}$ будем называть **соответствующими** алгебре A. Из условий $[x_i x_j]=0$ находим $[e_{\alpha_{i1}} e_{\alpha_{j1}}]=0$. Таким образом, корневые элементы $e_{\alpha_{11}}, \ldots, e_{\alpha_{k1}}$ сами образуют коммутативную подалгебру A_0 той же размерности, что и A. Назовем два корня α и β **коммутирующими**, если их сумма не есть корень. Так как система коммутирующих корней $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{k1}$ однозначно определяет коммутативную подалгебру A_0, то задачу о нахождении коммутативных подалгебр максимальной размерности можно разбить теперь на три части: 1° найти все максимальные коммутативные системы корней, 2° найти все абелевы подалгебры, соответствующие каждой коммутативной системе корней и исследовать сопряженность их, 3° исследовать сопряженность подалгебр, отвечающих различным максимальным коммутативным системам корней.

Из этих задач первая является чисто комбинаторной и ее решение громоздко только для алгебры E_8.

Вторая задача решается следующим приемом. Пусть мы знаем некоторую систему коммутирующих корней $\alpha_{11} < \alpha_{21} < \ldots < \alpha_{k1}$ и хотим найти все абелевы подалгебры, отвечающие этой системе. Пишем равенства (2) с неопределенными коэффициентами a_{ij}. Условия $[x_i x_j]=0$, принимая во внимание (1), дают систему уравнений для a_{ij}. В случае алгебр A_n, C_n, D_n, E_6, E_7 из этих уравнений следует, что $a_{ij}=0$ и, таким образом, каждой максимальной системе корней отвечает только одна подалгебра. Для алгебр B_n, F_4, E_8 сначала пишутся уравнения (2) с неопределенными коэффициентами, затем показывается, что некоторые из коэффициентов можно обратить в нуль, производя подходящий автоморфизм N. После этого из условий $[x_i x_j]=0$ получается равенство нулю остальных коэффицентов a_{ij}. Таким образом, и для этих групп вторая задача оказывается решенной. Наконец, только что описанная процедура, в случае групп B_4, D_4, G_2 дает несколько подалгебр. Чтобы показать их несопряженность вычисляется нормализатор этих подалгебр *, размерность которого в разных случаях оказывается различной. Так как нормализаторы сопряженных подалгебр должны быть сопряженными и, следовательно, изоморфными, то это обстоятельство доказывает несопряженность первоначальных абелевых подалгебр.

Решение третьей задачи трудностей не представляет, так как почти во всех случаях максимальные коммутативные системы корней легко переводятся друг в друга автоморфизмами основной группы.

Алгебры A_n. Корни имеют вид $\omega_i - \omega_j$ $(i \neq j;\ i, j=1, \ldots, n+1)$, где $\omega_1, \ldots, \omega_{n+1}$ — линейно независимые векторы вспомогательного эвклидова пространства. Положительными можно считать корни $\omega_i - \omega_j$ $(i<j)$. Пусть $S=\{\omega_{i_1}-\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{i_k}-\omega_{j_k}\}$ — максимальная система коммутирующих корней, $M=\{i_1, \ldots, i_k\}$, $N=\{j_1, \ldots, j_k\}$. Обозначим через s и t числа различных элементов в множествах M и N. Так как

* Нормализатором A в G называется совокупность элементов g, удовлетворяющих условию $[gA] \subset A$.

сумма двух корней из S не может быть корнем, то $M \cap N = 0$, $s + t \leqslant n + 1$. Следовательно, число корней в S не более st и может быть равно st только в том случае, если каждое число множества M меньше каждого числа множества N. Максимум st при условии $s + t \leqslant n + 1$ равен $\left[\frac{(n+1)^2}{4}\right]$ и достигается, таким образом, только для системы

$$S_0 = \{\omega_i - \omega_j\} \quad \left(i = 1, \ldots, \frac{n+1}{2};\quad j = \frac{n+1}{2} + 1, \ldots, n+1\right)$$

при n нечетном, и для систем

$$S_1 = \{\omega_i - \omega_j\} \quad \left(i = 1, \ldots, \frac{n}{2};\quad j = \frac{n}{2} + 1, \ldots, n+1\right)$$

$$S_2 = \{\omega_i - \omega_j\} \quad \left(i = 1, \ldots, \frac{n}{2} + 1;\quad j = \frac{n}{2} + 2, \ldots, n+1\right)$$

при n четном. Обозначим через p одно из чисел $\frac{n+1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1$ соответственно тому, какую систему корней рассматриваем. Базис коммутативной подалгебры, отвечающей этим системам, должен иметь вид

$$x_{a\alpha} = e_{a\alpha'} + \sum_{i,j} A^{ij}_{a\alpha} e_{ij'} \quad (i < a,\ i < j;\ a, i, j = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, n+1),$$

где для краткости введено обозначение $e_{a\alpha'}$ вместо $e_{\omega_a - \omega_\alpha}$. Условие $[x_{a\alpha} x_{b\beta}] = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ дает

$$\sum_i A^{ij}_{a\alpha} M_i e_{ij'} + \sum_i A^{ia}_{b\beta} N_i e_{ia'} = 0, \tag{3}$$

где M_i, N_i — структурные константы, отличные от 0 и взятые из формул (1). Ввиду линейной независимости e_{mn}, (3) дает $A^{ij}_{a\alpha} = 0$. Так как система S_1 переводится в S_2 автоморфизмом A_n, то это дает теорему Шура: *алгебра A_n с точностью до автоморфизмов содержит единственную абелеву подалгебру наивысшей размерности* $\left[\frac{(n+1)^2}{4}\right]$.

Алгебры D_n $(n > 4)$. Корни имеют вид $\pm\omega_i \pm \omega_j$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, n)$; среди них положительные $\omega_i \pm \omega_j$ $(i < j)$. Пусть S — система коммутирующих положительных корней, M — совокупность таких i, для которых S содержит корень вида $\omega_i \pm \omega_j$, N — совокупность тех j, для которых в S имеется корень $\omega_k - \omega_j$,

$$P = M \cap N,\ M - P = \{i_1, \ldots, i_p\},\ N - P = \{j_1, \ldots, j_q\},$$
$$P = \{l_1, \ldots, l_r\}.$$

Максимальное чис[illegible]ожительных коммутирующих корней при данных p, q, r не более $s = \frac{1}{2} p(p-1) + pq + 2r$ и равно s только при условии, что каждое i меньше каждого j. Числа p, q, r, очевидно, связаны соотношением $p + q + r \leqslant n$, и максимум s $(n \geqslant 5)$ равен $\frac{1}{2} n(n-1)$. Этот максимум достигается при двух системах

$$S_1 = \{\omega_i + \omega_j, \omega_i + \omega_n\}, \qquad S_2 = \{\omega_i + \omega_j, \omega_i - \omega_n\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Полагая для сокращения $e_{ij}=e_{\omega_i+\omega_j}$, $e_{ij'}=e_{\omega_i-\omega_j}$, $e_{ij'}=e_{\omega_i+\omega_n}$, $e_{in'}=e_{\omega_i-\omega_n}$ в случае, когда рассматривается система S_1 и $e_{in}=e_{\omega_i-\omega_n}$, $e_{in'}=e_{\omega_i+\omega_n}$, если рассматривается S_2, мы видим, что базис соответственной коммутативной подалгебры имеет в обоих случаях вид

$$x_{ab}=e_{ab}+\sum_{i,j} A_{ab}^{ij} e_{ij}, \quad (i<j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Из условий (2) получаем дополнительно, что $x_{1k}=e_{1k}$ $(k=1\ldots, n-1)$. Соотношения $[x_{ab}e_{1k}]$ дают $A_{ab}^{ij}=0$ для $i\neq 1$, $j\neq n$. Таким образом,

$$x_{ab}=e_{ab}+\sum_{i=2}^{n-2} A_{ab}^{i}e_{1i'}+\sum_{i=1}^{n-1} B_{ab}^{i}e_{in'}.$$

Условия $[x_{ab}x_{cn}]=0$ $(a,b\neq n)$ дают

$$A_{ab}^{i}=B_{ab}^{i}=0 \quad \text{и} \quad A_{an}^{j}=B_{an}^{j}=0 \quad (j\neq a).$$

Выберем три различных индекса a, b, c, отличных от 1, n. Тогда предыдущие равенства дают

$$x_{an}=e_{an}+B_ae_{an'}, \quad x_{bn}=e_{bn}+B_be_{bn'}, \quad x_{cn}=e_{cn}+B_ce_{cn'}.$$

Правила коммутирования $[e_{in}e_{in'}]=e_{ij}$ $(i<j)$ ([1]; стр. 14) и соотношения коммутативности $[x_{an}x_{bn}]=[x_{an}x_{cn}]=[x_{bn}x_{cn}]=0$ дают $B_a=B_b=B_c=0$. Следовательно, $x_{ab}=e_{ab}$ $(a,\ b=1,2,\ldots,n)$. Таким образом, системам S_1, S_2 соответствует только по одной коммутативной подалгебре. Так как S_1 переводится в S_2 автоморфизмом D_n, то оказывается, что *в алгебре $D_n\,(n>4)$ с точностью до автоморфизмов существует только одна коммутативная подалгебра наивысшей размерности $\frac{1}{2}n(n-1)$.*

Алгебры C_n. Корни имеют вид $\pm 2\omega_i$, $\pm\omega_i\pm\omega_j$; из них положительными являются $2\omega_i$, $\omega_i\pm\omega_j$ $(i<j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. В предыдущем случае установлено, что максимальная коммутативная система корней вида $\omega_i\pm\omega_j$ может быть либо S_1, либо S_2. Присоединяя к S_1 корни $2\omega_i$, получим единственную максимальную коммутативную систему корней C_n. Базис (2) соответственной абелевой подалгебры имеет вид

$$x_a=e_a+\sum_{i,\ j} A_a^{ij}e_{ij'},$$

$$x_{ab}=e_{ab}+\sum_{i,\ j} B_{ab}^{ij}e_{ij'}.$$

Условия (2) дают, кроме того, $x_{1a}=e_{1a}$. Из соотношений

$$[e_{1a}x_p]=[e_{1b}x_{pq}]=0$$

непосредственно получается $x_a=e_a$, $x_{ab}=e_{ab}$. Следовательно, *алгебра C_n с точностью до сопряженности содержит единственную абелеву подалгебру навысшей размерности $\frac{1}{2}n(n+1)$.*

Алгебры $B_n\,(n>4)$. Корни B_n имеют вид $\pm\omega_i$, $\pm\omega_i\pm\omega_j$; из них положительны ω_i, $\omega_i\pm\omega_j\,(i<j)$. Коммутативная система корней может содержать не более одного корня вида ω_i. Максимальные коммутативные системы корней вида $\omega_i\pm\omega_j$ были определены выше. Отсюда за-

ключаем, что существуют только следующие коммутативные системы, содержащие наибольшее число корней

$$S_p=\{\omega_p,\ \omega_i+\omega_j,\ \omega_i+\omega_n\},\quad S_q^*=\{\omega_q,\ \omega_i+\omega_j,\ \omega_i-\omega_n\}$$
$$(i \neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\ p=1,\ \ldots,\ n;\ q=1,\ \ldots,\ n-1).$$

Вводя для корневых элементов обозначения, аналогичные использованным при рассмотрении D_n, мы видим, что базис соответственной абелевой подалгебры во всех случаях может быть взят в форме

$$x_{1t}=e_{1t},$$
$$x_{km}=e_{km}+\sum A_{km}^{ij}e_{ij'}+\sum B_{km}^{i}e_{i},$$
$$x_s=e_s+\sum A^{ij}e_{ij'}+\sum B^{i}e_{i}.$$

Автоморфизмами вида $\exp\lambda e_{is'}$ можно уничтожить члены B^ie_i в выражении x_s, после чего условия $[e_{1i},x_s]=[e_{1i},\ x_{km}]=0$ дают $A^{ij}=A_{km}^{ij}=0$ $(i\neq 1,\ j\neq n)$. Далее, из условий $[x_s,x_{km}]=[x_s,x_{kn}]=0$ последовательно находим $A^{1i}=A^{1n}=B_{km}^{i}=0$. При рассмотрении D_n было выяснено, что

$$x_{km}=e_{km}+\sum A_{km}^{ij}e_{ij'},$$

коммутируют только при условии $A_{km}^{ij}=0$, что дает $x_{km}=e_{km}$. Так как системы S_n, S_q^* переводятся друг в друга автоморфизмами B_n, то *алгебра B_n $(n>4)$ с точностью до сопряженности содержит только одну абелеву подалгебру наивысшей размерности $\frac{1}{2}n(n-1)+1$.*

Алгебра F_4. Корни имеют вид $\pm\omega_i$, $\pm\omega_i\pm\omega_j$, $\frac{1}{2}(\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\pm\omega_3\pm\omega_4)$; положительные ω_i, $\omega_i\pm\omega_j$ $(i<j)$, $\frac{1}{2}(\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3\pm\omega_4)$. Среди корней последнего типа коммутировать между собой могут только пары. Поэтому максимальные системы корней F_4 имеют следующий вид:

$$S=\{\omega_1,\ \omega_1\pm\omega_i,\ \omega_{1abc},\ \ \omega_{1lmn}\}\qquad (i=2,\ 3,\ 4),$$
$$S_p=\{\omega_p,\ \omega_i+\omega_j,\ \omega_i+\omega_4,\ \omega_{1abc},\ \omega_{1lmn}\}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3),$$
$$S_q^*=\{\omega_q,\ \omega_i+\omega_j,\ \omega_i-\omega_4,\ \omega_{1abc},\ \omega_{1lmn}\}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3).$$

Рассмотрим первый случай. Базис соответственной абелевой подалгебры (2) будет иметь вид

$$x_1=e_1\qquad x_{1i}=e_{1i},$$
$$x_{1abc}=e_{1abc}+\sum A^{ijk}e_{1ijk},$$
$$x_{1lmn}=e_{1lmn}+\sum B^{ijk}e_{1ijk}.$$

Автоморфизмами типа $\exp te_i$, $\exp te_{ij}$ можно уничтожить в выражениях для x_{1abc}, x_{1lmn} все члены, кроме первых. Таким образом, с точностью до автоморфизмов в первом случае имеется только одна абелева подалгебра $A_1=\{e_1,\ e_{1i},\ e_{1i'},\ e_{1234},\ e_{1234'}\}$. Аналогичным способом показывается, что во втором и третьем случаях будет с точностью до авто-

морфизмов также по одной коммутативной подалгебре. Так как системы корней S, S_p, S_q^* автоморфизмами переводятся друг в друга, то и соответственные подалгебры оказываются сопряженными. Таким образом, *в алгебре F_4 с точностью до сопряженности имеется одна коммутативная подалгебра наивысшей размерности* 9.

Алгебра E_6. Корни E_6 суть $\omega_i - \omega_j$, $\pm(\omega_i + \omega_j + \omega_k)$, $\pm(\omega_1 + \ldots + \omega_6) = \pm\omega_0$; из них положительными можно считать $\omega_i - \omega_j$, $\omega_i + \omega_j + \omega_k$, ω_0 $(i < j;\ i, j, k = 1, \ldots, 6)$. Назовем два корня вида $\omega_i + \omega_j + \omega_k$ дополнительными, если их сумма есть ω_0. Системы корней

$$S_1 = \{\omega_1 - \omega_i;\ \omega_1 + \omega_i + \omega_j;\ \omega_0\} \qquad (i, j = 2, 3, 4, 5, 6),$$

$$S_2 = \{\omega_i - \omega_6;\ \omega_i + \omega_j + \omega_k;\ \omega_0\} \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

являются коммутативными и содержат по 16 корней. Покажем, что других коммутативных систем S, содержащих $\geqslant 16$ корней, нет. В самом деле, из каждой пары взаимно дополнительных корней вида $\omega_i + \omega_j + \omega_k$ в S может входить только один корень. Всего корней этого вида 20 и из них в S входит не более 10. Следовательно, S должно содержать не менее 5 корней вида $\omega_i - \omega_j$. Пусть $\omega_{i_1} - \omega_{j_1}, \ldots$ — эти корни. Если $i_1 = i_2 = \ldots = i_5$, или $j_1 = \ldots = j_5$, то получим системы S_1, S_2. В остальных случаях, как легко видеть, общее число корней будет меньше 16.

Рассмотрим соответственные абелевы подалгебры A_1, A_2. В силу условий (2), базис A_1 будет иметь вид $x_{1i'} = e_{1i'}$, $x_{1ij} = e_{1ij}$, $x_0 = e_0$ и алгебра A_1 — единственная. Базис алгебр A_2, отвечающих системе S_2, должен иметь вид

$$x_0 = e_0, \quad x_{1ij} = e_{1ij},$$

$$x_{2ij} = e_{2ij} + \sum A_{ij}^{\alpha} e_{1\alpha 6} + \sum B_{ij}^{\alpha} e_{1\alpha'},$$

$$x_{345} = e_{345} + \sum A^{\alpha} e_{1\alpha 6} + \sum B^{\alpha} e_{2\alpha 6} + \sum C^{\alpha} e_{1\alpha'} + \sum D^{\alpha} e_{2\alpha'},$$

$$x_{i6'} = e_{i6'} + \sum P_i^{\alpha n} e_{\alpha n 6} + \sum Q_i^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta'}.$$

Условия $[x_{i6'}, e_{1jk}] = 0$ дают $P_j^{\alpha n} = Q_j^{\alpha\beta} = 0$ для $\alpha > 1$. Условия $[x_{i6'}, x_{jkm}] = 0$ дают $A = \ldots = Q = 0$. Таким образом, базис A_2 оказывается равным $\{e_{i6'}, e_{ijk}, e_0\}$. Внешним автоморфизмом ((1); стр. 142) A_1 переводится в A_2 Отсюда, *алгебра E_6 с точностью до автоморфизмов содержит единственную абелеву подалгебру максимальной размерности* 16.

Алгебра E_7. Корни имеют вид $\omega_i - \omega_j$, $\frac{1}{2}(\omega_i + \omega_j + \omega_k + \omega_m - \omega_p - \omega_q - \omega_r - \omega_s)$; из них положительные $(i < j)$ $\omega_i - \omega_j = \omega_{ij}$, $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_i + \omega_j + \omega_k - \ldots - \omega_s) = \omega_{ijk}$ $(\{i, j, k, \ldots, s\} = \{2, \ldots, 8\})$. Система

$$S_0 = \{\omega_{1i};\ \omega_{2i};\ \omega_{2ij}\} \quad (i, j = 3, 4, \ldots, 8)$$

является коммутативной и содержит 27 корней. Докажем, что всякая другая коммутативная система положительных корней содержит меньшее число элементов. Для этого удобно воспользоваться такой леммой:

ЛЕММА. *Рассмотрим всевозможные тройки* (l, m, n), *образованные числами* $1, 2, \ldots, N$ $(N > 6)$. *Если любые две тройки, принадлежащие некоторой системе троек* Σ, *имеют непустое пересечение, то* Σ *содержит не более* $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ *троек. Если при этом* Σ *содержит в точности* $\frac{1}{2}(N-1)(N-2)$ *троек, то тройки* Σ *имеют вид* (a, i, j), *где* a — *некоторое фиксированное число, входящее, таким образом, во все тройки* Σ.

Доказательство этой леммы не представляет интереса и может быть опущено.

Пусть теперь S — система коммутирующих положительнын корней E_7, содержащая не менее 27 элементов. Чтобы два корня ω_{ijk}, ω_{pqr} коммутировали, необходимо и достаточно, чтобы тройки (i, j, k), (p, q, r) имели непустое пересечение. В силу леммы отсюда следует, что число корней этого вида, содержащихся в S, не превосходит 15. Поэтому S должна содержать по крайней мере 12 корней вида $\omega_i - \omega_j$. Множество первых индексов этих корней обозначим M, множество вторых — N. Если M содержит только два элемента, то, очевидно, $S = S_0$. Легко видеть, что в случае, когда S содержит 3, 4, 5 или 6 чисел, число корней S будет меньше 27. Рассмотрим абелеву подалгебру A_0, отвечающую системе S_0. Базис A_0, согласно условиям (2), должен иметь вид

$$x_{1i} = e_{1i},\ x_{2ij} = e_{2ij},\ x_{2i} = e_{2i} + \sum A_i^{\beta\alpha\gamma} e_{\alpha\beta\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma \neq 2).$$

Условия $[x_{2i}, x_{2pq}] = 0$ дают $A_i^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Таким образом, *с точностью до сопряженности* E_7 *содержит лишь одну абелеву подалгебру максимальной размерности* 27.

Алгебра E_8. Корни этой алгебры имеют вид $\omega_i - \omega_j$, $\pm(\omega_i + \omega_j + \omega_k)$, где $i, j, k = 1, 2, \ldots, 9$, $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_9 = 0$; положительными корнями являются $\omega_i - \omega_j \, (i < j)$, $\omega_1 + \omega_j + \omega_k$, $-\omega_j - \omega_k - \omega_m$ $(i = 1, \ldots, 9;$ $j, k, m = 2, \ldots, 9)$. Рассуждениями, сходными с предыдущеми, но принимающими довольно громоздкую форму, можно установить, что коммутативными системами, имеющими наибольшее число элементов, здесь будут

$$S_0 = \{\omega_1 - \omega_i,\ \omega_1 + \omega_i + \omega_j\} \qquad (i, j = 2, \ldots, 9)$$

$$S_p = \{\omega_1 - \omega_i,\ \omega_2 - \omega_i,\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_i, -\omega_p - \omega_j - \omega_k\} \quad (i = 3, \ldots, 9; j, k \neq p; \; j, k = 3, 4, \ldots 9),$$

$$S_{pabc} = \{\omega_1 - \omega_i, \omega_p - \omega_j, -\omega_s - \omega_j - \omega_k, -\omega_a - \omega_b - \omega_c, \omega_1 + \omega_p + \omega_i, \omega_1 + \omega_s + \omega_t\},$$
$$(i \neq p,\ i = 2, \ldots, 9;\ j, k = a, b, c;\ s, t \neq 1, p, a, b, c);$$

$$S_{abc} = \{\omega_1 - \omega_i;\ \omega_1 + \omega_j + \omega_s,\ \omega_1 + \omega_j + \omega_k, -\omega_s - \omega_t - \omega_u\}$$
$$(i = 2, \ldots, 9;\ j, k = a, b, c;\ s, t, u \neq a, b, c).$$

Каждая из этих систем может быть переведена в любую другую некоторым автоморфизмом E_8. Можно также проверить, что с точностью

до автоморфизмов каждой из этих систем отвечает одна коммутативная подалгебра.

Алгебра G_2. Корни G_2 можно представить в форме $\pm\omega_i$, $\omega_i-\omega_j$, где $i\neq j$, $i, j=1, 2, 3$; $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$. Вводя обозначения $\omega_i=\omega_{i0}$, $-\omega_i=\omega_{0i}$, $\omega_i-\omega_j=\omega_{ij}$, можно представить положительные корни в виде $\omega_{12}<\omega_{20}<\omega_{10}<\omega_{03}<\omega_{23}<\omega_{13}$. Максимальные коммутирующие системы:

$$S_1=\{\omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{03}\},\ S_2=\{\omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{10}\},\ S_3=\{\omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{20}\},$$
$$S_4=\{\omega_{13}, \omega_{03}, \omega_{12}\},\ S_5=\{\omega_{13}, \omega_{10}, \omega_{12}\}.$$

Первой системе отвечает единственная абелева подалгебра A_1 с нормализатором N_1:

$$A_1=\{e_{13}, e_{23}, e_{03}\},\quad N_1=\{H, e_{13}, e_{23}, e_{03}, e_{10}, e_{20}, e_{12}, e_{21}\}.$$

Второй системе отвечает один класс сопряженных абелевых подалгебр, представителем которого служит

$$A_2=\{e_{13}, e_{23}, e_{10}\},\quad N_2=\{H, e_{13}, e_{23}, e_{10}, e_{03}, e_{12}\}.$$

Третьей системе соответствует один класс сопряженных абелевых подалгебр, совпадающий с A_2. Абелевы подалгебры, соответствующие четвертой системе, разбиваются на два класса, один из которых совпадает с A_2, а представителем второго может служить

$$A_4=\{e_{13}, e_{03}, e_{23}+e_{12}\},\quad N_4=\{[e_{13}\, e_{31}], e_{13}, e_{23}, e_{03}, e_{10}, e_{12}\}.$$

Подалгебры, соответствующие пятой системе, распадаются на два класса, один из которых совпадает с A_1, а другой с A_4. Так как нормализаторы N_1, N_2, N_4 неизоморфны, то алгебры A_1, A_2, A_4 не могут быть сопряженными.

Алгебра D_4. Корни $\pm\omega_i\pm\omega_j$; положительные $\omega_i\pm\omega_j$ $(i<j;\ i, j=1, 2, 3, 4)$. Имеется три максимальных системы коммутирующих корней:

$$S_1=\{\omega_2\pm\omega_i\},\quad S_2=\{\omega_j+\omega_k, \omega_j+\omega_4\},\quad S_3=\{\omega_j+\omega_k, \omega_j-\omega_4\}$$
$$(i=2, 3, 4;\ j, k=1, 2, 3).$$

S_1 отвечает в точности одна абелева подалгебра

$$A_1=\{e_{12}, e_{12'}, e_{13}, e_{13'}, e_{14}, e_{14'}\},\quad N_1=\{H, A_1, e_\alpha\},\quad \alpha=\pm\omega_i\pm\omega_j$$
$$(i, j=2, 3, 4).$$

Системе S_2 отвечают два класса сопряженных подалгебр, один из которых автоморфизмами D_4 переводится в A_1, а представителем второго служит алгебра

$$A_2=\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{23}+e_{14'}, e_{24}+e_{13'}, e_{34}+e_{12'}\}, (h_{12}, N_2=\{h_{13}, h_{14}, e_{ij}, e_{1k}', e_{km'}\}$$
$$(i, j=1, 2, 3, 4;\ k, m=2, 3, 4).$$

Для системы S_3 снова получаем два класса сопряженных абелевых подалгебр. Один из этих классов автоморфизмом D_4 переводится в A_1, другой — в A_2. Классы, к которым принадлежат A_1, A_2, друг в друга перевестись каким-либо автоморфизмом D_4 не могут, так как нормализаторы N_1, N_2 неизоморфны.

Алгебра B_4. Корнями будут $\pm\omega_i$, $\pm\omega_i\pm\omega_j$; из них положительны ω_i, $\omega_i\pm\omega_j$ $(i<j)$. Максимальные системы коммутирующих корней имеют вид

$$S_0=\{\omega_1, \omega_1\pm\omega_i\}, \quad S_p=\{\omega_p, \omega_j+\omega_k, \omega_j+\omega_4\}, \quad S_q^*=\{\omega_q, \omega_j+\omega_k, \omega_j-\omega_4\}$$
$$(i=2, 3, 4;\ j, k=1, 2, 3).$$

Легко показать, что абелевы подалгебры, соответствующие какой-либо одной из этих систем, сопряжены между собой. С другой стороны, системы S_p, S_q^* переводятся одна в другую автоморфизмами B_4. Таким образом, каждая из абелевых подалгебр максимальной размерности сопряжена либо с $A_0=\{e_1, e_{1i}, e_{1i'}\}$, либо с $A_1=\{e_1, e_{ij}, e_{i4}\}$. Нормализатором A_0 является $N_0=\{H, e_1, e_i, e_{1i}\ e_{ij}\}$ $(i, j=\pm 2, \pm 3, \pm 4)$, нормализатором A_1 служит $N_1=\{H, e_i, e_{ij'}, e_{jk'}, e_{ij}\}$ $(i<j;\ i=1, 2, 3, 4;\ j, k=2, 3, 4)$. N_0, N_1 имеют разную размерность, поэтому A_0, A_1 не сопряжены.

Алгебра B_3. Положительные корни: ω_1, ω_2, ω_3, $\omega_1\pm\omega_2$, $\omega_1\pm\omega_3$, $\omega_2\pm\omega_3$. Максимальная система коммутирующих корней одна — $S=\{\omega_1, \omega_1\pm\omega_2, \omega_1\pm\omega_3\}$ и ей отвечает единственная абелева подалгебра в B_3.

Поступило
27.II.1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gantmacher F. Canonical representation of automorphisms of a semi-simple Lie group, Мат. сб., 5(47):1 (1939), 101—146.

[2] Морозов В. В., О нильпотентном элементе в полупростой алгебре Ли, Доклады АН, XXXVI—3 (1942), 91—94.

[3] Чеботарев Н. Г., Теория групп Ли, Москва, 1940, стр. 305.

[4] Schur I., Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen, Journ. reine und angew. Math., 130 (1905), 66—76.

A. MALCEV. COMMUTATIVE SUBALGEBRAS OF SEMI-SIMPLE LIE ALGEBRAS

SUMMARY

It is shown in this paper that the problem to determine the maximal commutative subalgebras can be trivially reduced to the determination of subalgebras with nilpotent elements. The following theorem takes place for such subalgebras:

Every simple complex Lie algebra, except B_4, D_4 and G_2 possesses a unique (up to automorphisms) commutative subalgebra of maximal dimension. This dimension is $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ for A_{n-1} $(n>3)$, $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ for B_n $(n>4)$, $\frac{1}{2}n(n+1)$ for C_n, $\frac{1}{2}n(n-1)$ for D_n $(n>4)$ and 16, 27, 36, 9, 6 for E_6, E_7, E_8, F_4, B_3 respectively. The algebra B_4 has two classes of conjugate abelian subalgebras of maximal dimension 7, D_4 has two classes of subalgebras of dimension 6, G_2 has three classes of subalgebras of dimension 3.

This theorem is a generalization of I. Schur's theorem regarding commutative subalgebras of the algebra A_n ([4]) to the case of arbitrary semi-simple complex Lie algebras.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 301—310 Série mathématique

Л. И. ШАТРОВСКИЙ

К ТЕОРЕМЕ ЭРДЕША—РАЙКОВА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа содержит обобщение теоремы Райкова об арифметическом сложении множеств на числовой прямой на случай множеств пространства n измерений и доказательство аналогичной теоремы для множеств с асимптотическими характеристиками.

§ 1

Свойство базиса быть существенной компонентой оказывается справедливым не только в области натуральных чисел. В своей работе (1) Д. А. Райков показывает, что известная теорема Эрдеша (2) может быть перенесена в область точечных множеств на числовой прямой. Обобщение этой теоремы Эрдеша, а также аналогичной его теоремы для множеств асимптотической положительной плотности (3) на случай n-мерных целочисленных решеток было сделано автором настоящей статьи (4), а именно, им было показано, что сложение базиса с последовательностью плотности $\alpha < \frac{1}{2^{n-1}}$ дает последовательность плотности

$$\gamma \geqslant \alpha \left(1 + \frac{1 - 2^{n-1}\alpha}{2^n \lambda}\right),$$

где λ — высота базиса, а n — число измерений решетки.

В настоящей работе находятся теоретико-множественные аналоги теорем, полученных для целочисленных решеток. При $n=1$ первая из них обращается в теорему Райкова, а вторая дополняет теорему Райкова в вопросе о существенных компонентах для множеств с асимптотическими характеристиками на числовой прямой.

§ 2

Пусть M — множество всех точек $\overline{m} = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ пространства E^n, координаты которых $m_1, m_2, \ldots, m_n$ неотрицательны. Пусть сложение точек $\overline{a} \in M$, $\overline{b} \in M$ определяется как сложение векторов, а сложение множеств $A \subset M$, $B \subset M$ в смысле Шнирельмана, или короче — арифметическое сложение — как построение множества C точек вида $\overline{c} = \varepsilon_1\overline{a} + \varepsilon_2\overline{b}$, где $\overline{a} \in A$, $\overline{b} \in B$, ε_1, $\varepsilon_2 = 0$ или 1 и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \neq 0$. Присоединив к A и B нулевой вектор $\overline{0}$, можно определить $C = A + B$ как множество точек вида $\overline{a} + \overline{b}$. Пусть, далее, $\overline{m}' \subset \overline{m}$ означает выполнение неравенств

$$m_i' \leqslant m_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Мы будем говорить в этом случае, что $\overline{m}'$ предшествует $\overline{m}$, или что $\overline{m}$ следует за $\overline{m}'$. Если все точки множества X предшествуют $\overline{m}$, то мы будем говорить, что X предшествует $\overline{m}$, однако от обозначения $X \sqsubset \overline{m}$ мы будем воздерживаться, чтобы не смешивать это понятие с понятием включения множества X в какое-либо другое множество, например, $X \sqsubset M$.

Обозначим, наконец, через $X(\overline{m})$ внутреннюю меру части множества X, предшествующей точке $\overline{m}$, а через $\chi_x(\overline{m})$ — характеристическую функцию множества X.

§ 3

Определение I. Число

$$\alpha = \inf_{\overline{m} \in M} \frac{A(\overline{m})}{M(\overline{m})} \tag{1}$$

называется *плотностью множества* A и обозначается через $D(A)$.

Определение II. Число

$$\alpha_{\overline{m}^{(0)}} = \inf_{\overline{m} \sqsubset \overline{m}^{(0)}} \frac{A(\overline{m})}{M(\overline{m})} \tag{2}$$

называется *плотностью множества* A *в области* $\overline{m} \sqsubset \overline{m}^{(0)}$ и обозначается через $D_{\overline{m}^{(0)}}A$.

Определение III. Число

$$\alpha^* = \lim_{\overline{m} \in M} \frac{A(\overline{m})}{M(\overline{m})} \tag{3}$$

называется *асимптотической плотностью множества* A и обозначается через $D^*(A)$.

Определение IV. Множество $B \sqsubset M$ называется *базисом порядка* l *для множества* M, короче, базисом порядка l, если l — наименьшее натуральное число, при котором для любого $\overline{m} \in M$ возможно представление

$$\overline{m} = \overline{b}^{(1)} + \overline{b}^{(2)} + \ldots + \overline{b}^{(k)} \quad (\overline{b}^{(i)} \in B), \tag{4}$$

где $k \leqslant l$.

Определение V. Множество $B \sqsubset M$ называется *базисом порядка* $l_{\overline{m}^{(0)}}$ *в области* $\overline{m} \sqsubset \overline{m}^{(0)}$, если $l_{\overline{m}^{(0)}}$ — наименьшее натуральное число, при котором для любого $\overline{m} \sqsubset \overline{m}^{(0)}$ возможно представление (4), где $k \leqslant l_{\overline{m}^{(0)}}$

Определение VI. Множество $B \sqsubset M$ называется *асимптотическим базисом,* если при надлежащем выборе $\overline{m}^{(0)}$ для любого $\overline{m} \sqsupset \overline{m}^{(0)}$ возможно представление (4). Минимальное число l^* слагаемых в разложении (4), при помощи которого может быть представлено любое $\overline{m} \sqsupset \overline{m}^{(0)}$, называется *порядком асимптотического базиса.*

Заметим, что, вообще говоря, l^* — функция от $\overline{m}^{(0)}$ и для $\overline{m}_1^{(0)} \sqsubset \overline{m}_2^{(0)} \sqsubset \ldots$ $\ldots l^*_{\overline{m}_1^{(0)}} \geqslant l^*_{\overline{m}_2^{(0)}} \geqslant \ldots$ Однако, в силу того, что l^* — натуральное число,

для $\overline{m}_1^{(0)} \subset \overline{m}_2^{(0)} \subset \ldots \subset \overline{m}_s^{(0)} \subset \ldots$ в последовательности $l_i^* = l^*_{\overline{m}_i^{(0)}}$ мы будем иметь только конечное число различных членов и, начиная с некоторого $i = j$,

$$l_j^* = l_{j+1}^* = \ldots = l_s^* = \ldots \tag{5}$$

Выбрав в качестве $\overline{m}^{(0)}$ любую точку $\overline{m}^{(0)} \supset \overline{m}_j^{(0)}$, мы найдем для l^* наименьшее возможное значение.

Определим еще для n-мерных множеств понятие слабого базиса, введенное для $n=1$ Райковым.

Определение VII. Множество $B \subset M$ называется *слабым базисом*, если $B^\infty = \lim\limits_{k\to\infty} kB$ всюду плотно.

Определение VIII. Множество $B \subset M$ называется *слабым базисом порядка l*, если lB всюду плотно, а $(l-1)B$ этим свойством не обладает.

Определение IX. Множество $B \subset M$ называется *слабым базисом порядка $l_{\overline{m}^{(0)}}$ в области $\overline{m} \subset \overline{m}^{(0)}$*, если часть множества $l_{\overline{m}^{(0)}} B$, предшествующая точке $\overline{m}^{(0)}$, всюду плотна, а $(l_{\overline{m}^{(0)}} - 1) B$ этим свойством не обладает.

Определение X. Множество $B \subset M$ называется *слабым асимптотическим базисом*, если существует такая точка $\overline{m}^{(0)}$, что множество точек B^∞, следующих за точкой $\overline{m}^{(0)}$, всюду плотно.

Определение XI. Множество $B \subset M$ называется *слабым асимптотическим базисом порядка l^**, если при надлежащем выборе $\overline{m}^{(0)}$ l — наименьшее натуральное число, для которого часть множества l^*B, следующая за точкой $\overline{m}^{(0)}$, всюду плотна.

Относительно l^* здесь справедливо замечание, сделанное в определении VI.

Определение XII. Пусть B — слабый базис, $\overline{\eta} \in B^\infty$, а $g(\overline{\eta})$ равно первому k, для которого $\overline{\eta} \in kB$. Тогда функция

$$h(\overline{\xi}) = \varliminf_{\overline{\eta} \to \overline{\xi}} g(\overline{\eta}) \tag{6}$$

называется, по Райкову, *высотой множества B* в точке $\overline{\xi} \in M$.

Если $\overline{\xi} \in B^\infty$, то $h(\overline{\xi}) = g(\overline{\xi})$. Измеримость функции $h(\overline{\xi})$ доказывается так же, как и для случая линейных множеств.

Определение XIII. Величина

$$\lambda = \sup_{\overline{m} \in M} \frac{\int\limits_{\overline{\xi} \subset \overline{m}} h(\overline{\xi})\, d\overline{\xi}}{M(\overline{m})} \tag{7}$$

называется *высотой множества B*.

Определение XIV. Величина

$$\lambda(\overline{m}^{(0)}) = \sup_{\overline{m} \subset \overline{m}^{(0)}} \frac{\int\limits_{\overline{\xi} \in \overline{m}} h(\overline{\xi})\, d\overline{\xi}}{M(\overline{m})} \tag{8}$$

называется *высотой множества B в области $\overline{m} \subset \overline{m}^{(0)}$*.

Определение XV. Пусть

$$\lambda^*(\overline{m}^{(0)}) = \sup_{m \supset \overline{m}^{(0)}} \frac{\int\limits_{\overline{m}^{(0)} \subset \overline{\xi} \subset \overline{m}} h(\overline{\xi})\, d\overline{\xi}}{M(\overline{m})}, \tag{9}$$

тогда величина

$$\lambda^* = \overline{\lim_{\overline{m}^{(0)} \in M}} \lambda^*(\overline{m}^{(0)}) \tag{10}$$

называется *асимптотической высотой множества B*.

§ 4

Прежде чем перейти к изложению и доказательству теорем, необходимо доказать следующие леммы.

ЛЕММА I (Райкова). *Множество конечной высоты является базисом конечного порядка.*

Доказательство*. Как и для случая натурального ряда, проинтегрируем по области $\overline{w} \subset \overline{m}$ очевидное неравенство

$$g(\overline{m}) \leqslant g(\overline{w}) + g(\overline{m} - \overline{w}), \tag{11}$$

где $g(\overline{w})$ — минимальное число слагаемых в разложении (4), —

$$\int\limits_{\overline{w} \subset \overline{m}} g(\overline{w})\, d\overline{w} = g(\overline{m})\, M(\overline{m}) \leqslant \int\limits_{\overline{w} \subset \overline{m}} g(\overline{w})\, d\overline{w} + \int\limits_{\overline{w} \subset \overline{m}} g(\overline{m} - \overline{w})\, d\overline{w} = 2 \int\limits_{\overline{w} \subset \overline{m}} g(\overline{w})\, d\overline{w},$$

т. е. при конечном λ $g(\overline{m})$ тоже конечно, что и доказывает лемму. Аналогичные леммы можно доказать для асимптотических базисов, а также для слабых базисов.

Пусть теперь A — измеримое множество и $A_{\overline{w}}(\overline{m})$ — мера множества таких точек $\overline{\xi} \in A$, для которых $\overline{\xi} + \overline{w} \subset \overline{m}$, $\overline{\xi} + \overline{w} \in A$, а $\overline{A}_{\overline{w}}(\overline{m})$ — таких, что $\overline{\xi} + \overline{w} \subset \overline{m}$, $\overline{\xi} + \overline{w} \in \overline{A}$, где $\overline{A}$ — дополнение множества A.

ЛЕММА II. *$A_{\overline{w}}(\overline{m})$ и $\overline{A}_{\overline{w}}(\overline{m})$ — непрерывные функции от $\overline{w}$.*

Доказательство. Заметим сначала, что

$$A_{\overline{w}}(\overline{m}) = \int\limits_{\overline{\xi} \subset \overline{m} - \overline{w}} \chi_A(\overline{\xi})\, \chi_A(\overline{\xi} + \overline{w})\, d\overline{\xi}, \tag{12}$$

$$\overline{A}_{\overline{w}}(\overline{m}) = \int\limits_{\overline{\xi} \subset \overline{m} - \overline{w}} \chi_A(\overline{\xi})\, \chi_{\overline{A}}(\overline{\xi} + \overline{w})\, d\overline{\xi}. \tag{13}$$

Ограничимся доказательством непрерывности $\overline{A}_{\overline{w}}(\overline{m})$, так как для $A_{\overline{w}}(\overline{m})$ доказательство остается тем же.

$$\left| \overline{A}_{\overline{w} + \overline{\tau}}(\overline{m}) - \overline{A}_{\overline{w}}(\overline{m}) \right| \leqslant$$

* Идея и ход этого доказательства принадлежат И. М. Виноградову и заимствованы из цитированной выше статьи Д. А. Райкова [см. (1); сноска на стр. 435].

$$\leqslant \Big| \int\limits_{\bar\xi \subset \bar m - \bar w} \chi_A(\bar\xi)\,\chi_{\bar A}(\bar\xi + \bar w)\,d\bar\xi - \int\limits_{\bar\xi \subset \bar m - \bar w - \bar\tau} \chi_A(\bar\xi)\,\chi_{\bar A}(\bar\xi + \bar w)\,d\bar\xi \Big| +$$

$$+ \int\limits_{\bar\xi \subset \bar m - \bar w - \bar\tau} \chi_A(\bar\xi)\,|\chi_{\bar A}(\bar\xi + \bar w + \bar\tau) - \chi_A(\bar\xi + \bar w)|\,d\bar\xi \leqslant$$

$$\leqslant |M(\bar m - \bar w) - M'(\bar m - \bar w - \bar\tau)| + \int\limits_{\bar w \subset \bar\xi \subset \bar m - \bar\tau} |\chi_{\bar A}(\bar\xi + \bar\tau) - \chi_{\bar A}(\bar\xi)|\,d\bar\xi\,.$$

При $\bar\tau \to \bar 0$, $M(\tau) \to 0$, а при этих условиях первое слагаемое также стремится к нулю. Второе же слагаемое при $\bar\tau \to \bar 0$ стремится к нулю, так как $\chi_{\bar A}(\bar\xi)$ на $\bar A$ является суммируемой функцией ($\bar A$ — измеримое множество). Это и доказывает лемму.

ЛЕММА III.

$$\int\limits_{\bar w \subset \bar m} A_{\bar w}(\bar m)\,d\bar w \leqslant \frac{1}{2} A^2(\bar m).$$

Доказательство. В развернутом виде

$$\int\limits_{\bar w \subset \bar m} A_{\bar w}(\bar m)\,d\bar w = \int\limits_{\bar w \subset \bar m} \int\limits_{\bar\xi \subset \bar m - \bar w} \chi_A(\bar\xi)\,\chi_A(\bar\xi + \bar w)\,d\bar\xi\,d\bar w.$$

Так как, далее,

$$\int\limits_{\bar w \subset \bar m} \int\limits_{\bar\xi \subset \bar m - \bar w} \chi_A(\bar\xi)\,\chi_A(\bar\xi + \bar w)\,d\bar\xi\,d\bar w = \iint\limits_{\bar\xi \subset \bar\xi' \subset \bar m} \chi_A(\bar\xi)\,\chi_A(\bar\xi')\,d\bar\xi'\,d\bar\xi =$$

$$= \int\limits_{\bar\xi \subset \bar m} \int\limits_{\bar\xi' \subset \bar m} \chi_A(\bar\xi)\,\chi_A(\bar\xi')\,d\bar\xi'\,d\bar\xi - \int\limits_{\bar\xi \subset \bar m} \int\limits_{\substack{\bar\xi' \subset \bar m \\ \bar\xi' \not\supset \bar\xi}} \chi_A(\bar\xi)\,\chi_A(\bar\xi')\,d\bar\xi'\,d\bar\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\bar\xi \subset \bar m} \chi_A(\bar\xi)\,d\bar\xi \int\limits_{\bar\xi' \subset \bar m} \chi_A(\bar\xi')\,d\bar\xi' - \iint\limits_{\bar\xi' \subset \bar\xi \subset \bar m} \chi_A(\bar\xi)\,\chi_A(\bar\xi')\,d\bar\xi'\,d\bar\xi =$$

$$= A^2(\bar m) - \int\limits_{\bar w \subset \bar m} \int\limits_{\bar\xi' \subset \bar m - \bar w} \chi_A(\bar\xi')\,\chi_A(\bar\xi' + \bar w)\,d\bar\xi'\,d\bar w,$$

то лемма доказана.

ЛЕММА IV. *Если C — арифметическая сумма измеримого множества $A \subset M$ и слабого базиса B высоты $\lambda_{\bar m}$,* в области $\bar w \subset \bar m$, то

$$\int\limits_{\bar w \subset \bar m} \bar A_{\bar w}(\bar m)\,d\bar w \leqslant \lambda_{\bar m} M(\bar m)\,\{C(\bar m) - A(\bar m)\},$$

Доказательство. Так как B^∞ всюду плотно в области $\bar w \subset \bar m$, то в силу леммы II, можно принять $\bar w \in B^\infty$, Тогда $h(\bar w) = g(\bar w)$ и

$$\bar w = \bar b^{(1)} + \bar b^{(2)} + \ldots + \bar b^{(k)} \qquad (\bar b^{(i)} \in B), \tag{14}$$

где $k = g(\bar w)$.

Пусть

$$\bar c^{(0)} = \bar 0, \quad \bar c^{(i)} = \bar b^{(1)} + \bar b^{(2)} + \ldots + \bar b^{(i)} \quad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

Если теперь $\bar{\xi} \in A$, $\bar{\xi} + \bar{w} \in \bar{A}$, то существует такое $i \geqslant 1$, что $\bar{\xi} + \bar{c}^{(i-1)} \in A$, $\bar{\xi} + \bar{c}^{(i)} \in \bar{A}$, а потому

$$\chi_A(\bar{\xi})\chi_{\bar{A}}(\bar{\xi}+\bar{w}) \leqslant \chi_A(\bar{\xi})\chi_{\bar{A}}(\bar{\xi}+\bar{c}^{(1)}) + \chi_A(\bar{\xi}+\bar{c}^{(1)})\chi_{\bar{A}}(\bar{\xi}+\bar{c}^{(2)}) + \ldots$$
$$\ldots + \chi_A(\bar{\xi}+\bar{c}^{(k-1)})\chi_{\bar{A}}(\bar{\xi}+\bar{c}^{(k)})$$

и

$$\bar{A}_{\bar{w}}(\bar{m}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\bar{c}^{(i-1)} \subset \bar{\xi} \subset \bar{m} - \bar{w} + \bar{c}^{(i-1)}} \chi_A(\bar{\xi})\chi_{\bar{A}}(\bar{\xi}+\bar{b}^{(i)})\,d\bar{\xi}. \tag{15}$$

Обозначим множество точек $\bar{b}^{(1)}, \bar{b}^{(2)}, \ldots, \bar{b}^{(k)}$ через $\{\bar{b}\}$, а $A+\{\bar{b}\}$ — через A^*. Тогда $\chi_A(\bar{\xi}) \leqslant \chi_{A^*}(\bar{\xi}+\bar{b}^{(i)})$, так как из $\bar{\xi} \in A$ следует $\bar{\xi}+\bar{b}^{(i)} \in A^*$. Поэтому, принимая во внимание (15), имеем

$$\bar{A}_{\bar{w}}(\bar{m}) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\bar{c}^{(i-1)} \subset \bar{\xi} \subset \bar{m} - \bar{w} + \bar{c}^{(i-1)}} \chi_{A^*}(\bar{\xi}+\bar{b}^{(i)})\chi_{\bar{A}}(\bar{\xi}+\bar{b}^{(i)})\,d\bar{\xi} =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\bar{c}^{(i)} \subset \bar{\xi} \subset \bar{m} - \bar{w} + \bar{c}^{(i)}} \chi_{A^*}(\bar{\xi})\chi_{\bar{A}}(\bar{\xi})\,d\bar{\xi} \leqslant k \int\limits_{\bar{\xi} \subset \bar{m}} \chi_{A^*}(\bar{\xi})\chi_{\bar{A}}(\bar{\xi})\,d\bar{\xi} =$$
$$= g(\bar{w})\{A^*(\bar{m}) - A(\bar{m})\} \leqslant g(\bar{w})\}C(\bar{m}) - A(\bar{m})\}.$$

Отсюда и из определения XIV непосредственно следует справедливость леммы.

ЛЕММА V. *Если C — арифметическая сумма измеримого множества $A \subset M$ и слабого асимптотического базиса B асимптотической высоты λ^*, то для каждого $\delta > 0$ найдется такое $\bar{m}^{(0)}$, что*

$$\int\limits_{\bar{m}^{(0)} \subset \bar{w} \subset \bar{m}} \bar{A}_{\bar{w}}(\bar{m})\,d\bar{w} \leqslant (\lambda^* + \delta)\,M(\bar{m})\{C(\bar{m}) - A(\bar{m})\}.$$

Доказательство. Выберем $\bar{m}^{(0)}$ так, чтобы в области $\bar{m} \supset \bar{m}^{(0)}$ B^∞ было всюду плотно, что возможно в силу определения XI. В силу леммы II можно выбрать $\bar{w} \in B^\infty$, и тогда

$$\bar{w} = \bar{b}^{(1)} + \bar{b}^{(2)} + \ldots + \bar{b}^{(k)} \quad (\bar{b}^{(i)} \in B),$$

где $k = g(\bar{w})$. Легко видеть, что и для асимптотических базисов справедлива оценка (15), а следовательно, также

$$\bar{A}_{\bar{w}}(\bar{m}) \leqslant g(\bar{w})\{C(\bar{m}) - A(\bar{m})\}.$$

Проинтегрировав это неравенство по $\bar{m}^{(0)} \subset \bar{w} \subset \bar{m}$, и принимая во внимание определение XV, получим наше утверждение.

§ 5

ТЕОРЕМА I. *Пусть B — слабый базис с высотой $\lambda_{\bar{m}^{(0)}}$ в области $\bar{m} \subset \bar{m}^{(0)}$. Тогда для любого множества $A \subset M$ плотности $\alpha_{\bar{m}^{(0)}} < \frac{1}{2^{n-1}}$*

в той же области арифметическая сумма $C = A + B$ имеет в этой области плотность

$$\gamma_{\overline{m}^{(0)}} \geqslant \alpha_{\overline{m}^{(0)}} \left\{ 1 + \frac{1 - 2^{n-1}\alpha_{\overline{m}^{(0)}}}{2^n \lambda_{\overline{m}^{(0)}}} \right\}.$$

Если $\overline{m}^{(0)}$ *не фиксируется, то*

$$\gamma \geqslant \alpha \left\{ 1 + \frac{1 - 2^{n-1}\alpha}{2^n \lambda} \right\}.$$

Доказательство*. По тем же соображениям, как и для одномерного случая, можно при доказательстве считать A измеримым множеством. Пусть $\overline{w} \subset \overline{m} \subset \overline{m}^{(0)}$. Так как

$$A_{\overline{w}}(\overline{m}) + \overline{A}_{\overline{w}}(\overline{m}) = A(\overline{m} - \overline{w}), \tag{16}$$

то, интегрируя это тождество в области $\overline{w} \subset \overline{m}$ и используя леммы III и IV, получаем

$$\frac{1}{2} A^2(\overline{m}) \geqslant \int\limits_{\overline{w} \subset \overline{m}} A(\overline{m} - \overline{w})\, d\overline{w} - \lambda_{\overline{m}^{(0)}} M(\overline{m}) \{C(\overline{m}) - A(\overline{m})\}. \tag{17}$$

Но

$$\int\limits_{\overline{w} \subset \overline{m}} A(\overline{m} - \overline{w})\, d\overline{w} = \int\limits_{\overline{w} \subset \overline{m}} A(\overline{w})\, d\overline{w} \geqslant \alpha_{\overline{m}^{(0)}} \int\limits_{\overline{w} \subset \overline{m}} M(\overline{w})\, d\overline{w} = \alpha_{\overline{m}^{(0)}} \frac{M^2(\overline{m})}{2^n} \tag{18}$$

Подставляя (18) в (17), получим

$$C(\overline{m}) \geqslant \alpha_{\overline{m}^{(0)}} \frac{M(\overline{m})}{2^n} + A(\overline{m}) - \frac{A^2(\overline{m})}{2\lambda_{\overline{m}^{(0)}} M \overline{m}}. \tag{19}$$

Так как, далее, $A(\overline{m}) \leqslant M(\overline{m}) \leqslant \lambda_{\overline{m}^{(0)}} M(\overline{m})$ и при $z < \lambda_{\overline{m}^{(0)}} M(\overline{m})$ функция

$$z - \frac{z^2}{2\lambda_{\overline{m}^{(0)}} M(\overline{m})}$$

возрастает с ростом z, то в силу неравенства

$$A(\overline{m}) \geqslant \alpha_{\overline{m}^{(0)}} M(\overline{m})$$

имеем

$$C(\overline{m}) \geqslant \alpha_{\overline{m}^{(0)}} \left\{ 1 + \frac{1 - 2^{n-1}\alpha_{\overline{m}^{(0)}}}{2^n \lambda_{\overline{m}^{(0)}}} \right\} M(\overline{m}),$$

и теорема доказана.

ТЕОРЕМА II. *Пусть B — слабый асимптотической базис с асимптотической высотой λ^*. Тогда для любого множества $A \subset M$ асимптоти-*

---

* Доказательство является переработкой для многомерного пространства доказательства Д. А. Райкова.

ческой плотности $\alpha^* < \frac{1}{2^{n-1}}$ *арифметическая сумма* $C = A + B$ *имеет асимптотическую плотность*

$$\gamma^* \geqslant \alpha^* \left\{ 1 + \frac{1 - 2^{n-1}\alpha^*}{2^n \lambda^*} \right\}.$$

Доказательство. Из определения III для $\varepsilon > 0$ следует существование такой точки $\overline{m}^{(0)}$, что для всех $\overline{m} \supset \overline{m}^{(0)}$ будет удовлетворяться оценки

$$A(\overline{m}) \geqslant (\alpha^* - \varepsilon) M(\overline{m}). \tag{20}$$

Так как в остальном выбор $\overline{m}^{(0)}$ произволен, то выберем ее так, чтобы в области $\overline{m} \supset \overline{m}^{(0)}$ множество B^∞ было всюду плотным. Это возможно, так как B — слабый асимптотический базис. Ограничимся опять случаем, когда A — измеримое множество.

Пусть теперь $\overline{m} \supset 2\overline{m}^{(0)}$ и $\overline{m}^{(0)} \subset \overline{w} \subset \overline{m}$. Интегрируя (18) по w, получаем

$$\int\limits_{\overline{m}^{(0)} \subset \overline{w} \subset \overline{m}} A(\overline{m} - \overline{w})\, d\overline{w} = \int\limits_{\overline{m}^{(0)} \subset \overline{w} \subset \overline{m}} A_{\overline{w}}(\overline{m})\, d\overline{w} +$$

$$+ \int\limits_{\overline{m}^{(0)} \subset \overline{w} \subset \overline{m}} \overline{A}_{\overline{w}}(\overline{m})\, d\overline{w} \leqslant \int\limits_{\overline{w} \subset \overline{m}} A_{\overline{w}}(\overline{m})\, d\overline{w} + \int\limits_{\overline{m}^{(0)} \subset \overline{w} \subset \overline{m}} \overline{A}_{\overline{w}}(\overline{m})\, d\overline{w}. \tag{21}$$

Но при $\overline{w} \supset \overline{m}^{(0)}$

$$\int\limits_{\overline{m}^{(0)} \subset \overline{w} \subset \overline{m}} A(\overline{m} - \overline{w})\, d\overline{w} \geqslant (\alpha^* - \varepsilon) \int\limits_{\overline{m}^{(0)} \subset \overline{w} \subset \overline{m}} M(\overline{m} - \overline{w})\, d\overline{w} =$$

$$= (\alpha^* - \varepsilon) \frac{M^2(\overline{m} - \overline{m}^{(0)})}{2^n}. \tag{22}$$

Выбрав $\overline{m}'$ так, чтобы $M(m') > NM(\overline{m}^{(0)})$, где N — достаточно большое число, получим для всех $\overline{m} \supset \overline{m}'$

$$M^2(\overline{m} - \overline{m}^{(0)}) > (1 - \varepsilon_1) M(m),$$

где ε_1 — сколь угодно малое положительное число. Отсюда и из (22) для таких $\overline{m}$ имеем

$$\int\limits_{\overline{m}^{(0)} \subset w \subset \overline{m}} A(\overline{m} - \overline{w})\, d\overline{w} \geqslant \frac{\alpha^* - \varepsilon}{2^n}(1 - \varepsilon_1) M(\overline{m}) \geqslant \frac{\alpha^* - \varepsilon^*}{2^n} M(m). \tag{23}$$

Применяя к (21) леммы IV и V и принимая во внимание (23) для всех $\overline{m} \supset m'$, получим

$$\frac{\alpha^* - \varepsilon^*}{2^n} M(\overline{m}) \leqslant \frac{A^2(m)}{2} + (\lambda^* + \delta) M(\overline{m}) \{C(\overline{m}) - A(\overline{m})\}$$

Заменяя, как и в § 5, $A(\overline{m})$ меньшей величиной $(\alpha^* - \varepsilon^*) M(\overline{m})$, находим

$$C(\overline{m}) \geqslant (\alpha^* - \varepsilon^*) \left\{ 1 + \frac{1 - 2^{n-1}(\alpha^* - \varepsilon^*)}{2^n(\lambda^* + \delta)} \right\} M(\overline{m}),$$

а это и означает, ввиду произвольности ε^* и δ, что

$$\gamma^* = \varliminf_{\overline{m} \in M} \frac{C(\overline{m})}{M(\overline{m})} \geqslant \alpha^* \left\{ 1 + \frac{1 - 2^{n-1}\alpha^*}{2^n \lambda^*} \right\}.$$

Математический институт
при Московском гос. университете
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4. V. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Райков Д. А., О сложении множеств в смысле Шнирельмана, Мат. сб., 5 (47) : 2 (1939), 425—438.
[2] Erdös P., On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers, Acta Arithm., I, 2 (1936), 197—200 (перевод помещен в VII вып. «Успехов математических наук»).
[3] Erdös P., On the asymptotical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers, II. Труды Тбилисского Матем. ин-та, 3 (1938), 217—233.
[4] Шатровский Л. И., К вопросу о двух теоремах Эрдеша для множеств целых точек n-мерного пространства, Известия АН, серия матем., 5 (1941), 411—422.

L. CHATROWSKY. SUR LE THÉORÈME DE ERDÖS—RAIKOV

RÉSUMÉ

Soit M un ensemble de points $\overline{m}$ de l'espace E^n dont les coordonnées $m_1, m_2, \ldots, m_n$ satisfont aux inégalités $m_i \geqslant 0$ pour $i=1, 2, \ldots, n$. Un point quelconque de l'ensemble M, soit $\overline{c}=\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, est la somme de points $\overline{a}=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et $\overline{b}=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ lorsque $c_i=a_i+b_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

On nomme l'ensemble C de points $\overline{c}$ de la forme $\varepsilon_1\overline{a}+\varepsilon_2\overline{b}$ où $\overline{a}\in A$, $\overline{b}\in B$, ε_1 et $\varepsilon_2=0$ ou 1 $(\varepsilon_1+\varepsilon_2 \neq 0)$ la *somme arithmétique* d'ensembles A et B.

Nous écrirons $\overline{m}' \subset \overline{m}$ ou $\overline{m} \supset \overline{m}'$ si $m_i' \leqslant m_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, et soit $X(\overline{m})$ la mesure inférieure de la partie de l'ensemble X dont les éléments $\overline{x} \subset \overline{m}$.

Après avoir défini pour M la base, la dénsité etc. nous pouvons démontrer les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. *Soit B une base faible dont l'hauteur est $\lambda_{\overline{m}^{(0)}}$ dans la région $\overline{m} \subset \overline{m}^{(0)}$. Alors quel que soit un ensemble $A \subset N$ de densité $\alpha_{\overline{m}^{(0)}} < \frac{1}{2^{n-1}}$ dans la même région, la condition suivante est vérifiée pour la somme arithmétique $C=A+B$:*

$$\gamma_{\overline{m}^{(0)}} \geqslant \alpha_{\overline{m}^{(0)}} \left\{1+\frac{1-2^{n-1}\alpha_{\overline{m}^{(0)}}}{2^n\lambda_{\overline{m}^{(0)}}}\right\}.$$

Si l'on ne fixe pas $\overline{m}^{(0)}$, on peut écrire cette condition sous la forme

$$\gamma \geqslant \alpha \left\{1+\frac{1-2^{n-1}\alpha}{2^n\lambda}\right\}.$$

THÉORÈME II. *Soit B une base faible asymptotique dont l'hauteur asymptotique est λ^*. Alors quel que soit un ensemble $A \subset M$ de densité asymptotique $\alpha^* < \frac{1}{2^{n-1}}$ la condition suivante est vérifiée pour la somme arithmétique $C=A+B$:*

$$\gamma^* \geqslant \alpha^* \left\{1+\frac{1-2^{n-1}\alpha^*}{2^n\lambda^*}\right\}.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 311—320 Série mathématique

В. М. ДУБРОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОЖЕСТВА И О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Работа посвящена решению вопроса, возникшего при исследовании ([1]) аналитическими методами проблем теории вероятностей,—о предельном переходе под знаком интеграла в самом общем смысле. Выясняются также некоторые общие свойства вполне аддитивных функций множества.

Пусть дано множество $\mathfrak{A}$ каких-то элементов и семейство $\mathfrak{M}$ его подмножеств, содержащее какие-угодно разности и конечные или счетные суммы своих элементов, отдельные элементы $\mathfrak{A}$, все множество $\mathfrak{A}$ и пустое множество. Рассматриваемые в последующем функции множества предполагаются определенными на семействе $\mathfrak{M}$; относительно этого же семейства определяются рассматриваемые в этой работе абстрактные интегралы, которые понимаются в смысле Lebesgue'a — Stieltjes'a ([2, 3]). Условимся обозначать полную вариацию вполне аддитивной функции множества тем же знаком, что и самую функцию с чертой наверху. Приводимые в дальнейшем доказательства основаны на том известном обстоятельстве, что полная вариация вполне аддитивной функции множества представляет собой также вполне аддитивную функцию.

ТЕОРЕМА I. *Пусть последовательность $\Phi_1(\mathscr{E})$, $\Phi_2(\mathscr{E})$, ... вполне аддитивных функций стремится к определенному конечному пределу $\Phi(\mathscr{E})$ для любого $\mathscr{E}$, содержащегося в $\mathfrak{M}$. Тогда предельная функция $\Phi(\mathscr{E})$ также вполне аддитивна.*

Доказательство. Введем обозначение $\Phi_n(\mathscr{E})=\Phi(n, \mathscr{E})$ для $n=1, 2, \ldots$; тогда для любого $\mathscr{E}\subset\mathfrak{M}$

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(n, \mathscr{E})=\Phi(\mathscr{E}). \tag{1}$$

Из этого равенства следует, что функция $\Phi(\mathscr{E})$ аддитивна.

Рассмотрим сумму $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots$ взаимно не налегающих множеств $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ... из семейства $\mathfrak{M}$ и покажем, что ряд

$$\Phi(\mathscr{E}_1)+\Phi(\mathscr{E}_2)+\ldots \tag{2}$$

абсолютно сходится. Действительно, предположим противное и выберем из последовательности $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ... подпоследовательность $\overline{\mathscr{E}}_1$, $\mathscr{E}_2$, ... так, чтобы ряд

$$\Phi(\overline{\mathscr{E}}_1)+\Phi(\mathscr{E}_2)+\ldots \tag{3}$$

расходился и имел все члены одного и того же знака. Положим $R(n)=\overline{\mathscr{E}}_{n+1}+\overline{\mathscr{E}}_{n+2}+\ldots$ для $n=0, 1, 2, \ldots$ Возьмем положительное число ε и монотонно возрастающую и стремящуюся к бесконечности последовательность $N_1, N_2, \ldots$ положительных чисел ($N_1>\varepsilon$). Выберем последовательно целые положительные числа α_1, γ_1 и β_1 так, чтобы выполнялись условия

$$|\Phi(e_1)|>N_1 \quad (e_1=R(0)-R(\alpha_1)),$$
$$|\Phi(\gamma_1, e_1)|>N_1,$$
$$\overline{\Phi}[\gamma_1, R(\beta_1)]<\varepsilon \quad (\alpha_1\leqslant\beta_1).$$

Это, очевидно, возможно в силу расходимости ряда (3), равенства (1) и полной аддитивности функции $\overline{\Phi}(\gamma_1, \mathscr{E})$. Предположим теперь, что выбраны целые положительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, для которых выполняются условия

$$\alpha_1\leqslant\beta_1<\alpha_2\leqslant\beta_2<\alpha_3\leqslant\beta_3<\ldots<\alpha_n\leqslant\beta_n, \quad \gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_n,$$
$$|\Phi(\gamma_i, e_1+e_2+\ldots+e_i)|>N_i, \tag{4}$$

где

$$e_1=R(\beta_0)-R(\alpha_1),\ e_2=R(\beta_1)-R(\alpha_2),\ \ldots,\ e_i=R(\beta_{i-1})-R(\alpha_i) \quad (\beta_0=0);$$
$$\overline{\Phi}[\gamma_i, R(\beta_i)]<\varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Тогда из расходимости ряда (3) прежде всего следует существование такого числа α_{n+1}, что

$$|\Phi(e_1+e_2+\ldots+e_{n+1})|>N_{n+1} \quad (\beta_n<\alpha_{n+1}),$$

где $e_{n+1}=R(\beta_n)-R(\alpha_{n+1})$; в силу основного условия теоремы можно выбрать такое γ_{n+1}, что

$$|\Phi(\gamma_{n+1}, e_1+e_2+\ldots+e_{n+1})|>N_{n+1}, \quad \gamma_n<\gamma_{n+1};$$

наконец, из полной аддитивности функции $\overline{\Phi}(\gamma_{n+1}, \mathscr{E})$ вытекает существование числа β_{n+1}, удовлетворяющего условию

$$\overline{\Phi}[\gamma_{n+1}, R(\beta_{n+1})]<\varepsilon \quad (\alpha_{n+1}\leqslant\beta_{n+1}).$$

Таким образом, существуют бесконечные последовательности натуральных чисел

$$\alpha_1\leqslant\beta_1<\alpha_2\leqslant\beta_2<\alpha_3\leqslant\beta_3<\ldots, \quad \gamma_1<\gamma_2<\gamma_3<\ldots,$$

для которых выполняются условия (4) и (5) при любом натуральном i.

Рассмотрим теперь сумму $e=\sum_{i=1}^{\infty} e_i$. Для нее, очевидно, в силу (4) и (5), будем иметь

$$|\Phi(\gamma_i, e)|\geqslant|\Phi(\gamma_i, e_1+e_2+\ldots+e_i)|-|\Phi(\gamma_i, e_{i+1}+e_{i+2}+\ldots)|>$$
$$>N_i-\overline{\Phi}[\gamma_i, R(\beta_i)]>N_i-\varepsilon \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Следовательно, при неограниченном возрастании i $|\Phi(\gamma_i, e)|$ стремится к бесконечности, что противоречит основному условию теоремы. Таким образом, ряд (2) действительно абсолютно сходится.

Перейдем теперь к следующей части доказательства. Положим

$$\rho(n) = \mathcal{E}_{n+1} + \mathcal{E}_{n+2} + \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как

$$\Phi(\mathcal{E}) = \Phi(\mathcal{E}_1) + \Phi(\mathcal{E}_2) + \ldots + \Phi(\mathcal{E}_n) + \Phi[\rho(n)],$$

то остается показать, что последнее слагаемое этой суммы стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Предположим противное. Тогда существует такое положительное постоянное a, что для бесконечного множества значений n

$$|\Phi[\rho(n)]| > a. \tag{6}$$

Возьмем постоянные положительные числа b и ε, где $b < a$, $\varepsilon < \frac{1}{5}(a - b)$. Выберем, затем, бесконечную возрастающую последовательность $n_1, n_2, \ldots$ значений n, для каждого из которых будет выполняться неравенство (6) и, кроме того, неравенство

$$|\Phi(\mathcal{E}_{n+1})| + |\Phi(\mathcal{E}_{n+2})| + \ldots < \varepsilon. \tag{7}$$

Положим $p_1 = n_1$ и выберем q_1 так, чтобы было $|\Phi[q_1, \rho(p_1)]| > a$. Выберем затем из последовательности $n_1, n_2, \ldots$ число p_2 так, чтобы выполнялось условие $\overline{\Phi}[q_1, \rho(p_2)] < \varepsilon$. Очевидно, $p_2 > p_1$. Полагая $e_1' = \rho(p_1) - \rho(p_2)$, легко видеть, что $|\Phi(q_1, e_1')| > a - \varepsilon$. Из (1) и (7) вытекает, что существует число q_2, большее q_1, для которого $|\Phi[q_2, \rho(p_2)]| > a$, и, кроме того, $|\Phi(q_2, e_1')| < \varepsilon$. Выберем, наконец, из последовательности $n_1, n_2, \ldots$ число p_3 так, чтобы было $\overline{\Phi}[q_2, \rho(p_3)] < \varepsilon$. Тогда, как легко видеть, $p_2 < p_3$, $|\Phi(q_2, e_2')| > a - \varepsilon$, где $e_2' = \rho(p_2) - \rho(p_3)$. Докажем теперь, что существуют бесконечная возрастающая подпоследовательность $p_1, p_2, \ldots$, выбранная из последовательности $n_1, n_2, \ldots$, и бесконечная возрастающая последовательность $q_1, q_2, \ldots$, для которых выполняются условия:

$$|\Phi(q_i, e_1')| + |\Phi(q_i, e_2')| + \ldots + |\Phi(q_i, e_{i-1}')| < \varepsilon, \tag{8}$$

где

$$e_1' = \rho(p_1) - \rho(p_2), \quad e_2' = \rho(p_2) - \rho(p_3), \ \ldots \quad (i = 2, 3, \ldots);$$

$$|\Phi[q_i, \rho(p_i)]| > a, \quad \overline{\Phi}[q_i, \rho(p_{i+1})] < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

и, следовательно,

$$|\Phi(q_i, e_i')| > a - \varepsilon. \tag{10}$$

Действительно, предположим, что эти условия выполняются при $i \leqslant n$, причем определены только первые $n+1$ членов последовательности $p_1, p_2, \ldots$ и первые n членов последовательности $q_1, q_2, \ldots$, где n — определенное натуральное число ($n \geqslant 2$). Определим, прежде всего, число q_{n+1}, большее q_n, так, чтобы имели место неравенства

$$|\Phi(q_{n+1}, e_1')| + |\Phi(q_{n+1}, e_2')| + \ldots + |\Phi(q_{n+1}, e_n')| < \varepsilon,$$

$$|\Phi[q_{n+1}, \rho(p_{n+1})]| > a.$$

Это, очевидно, возможно в силу (1), (6) и (7). Выберем, затем, аналогично предыдущему, из последовательности n_1, n_2, ... число p_{n+2} так, чтобы выполнялось условие $\bar{\Phi}[q_{n+1}, \rho(p_{n+2})] < \varepsilon$. Тогда, как легко видеть, мы будем иметь $p_{n+2} > p_{n+1}$, $|\Phi(q_{n+1}, e'_{n+1})| > a - \varepsilon$. Таким образом, то, что предполагалось верным для определенного n, доказано и для n на единицу большего, а так как оно верно при $n = 2$, то оно верно также и вообще. Рассмотрим теперь сумму

$$e' = e'_1 + e'_3 + e'_5 + \dots$$

Для нечетного i, в силу условий (8), (9) и (10), будем иметь

$$|\Phi(q_i, e')| > |\Phi(q_i, e'_{i+2})| - |\Phi(q_i, e'_1 + e'_3 + \dots + e'_{i-2})| - \\ - |\Phi(q_i, e'_{i+2} + e'_{i+4} + \dots| > a - 3\varepsilon.\,)$$

Если же i—число четное, то, в силу (8) и (9),

$$|\Phi(q_i, e')| < |\Phi(q_i, e'_1 + e'_3 + \dots + e'_{i-1})| + |\Phi(q_i, e'_{i+1} + e'_{i+3} + \dots)| < 2\varepsilon.$$

Абсолютная величина разности между любыми двумя соседними членами последовательности $\Phi(q_1, e')$, $\Phi(q_2, e')$, ... остается, следовательно, больше положительного постоянного b, что противоречит основному условию рассматриваемой теоремы. Таким образом, доказано, что величина $\Phi[\rho(n)]$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n, т. е. что предельная функция $\Phi(\mathscr{E})$ действительно, вполне аддитивна.

ТЕОРЕМА II. *Пусть последовательность* $\Phi_1(\mathscr{E})$, $\Phi_2(\mathscr{E})$, ... *вполне аддитивных функций для любого* $\mathscr{E}$, *содержащегося в* $\mathfrak{M}$, *стремится к нулю. Тогда соответствующая последовательность* $\bar{\Phi}_1(\mathscr{E})$, $\bar{\Phi}_2(\mathscr{E})$, ... *полных вариаций обладает следующим свойством: какова бы ни была сумма* $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \dots$ *взаимно не налегающих множеств из семейства* $\mathfrak{M}$ *величина*

$$\bar{\Phi}_n(\mathscr{E}_{n+1} + \mathscr{E}_{n+2} + \dots)$$

стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Замечание. При доказательстве мы будем основываться на следующем известном свойстве любой вполне аддитивной функции $\Phi(\mathscr{E})$: каково бы ни было множество $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}$, его можно разбить на два непересекающиеся множества $\mathscr{E}_P$ и $\mathscr{E}_N$ из семейства $\mathfrak{M}$, такие, что для первого из них и любой его части, принадлежащей $\mathfrak{M}$, $\Phi(\mathscr{E}) \geqslant 0$, а для второго и любой его части из $\mathfrak{M}$, наоборот, $\Phi(P) \leqslant \mathscr{E}\, 0$ (4,5). Очевидно, $\bar{\Phi}(\mathscr{E}) = |\Phi(\mathscr{E}_P)| + |\Phi(\mathscr{E}_N)|$, откуда одно из слагаемых последней суммы, или каждое из них, не меньше, чем $\frac{1}{2}\bar{\Phi}(\mathscr{E})$. Однако, при доказательстве теоремы можно было бы избегнуть ссылки на это свойство вполне аддитивных функций. Вместо этого можно было бы основываться на другом свойстве любой вполне аддитивной функции $\Phi(\mathscr{E})$, непосредственно вытекающем из определения полной вариации; именно, сколь бы мало ни было положительное число ε, любое множество

$\mathcal{E}$ из $\mathfrak{M}$ содержит часть $\mathcal{E}' \subset \mathfrak{M}$, для которой $|\Phi(\mathcal{E}')| \geqslant \frac{1}{2} \overline{\Phi}(\mathcal{E}) - \varepsilon$. Это привело бы к усложнению доказательства, но лишь к незначительному.

Доказательство. Введем обозначение $\Phi_n(\mathcal{E}) = \Phi(n, \mathcal{E})$ для $n = 1, 2, \ldots$, тогда для любого $\mathcal{E}$, содержащегося в $\mathfrak{M}$,

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \Phi(n, \mathcal{E}) = 0. \tag{11}$$

Предположим, что теорема неверна. Тогда существуют положительное число a и сумма $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots$ взаимно не налегающих множеств из семейства $\mathfrak{M}$ такие, что для бесконечной возрастающей последовательности $n_1, n_2, \ldots$ значений n имеет место неравенство

$$\overline{\Phi}_n(\mathcal{E}_{n+1} + \mathcal{E}_{n+2} + \ldots) \geqslant 2a.$$

Положим $R(n) = \mathcal{E}_{n+1} + \mathcal{E}_{n+2} + \ldots$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и обозначим через $r(n)$ часть множества $R(n)$, для которой выполняется условие

$$|\Phi[n, r(n)]| \geqslant a, \tag{12}$$

где $n = n_1, n_2, \ldots$ Возьмем постоянное положительное число ε, меньшее, чем $\frac{1}{4}a$. Пусть $\alpha_1 = n_1$; выберем β_1 столь большим, чтобы имело место неравенство $\overline{\Phi}[\alpha_1, R(\beta_1)] < \varepsilon$, и положим $e_1 = r(\alpha_1) - r(\alpha_1) R(\beta_1)$. Тогда, в силу (12), как легко видеть, будем иметь: $\alpha_1 < \beta_1$,

$$|\Phi(\alpha_1, e_1)| \geqslant a - \overline{\Phi}[\alpha_1, r(\alpha_1) R(\beta_1)] > a - \varepsilon.$$

Выберем, затем, из последовательности $n_1, n_2, \ldots$ число α_2 так, чтобы выполнялись условия $\beta_1 \leqslant \alpha_2$, $|\Phi(\alpha_2, e_1)| < \varepsilon$. В силу (11) это возможно. Пусть, далее, β_2 столь велико, что $\overline{\Phi}[\alpha_2, R(\beta_2)] < \varepsilon$, откуда следует, что $\alpha_2 < \beta_2$. Тогда, полагая, как и в предыдущем случае, $e_2 = r(\alpha_2) - r(\alpha_2) R(\beta_2)$, будем иметь $|\Phi(\alpha_2, e_2)| > a - \varepsilon$. Докажем теперь, что существуют бесконечная возрастающая подпоследовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ последовательности $n_1, n_2, \ldots$ и бесконечная возрастающая последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots$, для которых выполняются условия

$$\alpha_1 < \beta_1 \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \alpha_3 < \beta_3 \leqslant \ldots, \tag{13}$$

$$|\Phi(\alpha_i, e_1 + e_2 + \ldots + e_{i-1})| < \varepsilon, \tag{14}$$

где

$$e_1 = r(\alpha_1) - r(\alpha_1) R(\beta_1), \quad e_2 = r(\alpha_2) - r(\alpha_2) R(\beta_2), \ \ldots \quad (i = 2, 3, \ldots),$$

$$\overline{\Phi}[\alpha_i, R(\beta_i)] < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

откуда

$$|\Phi(\alpha_i, e_i)| > a - \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

В самом деле, допустим, что эти условия выполняются при $i \leqslant n$, где n — определенное натуральное число $(n \geqslant 2)$, и что определены пока только первые n элементов последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, и первые n элементов последовательности $\beta_1, \beta_2, \ldots$, удовлетворяющие соот-

ношению (13). Выберем, что возможно в силу (11), из последовательности $n_1, n_2, \dots$ число α_{n+1}, удовлетворяющее условиям

$$\beta_n < \alpha_{n+1}, \quad |\Phi(\alpha_{n+1}, e_1 + e_2 + \dots + e_n)| < \varepsilon.$$

Выберем, затем, натуральное число β_{n+1} так, чтобы имело место неравенство $\Phi[\alpha_{n+1}, R(\beta_{n+1})] < \varepsilon$, что, очевидно, также возможно. Тогда, как и выше, легко убедиться в справедливости неравенств $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$, $|\Phi(\alpha_{n+1}, e_{n+1})| > a - \varepsilon$, основываясь на соотношении (12). Таким образом, то, что было предположено верным при некотором натуральном n, оказывается верным и при замене n на $n+1$, а так как оно доказано при $n=2$, то оно верно, следовательно, и вообще.

Положим теперь $e = e_1 + e_2 + \dots$ Тогда в силу (14), (15) и (16), как легко видеть, будем иметь

$$|\Phi(\alpha_i, e)| \geqslant |\Phi(\alpha_i, e_i)| - |\Phi(\alpha_i, e_1 + e_2 + \dots + e_{i-1})| -$$
$$- |\Phi(\alpha_i, e_{i+1} + e_{i+2} + \dots)| > a - 2\varepsilon - \overline{\Phi}[\alpha_i, R(\beta_i)],$$
$$|\Phi(\alpha_i, e)| > a - 3\varepsilon > \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Полученный вывод находится в противоречии с основным условием рассматриваемой теоремы. Последняя, таким образом, доказана.

ТЕОРЕМА III. *Пусть последовательность* $\Phi_1(\mathscr{E}), \Phi_2(\mathscr{E}), \dots$ *вполне аддитивных функций стремится к определенному конечному пределу* $\Phi(\mathscr{E})$ *для любого* $\mathscr{E}$, *содержащегося в* $\mathfrak{M}$. *Тогда все соответствующие полные вариации* $\overline{\Phi}_1(\mathfrak{A}), \overline{\Phi}_2(\mathfrak{A}), \dots$ *не превосходят одной и той же постоянной.*

Доказательство. Положим $\Psi_n(\mathscr{E}) = \Psi(n, \mathscr{E}) = \Phi_n(\mathscr{E}) - \Phi(\mathscr{E})$ для каждого n и для любого $\mathscr{E}$ из $\mathfrak{M}$. Тогда, в силу теоремы I, функции $\Psi_n(\mathscr{E})$ будут вполне аддитивны, причем $\overline{\Psi}_n(\mathscr{E}) \geqslant \overline{\Phi}_n(\mathscr{E}) - \overline{\Phi}(\mathscr{E})$. Основываясь на свойстве вполне аддитивных функций (см. теорема II), приведем в соответствие каждой из функций Ψ_n непересекающиеся множества $\mathscr{E}(n, 1)$ и $\mathscr{E}(n, 2)$ из семейства $\mathfrak{M}$, обладающие следующими свойствами:

$$\mathscr{E}(n, 1) + \mathscr{E}(n, 2) = \mathfrak{A};$$
$$\text{если} \quad \mathscr{E} \subset \mathscr{E}(n, 1), \ \mathscr{E} \subset \mathfrak{M}, \ \text{то} \ \Psi_n(\mathscr{E}) \geqslant 0;$$
$$\text{если} \quad \mathscr{E} \subset \mathscr{E}(n, 2), \ \mathscr{E} \subset \mathfrak{M}, \ \text{то} \ \Psi_n(\mathscr{E}) \leqslant 0.$$

Предположим теперь, вопреки тому, что нужно доказать, что последовательность $\overline{\Phi}_1(\mathfrak{A}), \overline{\Phi}_2(\mathfrak{A}), \dots$ не ограничена. Тогда таким же свойством будет обладать, очевидно, и последовательность $\overline{\Psi}_1(\mathfrak{A}), \overline{\Psi}_2(\mathfrak{A}), \dots$ Рассмотрим, затем, множества

$$e_1 = \mathscr{E}(1, \alpha_1), \ e_2 = \mathscr{E}(1, \alpha_1)\,\mathscr{E}(2, \alpha_2), \ e_3 = \mathscr{E}(1, \alpha_1)\,\mathscr{E}(2, \alpha_2)\,\mathscr{E}(3, \alpha_3), \dots,$$

где каждый из индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ имеет определенное из двух значений 1 и 2, выбранное так, что для любого n соответствующая последовательность $\overline{\Psi}_1(e_n), \overline{\Psi}_2(e_n), \dots$ не ограничена. Такие множества, очевидно, существуют. Легко видеть также, что $|\Psi_m(\mathscr{E})| = \overline{\Psi}_m(\mathscr{E})$,

если $\mathcal{E} \subset e_n$, $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$, $m \leqslant n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Обозначив через e общую часть всех множеств $e_1, e_2, \ldots$, будем иметь

$$|\Psi_n(e)| = \overline{\Psi}_n(e).$$

В силу условия рассматриваемой теоремы из последнего равенства следует, что $\overline{\Psi}_n(e)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n. С другой стороны, очевидно, существует возрастающая последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots$ натуральных чисел, обладающая тем свойством, что $\Psi(\beta_n, e_n)$ стремится к бесконечности при неограниченном возрастании n. Но тогда в силу равенства $\Psi(\beta_n, e_n) = \Psi(\beta_n, e_n - e) + \Psi(\beta_n, e)$ и в силу теоремы II последовательность $\overline{\Psi}(\beta_n, e)$ также стремится к бесконечности при неограниченном возрастании n. Полученное противоречие означает, что рассматриваемая теорема, действительно, верна.

ТЕОРЕМА IV. *Пусть A — множество, принадлежащее семейству $\mathfrak{M}$. Пусть для любой части $\mathcal{E}$ множества A, содержащейся в семействе $\mathfrak{M}$, последовательность $\Phi_1(\mathcal{E}), \Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ вполне аддитивных функций стремится к определенному конечному пределу $\Phi(\mathcal{E})$. Пусть, затем, дана последовательность измеримых относительно $\mathfrak{M}$ функций $f_1(x), f_2(x), \ldots$ элемента x множества A, не превосходящих по абсолютной величине одной и той же постоянной M, стремящаяся к пределу $f(x)$ для любого элемента x множества A.*

Тогда предельная функция множества $\Phi(\mathcal{E})$ вполне аддитивна; имеет место соотношение

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,\Phi_n(d\mathcal{E}) = \int_A f(x)\,\Phi(d\mathcal{E}). \tag{17}$$

Доказательство. Первое утверждение рассматриваемой теоремы является простым следствием теоремы I.

Обратимся к доказательству второго. Положим

$$\Psi_n(\mathcal{E}) = \Phi_n(\mathcal{E}) - \Phi(\mathcal{E}), \quad \varphi_n(x) = f_n(x) - f(x);$$

$$\delta_1(n) = \int_A f(x)\,\Psi_n(d\mathcal{E}), \quad \delta_2(n) = \int_A \varphi_n(x)\,\Phi(d\mathcal{E}), \quad \delta_3(n) = \int_A \varphi_n(x)\,\Psi_n(d\mathcal{E})$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$\int_A f_n(x)\,\Phi_n(d\mathcal{E}) - \int_A f(x)\,\Phi(d\mathcal{E}) = \delta_1(n) + \delta_2(n) + \delta_3(n).$$

Достаточно, таким образом, доказать, что каждое из слагаемых правой части последнего равенства стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Обозначим, соответственно, через $P_n(\mathcal{E})$ и $N_n(\mathcal{E})$ полусумму и полуразность функций $\overline{\Psi}_n(\mathcal{E})$ и $\Psi_n(\mathcal{E})$ для каждого n. Тогда $\overline{\Psi}_n = P_n + N_n$,

$\Psi_n = P_n - N_n$, причем функции множества P_n и N_n неотрицательны. Возьмем, затем, сколь угодно малое положительное число ε. Тогда, очевидно,

$$\left| \int\limits_A f(x)\, P_n(d\mathscr{E}) - \sum_{i=1}^{m} l_i P_n(e_i) \right| \leqslant \varepsilon P_n(A), \tag{18}$$

$$\left| \int\limits_A f(x)\, N_n(d\mathscr{E}) - \sum_{i=1}^{m} l_i N_n(e_i) \right| \leqslant \varepsilon N_n(A), \tag{19}$$

где $l_0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_m = l$, l_0 — постоянное число, не превосходящее нижней грани $f(x)$ на множестве A, l — постоянное число, большее верхней грани $f(x)$ на множестве A; все разности $l_i - l_{i-1}$ меньше ε, e_i обозначает множество элементов A, для которых $l_{i-1} \leqslant f(x) < l_i$, $i = 1, 2, \ldots m$; $n = 1, 2, \ldots$ Из неравенств (18) и (19) и из теоремы III следует

$$\left| \int\limits_A f(x)\, \Psi_n(d\mathscr{E}) - \sum_{i=1}^{m} l_i \Psi_n(e_i) \right| \leqslant \varepsilon \overline{\Psi}_n(A) < \varepsilon N \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где N — некоторая постоянная. Отсюда, в силу основного условия рассматриваемой теоремы, вытекает, что $\delta_1(n)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n.

Возьмем снова сколь угодно малое положительное число ε и обозначим через $\mathscr{E}_1$ совокупность элементов x, принадлежащих A, для которых при всех значениях n выполняется неравенство $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$. Обозначим, затем, через $\mathscr{E}_m$ для любого натурального m, большего единицы, совокупность элементов x множества A, для каждого из которых условие $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$ выполняется, если $n \geqslant m$, и не выполняется при $n = m - 1$. Очевидно, $A = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots$ Обозначим через S_n сумму первых n множеств последовательности $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$, и через R_n — сумму остальных. Заменяя каждый из интегралов $\delta_2(n)$ и $\delta_3(n)$ суммой аналогичных интегралов, распространенных на множества S_n и R_n, легко убедиться в справедливости соотношений

$$|\delta_2(n)| \leqslant \varepsilon \overline{\Phi}(S_n) + 2M\overline{\Phi}(R_n), \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$|\delta_2(n)| \leqslant \varepsilon \overline{\Psi}_n(S_n) + 2M\overline{\Psi}_n(R_n) < \varepsilon N + 2M\overline{\Psi}_n(R_n).$$

Отсюда видно, что $\delta_2(n)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n; то же имеет место и по отношению к $\delta_3(n)$, что является следствием теоремы II.

Рассматриваемая теорема, таким образом, доказана.

Замечание. Пусть дана произвольная последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots$ $(x \subset A)$, которая не удовлетворяет условию равномерной ограниченности, но удовлетворяет остальным условиям теоремы IV. Более точно, пусть функции $f_n(x)$, $f_{n+1}(x), \ldots$ не ограничены в их

совокупности, каково бы ни было n. Тогда весьма просто можно построить последовательность $\Phi_1(\mathscr{E})$, $\Phi_2(\mathscr{E})$, ... вполне аддитивных функций, удовлетворяющую условиям этой теоремы и такую, что равенство (17) выполняться не будет.

Поступило
5. I. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубровский В. М., Исследование чисто разрывных случайных процессов методом интегро-дифференциальных уравнений, Известия АН, серия матем., 8 (1944), 107—128.

[2] Radon E., Theorie und Anwendungen der absolut-additiven Mengenfunktionen, Sitzungsb. d. Akad. d. Wiss. Wien, Kl., 122, Abt. IIa, 1913.

[3] Fréchet, Sur l'intégrale d'une fonction, Bull. Soc. Math. de France, 43 (1915).

[4] Hahn M., Theorie der reellen Funktionen, p. 404, Berlin, 1921.

[5] Sierpiński M. W., Demonstration d'un théorème sur les fonctions additives d'ensembles, Fund. Math., V (1924), 262.

V. DOUBROVSKY. ON SOME PROPERTIES OF COMPLETELY ADDITIVE SET FUNCTIONS AND PASSING TO THE LIMIT UNDER THE INTEGRAL SIGN

SUMMARY

Let a set $\mathfrak{A}$ and a family $\mathfrak{M}$ of its subsets be given. Suppose $\mathfrak{M}$ contains differences, finite and enumerable sums of its sets, as well as single elements of $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ itself and the void set.

Set functions considered in this paper are defined on the family $\mathfrak{M}$. Abstract integrals are to be understood in the sense of Lebesgue-Stieltjes, and are defined with respect to $\mathfrak{M}$.

The following results are obtained in this paper:

I. Let a sequence of completely additive functions $\Phi_1(\mathcal{E}), \Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ converge to a definite finite limit $\Phi(\mathcal{E})$ for every $\mathcal{E}$ belonging to $\mathfrak{M}$. Then the limit function $\Phi(\mathcal{E})$ is also completely additive.

II. Let a sequence of completely additive functions $\Phi_1(\mathcal{E}), \Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ converge to zero for every $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$. Then for every sum $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots$ of non-overlapping sets from $\mathfrak{M}$

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \overline{\Phi}_n (\mathcal{E}_{n+1} + \mathcal{E}_{n+2} + \ldots) = 0,$$

where $\overline{\Phi}_n$ denotes the complete variation of the function Φ_n.

III. Let a sequence of completely additive functions $\Phi_1(\mathcal{E}), \Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ converge to a definite finite limit for every $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}$. Then all the complete variations $\overline{\Phi}_1(\mathfrak{A}), \overline{\Phi}_2(\mathfrak{A}), \ldots$ are uniformly bounded.

IV. Let $A \subset \mathfrak{M}$. Suppose a sequence of completely additive functions $\Phi_1(\mathcal{E}), \Phi_2(\mathcal{E}), \ldots$ converges to a definite finite limit $\Phi(\mathcal{E})$ for every part $\mathcal{E}$ of the set $A\,(\mathcal{E} \subset \mathfrak{M})$. Let a sequence of uniformly bounded measurable (with respect to $\mathfrak{M}$) functions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ converge to a limit $f(x)$ for every $x \subset A$. Then

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\, \Phi_n(d\,\mathcal{E}) = \int_A f(x)\, \Phi(d\,\mathcal{E}).$$

The conditions imposed on the sequence $f_1(x), f_2(x), \ldots$ cannot be made more general.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 321—328 Serie mathématique

М. П. ЩЕГЛОВ

О НЕКОТОРЫХ РАВЕНСТВАХ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В настоящей статье рассматриваются некоторые случаи одновременного существования двух равенств:

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{d}) \quad \underline{\lim} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}} = \underline{\lim} \sum_{n=1}^{[u]} a_n \\ &(\mathrm{D}) \quad \overline{\lim} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}} = \overline{\lim} \sum_{n=1}^{[u]} a_n \end{aligned}\right\} \text{ при } u \to \infty$$

Разбирается частный случай $\lambda_n = n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

Возьмем функции

$$\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}} \qquad (0 < u < \infty), \tag{1}$$

$$s(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < u < 1, \\ \sum_{n=1}^{[u]} a_n & \text{при } 1 \leqslant u < \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Определим следующие числа:

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{a}) \quad \underline{\lim}_{u \to \infty} \varphi(u) = d_\varphi, \\ &(\mathrm{a}') \quad \overline{\lim}_{u \to \infty} \varphi(u) = D_\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{b}) \quad \underline{\lim}_{u \to \infty} s(u) = d_s, \\ &(\mathrm{b}') \quad \overline{\lim}_{u = \infty} s(u) = D_s, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где d_φ, D_φ, d_s и D_s — конечные или бесконечные числа.

Возникает вопрос об одновременном существовании равенств

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{d}) \quad d_\varphi = d_s, \\ &(\mathrm{D}) \quad D_\varphi = D_s. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В частном случае

$$\lambda_n = n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

нами ранее было установлено ([1]), что при

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{7}$$

равенства (d) и (D) всегда выполняются, но при условии

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{8}$$

могут не выполняться.

«Проблема равенства» остается нерешенной для мажоранты

$$a_n < o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{9}$$

Относительно мажоранты (9), в случае (6), получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. *Дано:*

1° $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{u}}$, — *ряд сходится при* $0 < u < \infty$,

2° $a_n < o\left(\frac{1}{n}\right)$,

3° $-u\varphi'(u) = o(1)$, $u \to \infty$.

При этих условиях имеют место равенства (d) *и* (D).

Доказательство. Имеем цепь соотношений

$$0 \leq \sum_{n=1}^{[u]} (\varepsilon_n - na_n) = \sum_{n=1}^{[u]} \varepsilon_n - w(u) < e \sum_{n=1}^{[u]} (\varepsilon_n - na_n) e^{-\frac{n}{u}} <$$

$$< e \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n - na_n) e^{-\frac{n}{u}} = e \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\frac{n}{u}} - eu^2 \varphi'(u), \tag{1}$$

где

$$na_n < \varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$w(u) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{при } 0 < u < 1, \\ \sum_{n=1}^{[u]} na_n & \text{при } 1 \leq u < \infty. \end{array} \right\} \tag{1a}$$

Из (1) получаем

$$w(u) < o([u]) \tag{2}$$

и

$$-w(u) < o([u]) - eu^2 \varphi'(u) \tag{3}$$

или

$$-w(u) < o([u]). \tag{3'}$$

Соотношения (2) и (3′) вместе дают

$$w(u) = o([u]), \quad u \to \infty. \tag{4}$$

Теперь, принимая во внимание одну известную лемму *, приходим к соотношению

$$(s, \varphi) \quad s(u) = \varphi(u) + o(1), \quad u \to \infty, \tag{5}$$

из которого, очевидно, и следует

ТЕОРЕМА 2. *Дано:*

1° $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{u}}$ — *ряд сходится при* $0 < u < \infty$,

2° $a_n < o\left(\frac{1}{n}\right)$,

3° *существует последовательность* $\{u_m\}$, *такая, что*

(a) $\underline{\lim}_{u_m \to \infty} \frac{u_{m+1}}{u_m} > 1$,

(a′) $\overline{\lim}_{u_m \to \infty} \frac{u_{m+1}}{u_m} < \infty$,

(b) $\varphi(u_{m+1}) - \varphi(u_m) = o(1)$, $u_m \to \infty$.

При этих условиях справедливы равенства (d) *и* (D).

Доказательство. Эта теорема сводится к предыдущей теореме (теорема 1). Сначала можно показать**, что

$$u_m \varphi'(u_m) = o(1), \quad u_m \to \infty \tag{1}$$

Затем докажем ***, что

$$u\varphi'(a) = o(1), \quad u \to \infty. \tag{2}$$

Теперь построим конкретный пример ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого члены такие, что

$$\left.\begin{aligned} &(a^+) \quad a_n^+ = o\left(\frac{1}{n}\right), \\ &(a^-) \quad a_n^- = O(1) \neq o(1), \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

где обозначено $a_n^+ > 0$, $a_n^- < 0$, и для которого справедливы равенства (d) и (D). Возьмем последовательность

$$\lambda_m = m^m, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Члены ряда определим следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \in (\lambda_m, \lambda_{m+1}),\ m \text{ — нечетное} \\ -1 & \text{при } n = \lambda_{m+1},\ m \text{ — четное,} \\ \dfrac{1}{\lg \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}}\left(\lg \frac{n}{\lambda_m} - \lg \frac{n-1}{\lambda_m}\right) & \text{при } n \in (\lambda_m, \lambda_{m+1}),\ m \text{ — четное.} \end{cases} \tag{2}$$

* Лемма. относящаяся к теореме $\overline{A}$ (2).

** См. метод доказательства леммы, относящейся к теореме A и теорему A [(2); формулы (6)—(12); стр. 112—113].

*** См. (2)—теорема A [формулы (13)—(22); стр. 113—114].

Возьмем функции

$$s(u)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0<u<1 \\ \sum\limits_{n=1}^{[u]} a_n & \text{при } 1\leqslant u<\infty \end{cases} \tag{3}$$

и

$$\sigma(u)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0<u<1 \\ 0 & \text{при } u\in[\lambda_m,\ \lambda_{m+1}),\ m\text{ — нечетное} \\ \dfrac{1}{\lg\dfrac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}}\lg\dfrac{u}{\lambda_m} & \text{при } u\in[\lambda_m,\ \lambda_{m+1}),\ m\text{ — четное.} \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, что

$$\underline{\lim}_{u\to\infty} s(u)=\underline{\lim}_{u\to\infty}\sigma(u)=0, \tag{5}$$

и

$$\overline{\lim}_{u\to\infty} s(u)=\overline{\lim}_{u\to\infty}\sigma(u)=1. \tag{5'}$$

Известно, что

$$\varphi(u)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{u}}=\int_0^{\infty} s(x)\frac{e^{-\frac{x}{u}}}{u}\,dx. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(u)=\int_0^{\infty}\sigma(x)\frac{e^{-\frac{x}{u}}}{u}\,dx. \tag{7}$$

Легко показать, что

$$\underline{\lim}_{u\to\infty}\varphi(u)=\underline{\lim}_{u\to\infty}\psi(u), \tag{8}$$

$$\overline{\lim}_{u\to\infty}\varphi(u)=\overline{\lim}_{u\to\infty}\psi(u). \tag{8'}$$

Элементарные вычисления дают

$$\psi(u)=\sum_{m=2}^{\infty}{}' \frac{1}{\lg\dfrac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}}\left(\int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}}\frac{e^{-\frac{x}{u}}}{x}\,dx-\lg\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}\,e^{-\frac{\lambda_{m+1}}{u}}\right), \tag{9}$$

где обозначает суммирование по четным числам.

Рассмотрим функцию

$$\chi(u)=\frac{1}{\lg\dfrac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}}\int_{\lambda_m}^{\lambda_{m+1}}\frac{e^{-\frac{x}{u}}}{x}\,dx-e^{-\frac{\lambda_{m+1}}{u}}, \tag{10}$$

где

$$\lambda_m \leqslant u \leqslant \lambda_{m+1}, \quad m \text{ — четное.} \tag{10a}$$

Очевидно, что в любом сегменте (10a)

$$\psi(u) \geqslant \chi(u). \tag{11}$$

Фиксируя u, получаем асимптотическую формулу

$$\chi(u) = \frac{\lg \frac{u}{\lambda_m}}{\lg \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}} - e^{-\frac{\lambda_{m+1}}{u}} + o(1), \quad u \to \infty. \tag{12}$$

Очевидно

$$\lim_{m\to\infty} \chi\left(\frac{\lambda_{m+1}}{\lg \lg m}\right) = 1. \tag{13}$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, \psi(u) \geqslant 1. \tag{14}$$

Так как, с другой стороны,

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, \psi(u) \leqslant \overline{\lim_{u\to\infty}}\, s(u), \tag{15}$$

то

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, \varphi(u) = \overline{\lim_{u\to\infty}}\, s(u). \tag{16}$$

Нетрудно показать, что

$$\underline{\lim_{u\to\infty}}\, \varphi(u) = \underline{\lim_{u\to\infty}}\, s(u). \tag{17}$$

Это следует из того факта, что

$$\psi(u) \geqslant 0, \quad 0 < u < \infty \tag{18}$$

и

$$\lim_{m\to\infty} \psi(\lambda_m \lg m) = 0 \quad (m \text{ — нечетное}). \tag{19}$$

Замечание. На этом примере, между прочим, мы наблюдаем одно явление — «смещение максимума», которое заключается в следующем:

Пусть последовательности $\{u'_m\}$ и $\{u''_m\}$ такие, что

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, \varphi(u) = \lim_{u'_m\to\infty} \varphi(u'_m)$$

и

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, s(u) = \lim_{u'_m\to\infty} s(u''_m),$$

тогда

$$\{u'_m\} \neq \{u''_m\}.$$

Это явление не имеет места для мажоранты

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Интересно рассмотреть «проблему равенств» и «смещения» для мажорант типов:

$$a_n^+ = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad a_n^- = o\,(1); \qquad (\beta)$$

$$a_n^+ = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad a_n^- = O\left(\frac{1}{n}\right) \neq o\left(\frac{1}{n}\right). \qquad (\gamma)$$

Относительно общего ряда (1) ($\lambda_n \neq n$) получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть ряд* $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}}$, *где* $0 < u < \infty$, *такой, о*

$$1^0 \begin{cases} \text{(a)} & 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \\ \text{(b)} & \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = O(1). \end{cases}$$

$$2^0 \qquad a_n = o\left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}\right).$$

При этих условиях итеют место равенства (d) *и* (D).

Эта теорема непосредственно вытекает из леммы *:

ЛЕММА. *Пусть ряд* $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}}$; *где* $0 < u < \infty$, *такой, что*

$$1^0 \begin{cases} \text{(a)} & 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \\ \text{(b)} & \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = O\,(1), \end{cases}$$

$$2^0 \qquad a_n = o\left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}\right).$$

При этих условиях имеет место соотношение

$$(s,\ \varphi') \qquad s(u) = \varphi(\lambda_u) + o\,(1), \quad u \to \infty,$$

где

$$\lambda_u = (\lambda_{n+1} - \lambda_n)\, u + (n+1)\,\lambda_n - n\lambda_{n+1}$$

при $n \leqslant u \leqslant n+1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Из этой теоремы в качестве очевидного следствия вытекает

ТЕОРЕМА 3′. *Пусть ряд* $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}}$, *где* $0 < u < \infty$, *такой, что*

---

* Подробное доказательство леммы имеется в работе ([3]). См. также аналогичную лемму, относящуюся к теореме $\overline{\text{A}}$ ([1]).

$$1^\circ \begin{cases} \text{(a)} \quad 0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\lambda_{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty, \\ \text{(b)} \quad \varliminf\limits_{\lambda_n\to\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}>1, \\ \text{(b')} \quad \varlimsup\limits_{\lambda_n\to\infty}\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}<\infty; \end{cases}$$

2° $a_n = o(1)$.

При этих условиях имеют место равенства (d) и (D).

Поступило
23. X. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Щеглов М. П., О некоторых вопросах в суммировании Пуассона (рукопись).
[2] Щеглов М. П., К вопросу о поведении степенного ряда на круге сходимости, Мат. сб., 14 (56), No 1—2 (1944), 109—132.
[3] Щеглов М. П., О рядах (рукопись).

M. SHTSHEGLOV. ON SOME EQUALITIES

SUMMARY

In the present paper some cases are considered, where the two equalities

$$\left.\begin{array}{ll}(d) & \underline{\lim} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}} = \underline{\lim} \sum_{n=1}^{[u]} a_n \\ (D) & \overline{\lim} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\lambda_n}{u}} = \overline{\lim} \sum_{n=1}^{[u]} a_n \end{array}\right\} \text{ for } u \longrightarrow \infty.$$

take place simultaneously. The particular case is studied ($\lambda_n = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 329–356 Série mathématique

А. И. МАЛЬЦЕВ

О РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Изучается структура разрешимых алгебр Ли над полем всех комплексных чисел. Сначала определяется один частный тип алгебр, называемых расщепляемыми. Структура расщепляемых разрешимых алгебр целиком определяется их максимальным нильпотентным идеалом. Произвольная разрешимая алгебра содержится в однозначно определяемой минимальной расщепляемой алгебре. Зависимость между алгеброй и ее расщеплением приводит к конструкции всех разрешимых алгебр с данным расщеплением. Тем самым вопрос о классификации разрешимых алгебр сводится к изучению нильпотентных. В качестве приложений найдены максимальные нильпотентные подалгебры произвольных алгебр Ли и рассмотрен один вопрос о редукции из теории инвариантов.

В теории алгебр Ли центральное место в настоящее время занимают алгебры над полем комплексных чисел. Наиболее изученными из них являются полупростые алгебры, полная классификация которых дается известной теорией Cartan'a — Killing'a. Решена также задача, как, исходя из данной разрешимой алгебры $\mathfrak{R}$ и полупростой $\mathfrak{S}$, построить все алгебры $\mathfrak{L}$ с радикалом $\mathfrak{R}$ и алгеброй вычетов $\mathfrak{L}/\mathfrak{R}$, изоморфной $\mathfrak{S}$. Таким образом, общая задача классификации алгебр Ли над полем комплексных чисел приводится к исследованию разрешимых алгебр.

Однако уже в теории Cartan'a — Killing'a выяснилась важная роль одного специального типа разрешимых алгебр, именно алгебр ранга нуль, или по другой терминологии, нильпотентных алгебр. С известной точки зрения общий случай разрешимых алгебр занимает промежуточное положение между полупростыми алгебрами, где конфигурация так называемых корней алгебры целиком определяет алгебру, и нильпотентными алгебрами, где все корни равны нулю и ничего не определяют. У разрешимых не нильпотентных алгебр имеются ненулевые корни, однако знания их конфигурации, вообще говоря, недостаточно для определения алгебры.

В настоящей работе разрешимые алгебры подвергнуты более детальному изучению. Помимо нахождения общих свойств, основная цель работы сводится к выяснению того, насколько вопросы, касающиеся структуры разрешимых алгебр, можно свести к аналогичным вопросам относительно нильпотентных алгебр.

Задача разделяется на две части. Сначала изучается специальный класс разрешимых алгебр — так называемые *расщепляемые алгебры*. Все такие алгебры допускают разложение в полупрямую сумму своего максимального нильпотентного идеала—ядра алгебры и некоторой особой коммутативной подалгебры. Свойства расщепляемой алгебры легко усматриваются из свойств такого разложения, и основным инвариантом, определяющим разрешимую расщепляемую алгебру, является ее ядро. Чтобы получить все расщепляемые разрешимые алгебры с данным ядром $\mathfrak{T}$, строится вспомогательное, зависящее от $\mathfrak{T}$ линейное пространство $\mathfrak{A}$ и некоторая конечная группа Θ линейных преобразований в $\mathfrak{A}$. Тогда каждому линейному подпространству $\mathfrak{A}$ однозначно соответствует расщепляемая алгебра, причем эти алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда исходные подпространства переводятся друг в друга преобразованиями Θ.

Во второй части показывается, что всякая разрешимая алгебра $\mathfrak{R}$ содержится в некоторой расщепляемой алгебре. Манимальная расщепляемая алгебра, содержащая $\mathfrak{R}$, определяется однозначно и называется *расщеплением* $\mathfrak{R}$. Свойства разрешимых алгебр оказываются весьма тесно связанными со свойствами их расщеплений. Так как расщепляемые алгебры были в первой части, в известном смысле, классифицированы, то оказывается естественным считать расщепление основным инвариантом, определяющим разрешимую алгебру. Конструирование разрешимых алгебр с данным расщеплением производится вполне аналогично тому, как это было сделано для расщепляемых алгебр с данным ядром. Отличие состоит в том, что здесь группа Θ уже будет группой Ли, однако нильпотентной. Таким образом, задача приводится к нахождению линейных подпространств, переводящихся друг в друга данной нильпотентной линейной группой.

В качестве следствий этой теории получаются такие результаты.

(1) Общие теоремы § 2 вместе с теоремой Birkhoff'a о представимости нильпотентных алгебр непосредственно приводят к теореме Адо.

(2) Теорема о расщепляемости алгебраических групп (n° 3) может быть применена в теории инвариантов, чтобы редуцировать основную проблему теории инвариантов к аналогичной проблеме для нильпотентных групп. Эта редукция по существу совпадает с редукцией Weitzenböck'a ([9]). Однако благодаря наличию общих теорем о расщепляемых алгебрах редукция получается здесь сразу для всей группы, в то время как редукция Weitzenböck'a производится для каждого преобразования в отдельности.

(3) Общие теоремы §§ 1, 2 дают возможность найти с точностью до внутренней сопряженности все максимальные нильпотентные подалгебры алгебр Ли. Таких подалгебр в каждой алгебре Ли оказывается конечное число и среди них находятся две крайних — картановская подалгебра и максимальная подалгебра, образованная нильпотентными элементами. Единственность класса картановских подалгебр совпадает с известной теоремой об их сопряженности ([4]).

§ 1. Расщепляемые алгебры

n°1. Полупрямые разложения. Линейное векторное пространство $\mathfrak{G}$ над полем K называется алгеброй Ли над этим полем, если в $\mathfrak{G}$ дополнительно задана операция коммутирования $[fg]$, обладающая свойствами

$$[fg] = -[gf], \quad [\lambda f + \mu g, h] = \lambda [fh] + \mu [gh],$$
$$[f[gh]] + [g[hf]] + [h[fg]] = 0.$$

Преобразование $[gx] = Gx$, $x \in \mathfrak{G}$, является линейным преобразованием пространства $\mathfrak{G}$. Соответствие $g \to G$ называется регулярным представлением $\mathfrak{G}$. В регулярном представлении операции коммутирования $[fg]$ отвечает коммутирование соответственных линейных преобразований $FG - GF = [FG]$. Если матрица G имеет простые элементарные делители, то она сама и отвечающий ей элемент $g \in \mathfrak{G}$ называются семирегулярными. Если некоторая степень G равна нулю, то G и g называются нильпотентными ([5]). Очевидно, при гомоморфном отображении одной алгебры на другую нильпотентные и семирегулярные элементы первой переходят соответственно в нильпотентные и семирегулярные элементы второй. Аналогично, если некоторый элемент f подалгебры $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ нильпотентен или семирегулярен в $\mathfrak{G}$, то он будет таким же и в $\mathfrak{F}$. Обратное в общем случае неверно.

В дальнейшем всюду, где не оговорено противное, в качестве основного поля K берется поле всех комплексных чисел. Тогда семирегулярными элементами $\mathfrak{G}$ будут такие элементы, матрица которых в регулярном представлении $\mathfrak{G}$ приводима к диагональной жордановой форме. Отметим еще, что линейное преобразование $\exp G = E + \frac{G}{1!} + \frac{G^2}{2!} + \ldots$ является так называемым внутренним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{G}$, порожденным элементом g. Вместо $\exp G$ мы будем также употреблять обозначение $\exp g$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ содержит подалгебру $\mathfrak{F}$, $g \in \mathfrak{G}$, $[g\mathfrak{F}] \subset \mathfrak{F}$, $g = a + t$, где a — семирегулярный и t — нильпотентный элементы $\mathfrak{G}$, $[at] = 0$. Тогда $[a\mathfrak{F}] \subset \mathfrak{F}$ и структура алгебры $\{\lambda a + \mu t + \mathfrak{F}\}$ целиком определяется подалгеброй $\{\lambda g + \mathfrak{F}\}$, хотя формально представление $g = a + t$ зависит от объемлющей алгебры $\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Пусть в регулярном представлении $\mathfrak{G}$ элементам g, a, t отвечают матрицы G, A, T. Обозначим через $\rho_1, \ldots, \rho_s$ характеристические числа G и разложим пространство $\mathfrak{G}$ в прямую сумму инвариантных корневых подпространств $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$, отвечающих этим характеристическим числам. Тогда $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_i$ будут соответственными инвариантными корневыми подпространствами $\mathfrak{F}$ относительно G. Возьмем линейное преобразование A_1 пространства $\mathfrak{G}$, определяемое соотношениями

$$A_1 g = \rho_i g \quad (g \in \mathfrak{G}_i).$$

Матрица $T_1 = G - A_1$ нильпотента и перестановочна с A_1. Таким образом, для G имеются два разложения $G = A + T = A_1 + T_1$, где $[AT] = [A_1 T_1] = 0$, A, A_1 — семирегулярны, T, T_1 — нильпотентны. Приводя G к нормальной жордановой форме, непосредственно убеждаемся, что $A = A_1$, $T = T_1$. Числа ρ_i для подпространств $\mathfrak{F}_i$ известны, коль скоро известно, какое преобразование элемент g вызывает в $\mathfrak{F}$. Поэтому структура алгебры $\{\lambda a + \mu g + \mathfrak{F}\}$ вполне известна, если известна структура $\{\mu g + \mathfrak{F}\}$.

В частности, пусть $[g, g_2] = 0$ и $g_1 = a_1 + t_1$ — упомянутое в теореме 1 разложение. Тогда, применяя эту теорему к подалгебре $\mathfrak{F} = \{\lambda g_2\}$, мы получим $[ag_2] = [tg_2] = 0$*.

Определение. Элемент g алгебры $\mathfrak{G}$ называется разложимым, если его можно представить в виде суммы $a + t$, где a — семирегулярный и t — нильпотентный элементы $\mathfrak{G}$. Если, сверх того, $[at] = 0$, то разложение $g = a + t$ называется нормальным, а сам элемент g — нормально разложимым.

В дальнейшем рассматриваются, главным образом, разрешимые алгебры и их связи с нильпотентными алгебрами. Алгебра $\mathfrak{G}$ называется разрешимой, если цепочка ее последовательных коммутантов $\mathfrak{G}^{[1]} = [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$, $\mathfrak{G}^{[2]} = [\mathfrak{G}^{[1]} \mathfrak{G}^{[1]}]$, ... содержит нулевую алгебру; $\mathfrak{G}$ называется нильпотентной, если нулевую алгебру содержит цепочка ее степеней $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^2 = [\mathfrak{G}\mathfrak{G}], = \mathfrak{G}^3 = [\mathfrak{G}\mathfrak{G}^2]$, ...** Согласно теореме С. Ли, во всякой разрешимой алгебре $\mathfrak{G}$ можно выбрать такой базис, в котором все матрицы регулярного представления $\mathfrak{G}$ имеют треугольную форму. Ясно, что при этом нильпотентными элементами $\mathfrak{G}$ будут те и только те, которым отвечают матрицы с нулевой диагональю. Отсюда следует, что множество всех нильпотентных элементов $\mathfrak{G}$ есть идеал этой алгебры, который в дальнейшем будет называться ядром $\mathfrak{G}$. Ядро $\mathfrak{G}$ является нильпотентной алгеброй и также может быть определено, как максимальный нильпотентный идеал $\mathfrak{G}$. Из теоремы Ли следует, что коммутант разрешимой алгебры нильпотентен и поэтому содержится в ее ядре [ср. ([1])].

ТЕОРЕМА 2. *Всякий разложимый элемент разрешимой алгебры $\mathfrak{G}$ является нормально разложимым.*

Пусть $g = a + t$, где a — семирегулярный и t — нильпотентный элементы $\mathfrak{G}$. Раскладываем $\mathfrak{G}$ на корневые подпространства $\mathfrak{G}_i$ относительно a. Тогда $t = t_0 + t_1 + \ldots + t_s$, где $t_j \in \mathfrak{G}_j$, $[at_j] = \rho_j t_j$, $\rho_0 = 0$, $\rho_1 \ldots \ldots \rho_s \neq 0$. Так как $t_i = \frac{1}{\rho_i}[at_i] \in [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$, $i \neq 0$, то t_i, а вместе с ними и t_0, нильпотентны.

Положим $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}] = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^1 = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^2 = [\mathfrak{K}\mathfrak{K}^1]$, ..., $\mathfrak{K}^p = [\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{p-1}] = 0$ и обозначим через k наибольшее число, для которого $u = t_1 + \ldots + t_s \in \mathfrak{K}^k$.

---

* Принадлежит Гантмахеру [см. ([5])].

** Если $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ — какие-либо множества элементов из $\mathfrak{G}$, то $[\mathfrak{P}\mathfrak{Q}]$ означает линейное подпространство, натянутое коммутаторами $[pq]$ ($p \in \mathfrak{P}$, $q \in \mathfrak{Q}$).

Напомним также, что алгебра называется полупростой, если она не имеет отличных от нуля разрешимых идеалов. Максимальный разрешимый идеал алгебры называется ее радикалом.

Так как $\mathfrak{R}^k$ — идеал в $\mathfrak{G}$, то элементы

$$[au] = \rho_1 t_1 + \ldots + \rho_s t_s = u_1$$
$$[au_1] = \rho_1^2 t_1 + \ldots + \rho_s^2 t_s = u_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[au_{s-1}] = \rho_1^s t_1 + \ldots + \rho_s^s t_s = u_s$$

входят в $\mathfrak{R}^k$. Решая эту систему относительно t_i, мы видим, что $t_i \in \mathfrak{R}^k$. Произведем в $\mathfrak{G}$ автоморфизм $\exp\left(\frac{1}{\rho_1} t_1 + \ldots + \frac{1}{\rho_s} t_s\right)$. Имеем

$$g' = \exp\left(\sum \frac{1}{\rho_i} t_i\right) \cdot g = \exp\left(\sum \frac{1}{\rho_i} t_i\right) \cdot a + \sum_{j=0}^{s} \exp\left(\sum \frac{1}{\rho_i} t_i\right) \cdot t_j =$$
$$= a - \sum t_i + \sum_{j=0}^{s} t_i + \sum_{i,j} \frac{1}{\rho_i} [t_i t_j] + \ldots = a + t_0 + t',$$

где $t' \in \mathfrak{R}^{k+1}$. Разлагая t' в сумму корневых элементов относительно a, получим представление g' в форме

$$g' = a + (t_0 + t_0') + t_1' + \ldots + t_s',$$

где уже $t' \in \mathfrak{R}^{k+1}$. Производя снова подходящий автоморфизм, мы повысим индекс $k+1$ на $k+2$ и т. д., пока не сделаем его равным p. В результате для элемента $g^{(p-k)}$ получится нормальное разложение

$$g^{(p-k)} = a + (t_0 + t_0' + \ldots + t_0^{(p-k)}).$$

Обратные автоморфизмы переведут $g^{(p-k)}$ в g, $t_0 + t_0' + \ldots + t_0^{(p-k)}$ — в некоторый элемент $\bar{t}$, a — в семирегулярный элемент $\bar{a}$, и $g = \bar{a} + \bar{t}$ будет искомым нормальным разложением.

ТЕОРЕМА 3. *Если каждый элемент разрешимой алгебры $\mathfrak{G}$ разложим, то сама алгебра $\mathfrak{G}$ допускает разложение вида $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{T}$, где $\mathfrak{T}$ — ядро $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ — коммутативная подалгебра, все элементы которой семирегулярны, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} = 0$. Обратное, очевидно, также верно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — одна из максимальных коммутативных подалгебр $\mathfrak{G}$, образованных исключительно семирегулярными элементами $\mathfrak{G}$. Покажем, что тогда $\mathfrak{G} = \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$.

В самом деле, разложим $\mathfrak{G}$ в прямую сумму корневых подпространств $\mathfrak{G}_i$ относительно системы матриц $\mathfrak{B}$. Следовательно, всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$ будет представим в форме $g = g_0 + g_1 + \ldots + g_s$, где $[\mathfrak{B} g_0] = 0$, $[bg_i] = \rho_i(b) g_i$, $i \neq 0$, $g_i \in \mathfrak{G}_i$, $b \in \mathfrak{B}$. Так как для каждого i при некотором b имеем $\rho_i(b) \neq 0$ $(i \neq 0)$, то g_i входят в коммутант и, значит, в ядро $\mathfrak{T}$. Согласно теореме 2, все элементы $\mathfrak{G}$ допускают нормальное разложение. Пусть $g_0 = a + t$ — такое разложение. Так как $[g_0 \mathfrak{B}] = 0$, то, по теореме 1, $[a\mathfrak{B}] = 0$. В силу семирегулярности a и максимальности $\mathfrak{B}$, это влечет за собой $a \in \mathfrak{B}$, что и требовалось. Однако разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$ еще не будет искомым, так как $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{T}$ содержат центр $\mathfrak{G}$. Но $\mathfrak{B}$ — алгебра коммутативная и поэтому допускает разложение в прямую сумму $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{T})$. Новое разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{T}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Ответ на вопрос об однозначности полученного разложения непосредственно вытекает из приводимой ниже теоремы. Мы будем называть подалгебру $\mathfrak{B}$ какой-либо алгебры Ли $\mathfrak{L}$ семирегулярной, если все элементы $\mathfrak{B}$ являются семирегулярными элементами $\mathfrak{L}$. Алгебра $\mathfrak{L}$ будет называться расщепляемой, *если каждый ее элемент допускает нормальное разложение.*

ТЕОРЕМА 4. *Все максимальные коммутативные семирегулярные подалгебры расщепляемой разрешимой алгебры $\mathfrak{G}$ переводятся друг в друга внутренними автоморфизмами, производимыми элементами коммутанта $\mathfrak{G}$* *.

Для алгебр размерности 1 и вообще нильпотентных алгебр это утверждение тривиально. Поэтому доказательство можно вести методом полной индукции, считая утверждение верным для всех алгебр размерности, меньшей $\mathfrak{G}$, и предполагая, что $\mathfrak{G}$ ненильпотентна. Рассмотрим сначала случай, когда ядро $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{G}$ некоммутативно, $\mathfrak{T}^2 = [\mathfrak{T}\mathfrak{T}] \neq 0$.

Положим $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ — какие-либо максимальные коммутативные семирегулярные подалгебры $\mathfrak{G}$. Пусть $\bar{\mathfrak{B}}_1$, $\bar{\mathfrak{B}}_2$ — их образы в алгебре вычетов $\bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{T}^2$. $\bar{\mathfrak{B}}_1$, $\bar{\mathfrak{B}}_2$ — коммутативные семирегулярные подалгебры $\bar{\mathfrak{B}}$ и содержатся в некоторых максимальных подалгебрах $\bar{\mathfrak{C}}_1$, $\bar{\mathfrak{C}}_2$, обладающих этими свойствами. Так как размерность $\bar{\mathfrak{G}}$ меньше $\mathfrak{G}$, то по индуктивному предположению

$$\bar{\mathfrak{C}}_1 = (\exp \bar{g})\, \bar{\mathfrak{C}}_2,$$

откуда

$$\mathfrak{C}_1 = (\exp g)\, \mathfrak{C}_2,$$

где $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ — полные прообразы $\bar{\mathfrak{C}}_1$, $\bar{\mathfrak{C}}_2$ в $\mathfrak{G}$, g — прообраз g в $\mathfrak{G}$. Так как $\bar{g} \in [\bar{\mathfrak{G}}\bar{\mathfrak{G}}]$, $\mathfrak{T}^2 \subset [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$, то $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$ — полный прообраз для $[\bar{\mathfrak{G}}\bar{\mathfrak{G}}]$ и $g \in [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$. Полагая $(\exp g)\,\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_2'$, имеем $\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{B}_2' \subset \mathfrak{C}_2$. Покажем, что размерность $\mathfrak{C}_1$ меньше размерности $\mathfrak{G}$. Действительно, противное означало бы, что $\bar{\mathfrak{G}}$ абелева. Но по теореме 3 для $\mathfrak{G}$ имеем разложение вида $\mathfrak{A} + \mathfrak{T}$. Так как $\mathfrak{A}$ образована семирегулярными элементами, то в $\mathfrak{T}$ существуют элементы $t_1, \ldots, t_m$, дающие базис для $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}^2$ и являющиеся корневыми элементами относительно $\mathfrak{A}$. Пусть $[at_i] = \rho_i(a)\, t_i$. Если $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}^2$ абелева, то $\rho_i(a) = 0$. Однако известно, что в нильпотентных алгебрах базис $\mathfrak{T}/\mathfrak{T}^2$ порождает всю алгебру $\mathfrak{T}$. Значит, из $[\mathfrak{A}t_i] = 0$ следовало бы, что $[\mathfrak{A}\mathfrak{T}] = 0$, т. е. что $\mathfrak{A} + \mathfrak{T}$ нильпотентна. Итак, размерность $\mathfrak{C}_1$ меньше размерности $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{C}_1$ содержит подалгебру $\mathfrak{B}_1$, то по теореме 3 $\mathfrak{C}_1$ является расщепляемой алгеброй. Поэтому к $\mathfrak{C}_1$ можно применить индуктивное предположение. Следовательно, в $\mathfrak{C}_1$ найдутся две коммутативные подалгебры $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, связанные соотношениями

$$(\exp c)\, \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1,$$
$$\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{D}_2 \supset \mathfrak{B}_2'.$$

* Легко видеть, что семирегулярные подалгебры разрешимой алгебры само собой коммутативны.

Полагая $(\exp c)\,\mathfrak{B}_2' = \mathfrak{B}_2''$, мы видим, что максимальные семирегулярные подалгебры $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2''$ поэлементно коммутируют друг с другом, откуда $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2''$, что и требовалось.

Остается рассмотреть случай, когда ядро $\mathfrak{T}$ коммутативно. Если центр $\mathfrak{G}$ нетривиален, то при коммутативном $\mathfrak{T}$ его можно отщепить в качестве прямого слагаемого и свести дело к алгебрам без центра.

Пусть, следовательно, $\mathfrak{G}$ центра не имеет, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}$ — коммутативное ядро $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ — семирегулярная подалгебра $\mathfrak{G}$. Легко видеть, что теперь коммутант $\mathfrak{G}$ совпадает с $\mathfrak{T}$. Обозначим через $\mathfrak{B}$ какую-либо максимальную семирегулярную коммутативную подалгебру $\mathfrak{G}$. Выберем в $\mathfrak{B}$ такой базис $b_1, \ldots, b_m$, чтобы

$$b_i = a_i,\ b_\alpha = a_\alpha + t_\alpha \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ \alpha = k+1, \ldots, m);$$

a_i, a_α, t_α линейно независимы, $t_\alpha \in \mathfrak{T}$, $a_i \in \mathfrak{A}$, $a_\alpha \in \mathfrak{A}$. Из коммутативности $\mathfrak{B}$ следуют соотношения

$$[a_i t_\alpha] = 0, \tag{1.1}$$

$$[a_\alpha t_\beta] = [a_\beta t_\alpha]. \tag{1.2}$$

Покажем, что найдется такой элемент $t = \sum \xi_\alpha t_\alpha$, для которого

$$(\exp t)\ b_i = a_i, \tag{1.3}$$

$$(\exp t)\ b_\alpha = a_\alpha, \tag{1.4}$$

Условия (1.3), ввиду (1.1), выполняются при любых значениях ξ_α. Что касается условий (1.4), то их можно переписать в форме

$$[a_\alpha t] = t_\alpha. \tag{1.5}$$

Выберем в $\mathfrak{T}$ базис $u_1, \ldots, u_p$, состоящий из корневых векторов относительно $\mathfrak{A}$. Пусть

$$t_\alpha = \sum_\nu \eta_{\alpha\nu} u_\nu, \tag{1.6}$$

$$[a_\alpha u_\beta] = \zeta_{\alpha\beta} u_\beta \quad (\alpha = k+1, \ldots, m;\ \beta = 1, \ldots, p). \tag{1.7}$$

Если ранг матрицы $\|\zeta_{\alpha\beta}\|$ меньше $m-k$, то система

$$\sum_\alpha \zeta_{\alpha\beta}\lambda_\alpha = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, p)$$

допускает нетривиальное решение. Элемент $\sum_\alpha \lambda_\alpha a_\alpha$, в силу (1.7), будет центральным в алгебре $\mathfrak{G}$. Но по предположению $\mathfrak{G}$ центра не имеет. Следовательно, ранг $\|\zeta_{\alpha\beta}\|$ должен быть равен $m-k$. Аналогично убеждаемся, что ранг $\|\zeta_{\alpha\beta}\|$ также равен p. Отсюда $m-k = p$ и $\det\|\zeta_{\alpha\beta}\| \neq 0$. Подставляя в (1.5) вместо t, t_α их выражения из (1.6) и пользуясь (1.2), получим для определения чисел ξ_α систему уравнений

$$\sum_\nu \xi_\nu \zeta_{\nu\beta}\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}.$$

Эта система заведомо удовлетворится, если будут выполнены условия

$$\sum_\nu \xi_\nu \zeta_{\nu\beta} = 1 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, p). \tag{1.8}$$

Так как $\det\|\zeta_{\alpha\beta}\| \neq 0$, то система (1.8) разрешима и искомый элемент t существует.

В качестве примера рассмотрим вопрос об однозначности того разложения алгебры $\mathfrak{G}$, о котором идет речь в теореме 3. Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{T} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}$ — два таких разложения и $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{G}$. Тогда $\mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Z}$ — максимальные коммутативные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{G}$.

В силу теоремы 4, существует автоморфизм $\exp t$, переводящий $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$ и оба разложения оказываются сопряженными с точностью до центральных слагаемых.

n° 2. Классификация расщепляемых разрешимых алгебр. Теорема 3 о разложимости расщепляемых разрешимых алгебр в полупрямую сумму и теорема 4, в основном, достаточны, чтобы установить общий обзор расщепляемых алгебр с заданным ядром и тем самым привести задачу об их классификации к задаче о классификации нильпотентных алгебр. Теоремы 5, 6 дают необходимые для этого дополнительные свойства семирегулярных подалгебр.

ТЕОРЕМА 5. *Коммутирующие друг с другом семирегулярные элементы разрешимой расщепляемой алгебры $\mathfrak{G}$ не могут быть внутренне сопряженными в $\mathfrak{G}$.*

Пусть b_1, b_2 — коммутирующие семирегулярные элементы алгебры $\mathfrak{G}$. Эти элементы содержатся в некоторой максимальной подалгебре $\mathfrak{B}$. По теореме 3, имеем разложение

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{B} + \mathfrak{T}, \tag{2.1}$$

где $\mathfrak{T}$ — ядро $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}^*$ внутренних автоморфизмов $\mathfrak{G}$ соответственно (2.1) разложится в произведение $\mathfrak{B}^*\mathfrak{T}^*$, где $\mathfrak{B}^*$ — группа автоморфизмов, производимая элементами $\mathfrak{B}$, и $\mathfrak{T}^*$ — производимая элементами $\mathfrak{T}$. Так как автоморфизмы $\mathfrak{B}^*$ оставляют b_1 на месте, то остается посмотреть, не смогут ли перевести b_1 в b_2 автоморфизмы $\mathfrak{T}^*$. Выберем в $\mathfrak{T}$ базис $t_1, \ldots, t_n$, образованный корневыми элементами относительно b_1. Пусть

$$[b_1 t_i] = \rho_i t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$t = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n,$$
$$\lambda_1 \cdot \rho_1 \cdot \lambda_2 \cdot \rho_2 \cdots \lambda_k \cdot \rho_k \neq 0, \quad \lambda_{k+1}\rho_{k+1} = \ldots = \lambda_n \rho_n = 0,$$
$$t_1 \overline{\in} \mathfrak{T}^{m+1}, \quad t_i \in \mathfrak{T}^m \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Тогда

$$\exp t b_1 = b_1 - \lambda_1 \rho_1 t_1 - \ldots - \lambda_k \rho_k t_k - \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \rho_j [t_i t_j] - \ldots \tag{2.2}$$

Все члены (2.2), стоящие после $\lambda_k \rho_k t_k$, входят в $\mathfrak{T}^{m+1}$ и поэтому их выражения через элементы базиса не содержат t_1. Таким образом,

$$\exp t b_1 = b_1 - \lambda_1 \rho_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \ldots + \mu_n t_n.$$

Если $b_2 = \exp t b_1$, то условие $[b_1 b_2] = 0$ дает

$$[b_1, -\lambda_1 \rho_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \ldots + \mu_n t_n] = -\lambda_1 \rho_1^2 t_1 + \mu_2 \rho_2 t_2 + \ldots + \mu_n \rho_n t_n = 0,$$

что ввиду $\lambda_1 \rho_1 \neq 0$ невозможно.

Пусть $\mathfrak{B}$ — какая-либо фиксированная максимальная семирегулярная подалгебра разрешимой расщепляемой алгебры $\mathfrak{G}$. Из теорем 4, 5 сле-

дует, что *всякая семирегулярная подалгебра $\mathfrak{G}$ внутренне сопряжена с одной и только одной подалгеброй из $\mathfrak{B}$.* Это — окончательное решение вопроса о внутренне сопряженных семирегулярных подалгебрах. В дальнейшем потребуется знать, какие из семирегулярных подалгебр внешне сопряжены. Частичный ответ на это дает

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $\mathfrak{G}$ — расщепляемая разрешимая алгебра, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{T}$ — ее полупрямое разложение, как в теореме 3. Внешние автоморфизмы $\mathfrak{G}$, оставляющие на месте $\mathfrak{A}$, индуцируют в $\mathfrak{A}$ группу линейных преобразований Θ.*

A. *Группа Θ конечна.*

B. *Чтобы две подалгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ из $\mathfrak{A}$ были внешне сопряженными, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}_1$ переводилась в $\mathfrak{A}_2$ каким-либо преобразованием Θ.*

C. *Если размерность подалгебры $\mathfrak{B}_1$ из $\mathfrak{G}$ совпадает с размерностью некоторой подалгебры $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{B}_1$ внешне сопряжена с $\mathfrak{A}_1$.*

Доказательство. — A. Разложим $\mathfrak{T}$ на корневые подпространства $\mathfrak{T}_i$ относительно преобразований $\mathfrak{A}$. Таким образом, если $a \in \mathfrak{A}$, $t_i \in \mathfrak{T}_i$, то $[at_i] = \Lambda_i(a)\, t_i$. Подпространства $\mathfrak{T}_i$ определяются алгеброй $\mathfrak{A}$ однозначно, и, значит, автоморфизмы $\mathfrak{G}$, оставляющие на месте $\mathfrak{A}$, могут только переставлять эти пространства между собой. Покажем, что два автоморфизма $\mathfrak{G}$, оставляющие на месте $\mathfrak{A}$ и вызывающие одну и ту же перестановку $\mathfrak{T}_i$, индуцируют одно и то же линейное преобразование в $\mathfrak{A}$, откуда и будет следовать конечность Θ. Для этого рассмотрим линейные функции $\Lambda_i(a)$, определенные на $\mathfrak{A}$. Среди $\Lambda_i(a)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ существует точно n линейно независимых, где n — размерность $\mathfrak{A}$. Действительно, в противном случае нашелся бы такой элемент $a \in \mathfrak{A}$, $a \neq 0$, для которого все $\Lambda_i(a)$ обращались бы в нуль. Тогда $[a, \mathfrak{T}] = 0$ и a входил бы в центр $\mathfrak{G}$, что противоречит предположению. Пусть, теперь, θ — некоторый автоморфизм $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}^\theta = \mathfrak{A}$. Положим

$$\mathfrak{T}_i^\theta = \mathfrak{T}_{i_\theta}, \quad \Lambda_i^\theta(a) = \Lambda_{i_\theta}(a).$$

Условия $[a^\theta t_i^\theta] = \Lambda_i(a)\, t_i^\theta$ дают $\Lambda_i^\theta(a^\theta) = \Lambda_i(a)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, откуда элемент a^θ при заданном a и заданной перестановке i_θ определяется однозначно.

B. Пусть ρ — автоморфизм $\mathfrak{G}$, переводящий $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{A}_2$. Обозначим через σ существующий по теореме 4 автоморфизм, переводящий $\mathfrak{A}^\rho + \mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$. Имеем $\mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}_2^\sigma \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{Z}$, σ — внутренний; следовательно, по теореме 5, $\mathfrak{A}_2^\sigma = \mathfrak{A}_2$. Выберем в $\mathfrak{A}$ такой базис $a_1, \ldots, a_n$, чтобы $a_1, \ldots, a_k$ давали базис $\mathfrak{A}_1$. Тогда

$$a_i^{\rho\sigma} = a_i' + z_i, \quad a_i' \in \mathfrak{A}, \quad z_i \in \mathfrak{Z} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

Преобразование

$$a_i'^{\tau} = a_i' - z_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$t^\tau = t \quad (t \in \mathfrak{T})$$

есть, очевидно, автоморфизм $\mathfrak{G}$ и

$$\mathfrak{A}^{\rho\sigma\tau} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_1^{\rho\sigma\tau} = \mathfrak{A}_2.$$

C. Утверждение C становится очевидным, если заметить, что преобразования $\mathfrak{G}$ вида $a_i^{\theta} = a_i + z_i$, $t^{\theta} = t$, где $\{a_i\}$ — базис $\mathfrak{A}$, $z_i \in \mathfrak{Z}$, $t \in \mathfrak{T}$, являются внешними автоморфизмами $\mathfrak{G}$.

Общий обзор всех неизомоморфных разрешимых расщепляемых алгебр с данным ядром $\mathfrak{T}$ теперь дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 7. *Для каждой нильпотентной алгебры $\mathfrak{T}$ можно найти такую универсальную разрешимую расщепляемую алгебру $\mathfrak{U} = \mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{T}$, что всякая другая разрешимая расщепляемая алгебра с ядром $\mathfrak{T}$ будет изоморфна одной из подалгебр $\mathfrak{U}$ вида $\mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$. Всякая подалгебра этого вида есть расщепляемая алгебра с ядром $\mathfrak{T}$.*

Для того чтобы $\mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{T}$ была изоморфна $\mathfrak{A}_2 \dotplus \mathfrak{T}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}_1$ переводилась в $\mathfrak{A}_2$ линейным преобразованием $\mathfrak{A}$, входящим в некоторую конечную группу $\overline{\Theta}$. Группа Θ состоит из преобразований, которые индуцируются в $\mathfrak{A}$ автоморфизмами $\mathfrak{U}$, оставляющими на месте $\mathfrak{A}$. Всякий автоморфизм $\mathfrak{A}_1 \dotplus \mathfrak{T}$ может быть продолжен до автоморфизма $\mathfrak{U}$, оставляющего на месте $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Для доказательства удобнее вместо алгебр Ли рассматривать группы Ли. Звездочка далее будет значить, что берется связная группа Ли, алгебра которой обозначена той же буквой без звездочки. Пусть $\mathfrak{M}^*$ — группа всех непрерывных автоморфизмов данной нильпотентной группы $\mathfrak{T}^*$. $\mathfrak{M}^*$ можно считать линейной группой, оперирующей в пространстве $\mathfrak{T}$. Обозначим через $\mathfrak{A}^*$ максимальную связную коммутативную подгруппу, образованную семирегулярными матрицами $\mathfrak{M}^*$, и составим полупрямое произведение $\mathfrak{A}^*\mathfrak{T}^* = \mathfrak{U}^*$ *. Утверждается, что $\mathfrak{U}^*$ будет искомой «универсальной» разрешимой группой. Действительно, всякая расщепляемая разрешимая группа с ядром $\mathfrak{T}^*$ имеет по теореме 3 вид $\mathfrak{A}_0^*\mathfrak{T}^*$. Внутренние автоморфизмы, вызываемые элементами $\mathfrak{A}_0^*$, индуцируют группу линейных преобразований пространства $\mathfrak{T}$, содержащуюся в $\mathfrak{M}^*$ и изоморфную $\mathfrak{A}_0^*$. В силу этого, $\mathfrak{A}_0^*$ можно считать подгруппой $\mathfrak{M}^*$. Так как $\mathfrak{A}_0^*$ образована семирегулярными матрицами, то по теореме 4а (n° 6) $m^{-1}\mathfrak{A}_0^* m \subset \mathfrak{A}^*$, где $m \in \mathfrak{M}^*$. Вводя обозначение $m^{-1}\mathfrak{A}_0^* m = \mathfrak{A}_1^*$ и рассматривая $\mathfrak{A}_0^*\mathfrak{T}^*$, $\mathfrak{A}_1^*\mathfrak{T}^*$ как подгруппы из $\mathfrak{M}^*\mathfrak{T}^*$, мы видим, что $\mathfrak{A}_0^*\mathfrak{T}^*$, $\mathfrak{A}_1^*\mathfrak{T}^*$ сопряжены в $\mathfrak{M}^*\mathfrak{T}^*$ и поэтому изоморфны.

Таким образом, первое утверждение теоремы 7 доказано. Остается показать, что если $\mathfrak{A}_1^*\mathfrak{T}^*$ изоморфна $\mathfrak{A}_2^*\mathfrak{T}^*$ ($\mathfrak{A}_1^* \subset \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}_2^* \subset \mathfrak{A}^*$), то найдется атоморфизм $\mathfrak{G}^*$, оставляющий на месте $\mathfrak{A}^*$ и переводящий $\mathfrak{A}_1^*$ в $\mathfrak{A}_2^*$. С этой целью обозначим через θ заданное изоморфное отображение $\mathfrak{A}_1^*\mathfrak{T}^*$ на $\mathfrak{A}_2^*\mathfrak{T}^*$, $(\mathfrak{A}_1^*\mathfrak{T}^*)^{\theta} = \mathfrak{A}_2^*\mathfrak{T}^*$. Ввиду теоремы 6, можно считать, что $\mathfrak{A}_1^{*\theta} = \mathfrak{A}_2^*$.

---

* Полупрямое произведение группы автоморфизмов $\mathfrak{A}^*$ группы $\mathfrak{B}^*$ на $\mathfrak{B}^*$ есть группа пар (a, b) с композицией $(a_1, b_1)(a, b) = (a_1 a, b_1^a b)$.

Так как $\mathfrak{T}^{*\theta}=\mathfrak{T}^*$, то θ вызывает некоторый автоморфизм $\tau\in\mathfrak{M}^*$ группы $\mathfrak{T}^*$. Из

$$(ta_1)^\theta = t^\tau a_1^\theta = a_1^\theta t^{\tau a_1^\theta} = (a_1 t^{a_1})^\theta = a_1^\theta t^{a_1\tau} \quad (a_1\in\mathfrak{A}_1^*,\ t\in\mathfrak{T}^*)$$

следует $\tau a_1^\theta = a_1\tau$, или

$$a_1^\theta = \tau^{-1}a_1\tau, \quad \mathfrak{A}_2^* = \mathfrak{A}_1^{*\theta} = \tau^{-1}\mathfrak{A}_1^*\tau.$$

Таким образом, внутренний автоморфизм группы $\mathfrak{M}^*$ переводит $\mathfrak{A}_1^*\subset\mathfrak{A}^*$ в $\mathfrak{A}_2^*\subset\mathfrak{A}^*$. В силу теоремы 4а (n° 6), отсюда следует существование элемента $m\in\mathfrak{M}^*$, для которого

$$m^{-1}\mathfrak{A}^*m=\mathfrak{A}^*, \quad m^{-1}\mathfrak{A}_1^*m=\mathfrak{A}_2^*.$$

Тогда $m^{-1}\mathfrak{A}^*\mathfrak{T}^*m=\mathfrak{A}^*\mathfrak{T}^*$ и m производит в $\mathfrak{G}^*=\mathfrak{A}^*\mathfrak{T}^*$ искомый автоморфизм. Этот автоморфизм является, очевидно, продолжением первоначального изоморфизма θ, откуда следует и последнее утверждение теоремы.

n° 3. Алгебраические группы. Простейшими расщепляемыми алгебрами являются алгебры всех матриц данной степени над полем комплексных чисел. Для получения нормального разложения достаточно привести матрицу к нормальной жордановой форме и взять в качестве семирегулярного слагаемого диагональную матрицу, диагональ которой совпадает с диагональю этой жордановой формы. Остаток дает нильпотентное слагаемое. Более важные примеры получаются следующим образом.

Пусть $\mathfrak{G}^*$ — линейная группа Ли. Нормальным разложением ее элемента g будем называть представление g в виде произведения семирегулярной матрицы на коммутирующую с ней матрицу с характеристическими числами, равными единице. Ясно, что если каждый элемент $\mathfrak{G}^*$ нормально разложим в $\mathfrak{G}^*$, то инфинитезимальная алгебра $\mathfrak{G}$ будет расщепляемой. Введем еще следующее

Определение. Линейная группа $\mathfrak{G}^*$ будет называться алгебраической, если она является совокупностью всех неособенных матриц $\|g_{ij}\|$, элементы которых удовлетворяют заданной системе алгебраических уравнений.

ТЕОРЕМА 8. *Все линейные алгебраические группы расщепляемы.*

Доказательство. Пусть $G\in\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{G}^*$ — алгебраическая. Приведем G к нормальной жордановой форме. При этом уравнения $F(g_{ij})=0$, определяющие группу $\mathfrak{G}^*$, также следует трансформировать надлежащим образом. Представим G в виде AT, где $AT=TA$, A — диагональная, T — треугольная с единичной диагональю. Рассмотрим какое-либо уравнение $F(g_{ij})=0$ и докажем, что вместе с G^ν ($\nu=1, 2, \ldots$) ему удовлетворяют A^ν и T^ν. Действительно, элементы матрицы G^ν суть полиномы от ν и от $\rho_1^\nu, \rho_2^\nu, \ldots, \rho_n^\nu$, где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — числа, стоящие на главной диагонали A. Подставляя эти полиномы в $F(g_{ij})=0$, получим уравнение вида

$$\sum a_{i\alpha_i\ldots\gamma_i}\nu^i(\rho_1^{\alpha_i}\rho_2^{\beta_i}\cdots\rho_n^{\gamma_i})^\nu=0.$$

По условию это уравнение должно удовлетворяться при всех натуральных значениях ν. Заставляя ν расти неограниченно, мы непосредственно видим, что левая часть должна заведомо уничтожаться при $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = 1$. Следовательно, матрица T^ν удовлетворяет уравнениям $F(g_{ij}) = 0$. Так как эти уравнения по условию определяют группу, то им должна удовлетворять и A^ν.

Отметим несколько частных случаев этой теоремы.

А. (Ф. Р. Гантмахер). *Группа автоморфизмов всякой алгебры расщепляема.*

Для доказательства достаточно заметить, что группа автоморфизмов есть группа матриц G, элементы которых подчинены условиям $[Ga, Gb] = G[ab]$ и, следовательно, алгебраическая.

В. *Группа всех неособенных линейных преобразований переменных $x_1, \ldots, x_n$, оставляющая инвариантными заданные полиномы, расщепляема.*

Действительно, эта группа снова алгебраическая и, следовательно, расщепляема.

С. *Все полупростые алгебры расщепляемы.*

Вытекает из А, так как с точностью до внутренних автоморфизмов полупростая алгебра $\mathfrak{S}$ имеет только конечное число внешних автоморфизмов. Поэтому алгебра группы автоморфизмов $\mathfrak{S}$ совпадает с $\mathfrak{S}$.

§ 2. Расщепления алгебр

n° 4. Существование и однозначность расщеплений. Свойства расщепляемых алгебр, изложенные в предшествующем параграфе, могут быть применены к изучению некоторых вопросов, относящихся и к произвольным алгебрам Ли. Для этого каждый алгебре $\mathfrak{F}$ поставим в соответствие расщепляемую алгебру $\mathfrak{G}$, свойства которой окажутся весьма тесно связанными со свойствами $\mathfrak{F}$.

ТЕОРЕМА 9. *Всякая алгебра Ли $\mathfrak{F}$ содержится в некоторой расщепляемой алгебре $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}$ не содержит промежуточных расщепляемых подалгебр, то $\mathfrak{G}$ будет называться расщеплением $\mathfrak{F}$. Каждый автоморфизм $\mathfrak{F}$ однозначно расширяется до автоморфизма расщепления $\mathfrak{F}$, и все расщепления $\mathfrak{F}$ изоморфны над $\mathfrak{F}$.*

Теорема содержит несколько утверждений, и доказательство их удобнее вести в обратной последовательности, т. е. сначала доказать изоморфизм, затем расширяемость авотморфизмов и, наконец, существование расщеплений.

А. Предположим $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ — два расщепления $\mathfrak{F}$. Берем в $\mathfrak{F}$ какой-нибудь нерасщепляющийся элемент f_1 и раскладываем его нормально в $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$. Пусть $f_1 = a_1 + t_1$, $f = a_1' + t_1'$ — эти разложения. По теореме 1, структура подалгебр $\mathfrak{F}_1 = \{a_1, \mathfrak{F}\}$, $\mathfrak{F}_1' = \{a_1', \mathfrak{F}\}$ однозначно определяется элементом f и подалгеброй $\mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_1'$ должны быть изоморфны. Расщепляя аналогичным образом соответственные элементы $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1'$, мы продолжим изоморфизм на большие подалгебры. Повторяя этот процесс достаточное число раз, мы придем к алгебрам $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$.

B. Пусть θ — автоморфизм $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ — расщепление $\mathfrak{F}$, f_1 — какой-либо неразложимый элемент $\mathfrak{F}$. Согласно предположению в $\mathfrak{G}$ существуют нормальные разложения $f_1 = a_1 + t_1$, $f_1^\theta = a_1' + t_1'$. По теореме 1, дополнительное соответствие $a_1^\theta = a_1'$ продолжает θ до изоморфизма алгебр $\mathfrak{F}_1 = \{a_1, \mathfrak{F}\}$ и $\mathfrak{F}_1' = \{a_1', \mathfrak{F}\}$. Расширяя подалгебры $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1'$ аналогичным образом, мы получим изоморфные подалгебры $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_2'$ и т. д., пока, наконец, не придем к одной и той же алгебре $\mathfrak{G}$ с продолженным автоморфизмом θ.

C. *Всякая разрешимая алгебра $\mathfrak{F}$ содержится в некоторой расщепляемой.* Выберем в $\mathfrak{F}$ базис и обозначим через r размерность $\mathfrak{F}$. Дифференцирования $\mathfrak{F}$ образуют матричную алгебру Ли $\mathfrak{M}$, которая является инфинитезимальной алгеброй для группы автоморфизмов $\mathfrak{F}$*.

Так как последняя группа расщепляема (теорема 8), то расщепляема и алгебра $\mathfrak{M}$. Матрицы регулярного представления $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{M}$ и образуют в ней идеал $\mathfrak{M}_i$ внутренних дифференцирований. Ввиду разрешимости $\mathfrak{M}_i$ можно предполагать, что базис $\mathfrak{F}$ выбран так, что матрицы $\mathfrak{M}_i$ имеют треугольный вид. Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность всех треугольных матриц степени r. $\mathfrak{N}$ — разрешимая расщепляемая алгебра и $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}_i$. Поэтому минимальная расщепляемая матричная, содержащая $\mathfrak{M}_i$, алгебра $\mathfrak{N}_i$ будет также разрешимой. Очевидно, $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{A}_i + \mathfrak{T}$ — нормальное разложение $\mathfrak{N}_i$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ максимальную коммутативную, образованную семирегулярными матрицами и содержащую $\mathfrak{A}_i$ подалгебру $\mathfrak{M}$. Составим полупрямую сумму алгебры дифференцирований $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{F}$ **. $\mathfrak{G}$ является искомой расщепляемой алгеброй. Действительно, прежде всего ясно, что элементы $\mathfrak{A}$ семирегулярны в $\mathfrak{G}$. Разложим, далее, $\mathfrak{F}$ в прямую сумму инвариантных корневых подпространств $\mathfrak{F}_i$ относительно $\mathfrak{A}$. Так как элементы тех $\mathfrak{F}_i$, которые отвечают ненулевым корням, входят в коммутант $\mathfrak{G}$ и тем самым являются нильпотентными элементами $\mathfrak{G}$, то всякий элемент g допускает разложение $g = A + f + h$, где h нильпотентен в $\mathfrak{G}$, A семирегулярен, $f \in \mathfrak{F}$, $[\mathfrak{A} f] = 0$. Пусть F — матрица, отвечающая f в регулярном представлении $\mathfrak{F}$. Таким образом, $F \in \mathfrak{N}_i$. Для $\mathfrak{N}_i$ мы имеем разложение $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{A}_i + \mathfrak{T}$, соответственно которому разложится и F, $F = A' + T$, $A' \in \mathfrak{A}$, T — нильпотентна. Рассмотрим $g' = -A' + f$. Для произвольного элемента $g'' \in \mathfrak{G}$, $g'' = A'' + f''$, имеем $[-A' + f, \ A'' + f''] = -[A', f''] + [f, f''] = -A'f'' + Ff'' = (F - A')f'' = Tf''$.

---

* Дифференцированиями $\mathfrak{F}$ называются линейные преобразования A пространства $\mathfrak{F}$, удовлетворяющие условию

$$A[ab] = [Aa, b] + [a, Ab].$$

** Полупрямая сумма алгебры $\mathfrak{A}$ дифференцирований $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ есть алгебра пар (A, f) с операциями

$$\lambda(A, f) = (\lambda A, \lambda f), \ (A, f) + (A_1, f_1) = (A + A_1, f + f_1),$$

$$[(A, f), (A_1, f_1)] = ([AA_1], Af_1 + A_1 f + [ff_1]),$$

и соответствует полупрямому произведению групп.

Так как матрица T нильпотентная, то $-A'+f$ является нильпотентным элементом $\mathfrak{G}$. Следовательно, $g=(A+A')+((-A'+f)+h)$ есть искомое разложение для g.

D. *Если радикал $\mathfrak{R}$ некоторой алгебры Ли $\mathfrak{G}$ расщепляем, то $\mathfrak{G}$ также расщепляема.* По теореме Levi, $\mathfrak{G}$ содержит полупростую подалгебру $\mathfrak{S}$, изоморфную $\mathfrak{G}/\mathfrak{R}$. Следовательно, $\mathfrak{G}=\mathfrak{S}+\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}\cap\mathfrak{R}=0$. По предположению, $\mathfrak{R}$ допускает разложение $\mathfrak{R}=\mathfrak{B}+\mathfrak{T}$, где $\mathfrak{T}$ — максимальный нильпотентный идеал, $\mathfrak{B}$ — максимальная семирегулярная подалгебра из $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}\cap\mathfrak{T}=\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{R}$. В результате имеем разложение

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{S}+(\mathfrak{B}+\mathfrak{T}) \tag{4.1}$$

или, переходя от алгебр к группам Ли,

$$\mathfrak{G}^*=\mathfrak{S}^*(\mathfrak{B}^*\mathfrak{T}^*).$$

Обозначим через $\mathfrak{N}^*$ совокупность элементов $\mathfrak{G}^*$, перестановочных с $\mathfrak{B}^*$. Так как $s^{-1}\mathfrak{B}^*s$, $s\in\mathfrak{S}^*$, снова максимальная семирегулярная подгруппа $\mathfrak{R}^*$, то, по теореме 4, найдется $r\in\mathfrak{R}^*$ со свойством $r^{-1}\mathfrak{B}r=s^{-1}\mathfrak{B}^*s$. Отсюда $sr^{-1}\mathfrak{B}^*=\mathfrak{B}^*sr^{-1}$, $sr^{-1}\in\mathfrak{N}^*$, $s\in\mathfrak{N}^*\mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{S}^*\subset\mathfrak{N}^*\mathfrak{R}^*$, т. е. $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{N}+\mathfrak{R}$. Так как $\mathfrak{S}$ — максимальная полупростая в $\mathfrak{N}+\mathfrak{R}$, то $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{R}$ изоморфна $\mathfrak{S}$ и, по теореме Levi, в $\mathfrak{N}$ найдется подалгебра $\mathfrak{S}_1$ изоморфная $\mathfrak{S}$. Подставляя $\mathfrak{S}_1$ в (4.1) вместо $\mathfrak{S}$, получим новое разложение

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{S}_1+(\mathfrak{B}+\mathfrak{T}),$$

которое можно переписать в виде

$$\mathfrak{G}=(\mathfrak{S}_1+\mathfrak{B})+\mathfrak{T}, \tag{4.2}$$

ибо элементы $\mathfrak{S}_1^*$ перестановочны с $\mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{S}_1^*\mathfrak{B}^*$ — группа. Соответствие

$$b\to[s_1b]=S_1b \quad (b\in\mathfrak{B},\ s_1\in\mathfrak{S}_1)$$

есть линейное преобразование пространства $\mathfrak{B}$, а $s_1\to S_1$ дает линейное представление алгебры $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{B}$. Центр $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{R}$ является инвариантным подпространством $\mathfrak{B}$. Из теоремы о полной приводимости представлений полупростых алгебр следует, что в $\mathfrak{B}$ найдется инвариантное подпространство $\mathfrak{A}$, дополнительное к $\mathfrak{Z}$. Таким образом,

$$\mathfrak{B}=\mathfrak{A}+\mathfrak{Z},\ \mathfrak{A}\cap\mathfrak{Z}=0,\ [\mathfrak{S}\mathfrak{A}]\subset\mathfrak{A},\ [\mathfrak{S}\mathfrak{Z}]\subset\mathfrak{Z}$$

и (4.2) оказывается возможным заменить разложением

$$\mathfrak{G}=(\mathfrak{S}_1+\mathfrak{A})+\mathfrak{T}, \quad (\mathfrak{S}_1+\mathfrak{A})\cap\mathfrak{T}=0. \tag{4.3}$$

Разложение (4.3) может быть названо **нормальным разложением** расщепляемой алгебры. Легко видеть, что в (4.3) элементы $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{A}$ перестановочны. Действительно, известно, что коммутант всякой алгебры Ли имеет нильпотентный радикал. Так как радикал коммутанта есть идеал, содержащийся в радикале первоначальной алгебры,

то он будет содержаться в ядре этого первоначального радикала. В нашем случае это значит, что $[\mathfrak{S}_1, \mathfrak{A}] \subset \mathfrak{T}$. Так как $[\mathfrak{S}_1, \mathfrak{A}] \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} = 0$, то $[\mathfrak{S}_1, \mathfrak{A}] = 0$, что и требовалось.

Наконец, из нормального разложения (4.3) уже непосредственно следует, что $\mathfrak{G}$ расщепляема. Действительно, пусть $g \in \mathfrak{G}$, $g = s_1 + a + t$. Полупростые алгебры расщепляемы и при этом семирегулярные и нильпотентные элементы их изображаются в любом линейном представлении соответственно семирегулярными и нильпотентными матрицами*. Если $s_1 = m_1 + u_1$, где m_1 семирегулярный, u_1 — нильпотентный элемент $\mathfrak{S}_1$, то из сделанного замечания следует, что такими же будут эти элементы и в $\mathfrak{G}$. Искомое разложение для g есть $g = (m_1 + a) + (u_1 + t)$.

E. *Всякая алгебра Ли $\mathfrak{L}$ содержится в некоторой расщепляемой алгебре.* Представим $\mathfrak{L}$ в виде $\mathfrak{L} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — радикал $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = 0$. Совокупность элементов $\mathfrak{S}$, коммутирующих со всеми элементами $\mathfrak{R}$, образует некоторый идеал $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{S}$. Однако всякий идеал полупростой алгебры является прямым слагаемым, поэтому $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = 0$, $[\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2] = 0$. Отсюда $\mathfrak{L} = \mathfrak{S}_1 + (\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{R})$. Первое слагаемое этой прямой суммы есть полупростая и, следовательно, расщепляемая алгебра. Поэтому остается доказать, что алгебру $\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{R} = \mathfrak{L}_2$ можно заключить в расщепляемую. На $\mathfrak{L}_2$ можно смотреть как на полупрямую сумму алгебры $\mathfrak{S}_2$ дифференцирований $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}$. Согласно C, для $\mathfrak{R}$ имеется расщепление, которое обозначим $\mathfrak{G}$. Согласно A, всякое дифференцирование алгебры $\mathfrak{R}$ однозначно распространяется в дифференцирование ее расщепления $\mathfrak{G}$.

Таким образом, $\mathfrak{S}_2$ можно рассматривать, как алгебру дифференцированний $\mathfrak{G}$. Составим полупрямую сумму $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{G}$. Согласно D $\mathfrak{L}_1$ расщепляема, так как ее радикал $\mathfrak{G}$ расщепляем и $\mathfrak{L}_1 \supset \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{R}$.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть $\mathfrak{G}$ — расщепление алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда всякий идеал $\mathfrak{F}$ будет идеалом в $\mathfrak{G}$, коммутант $\mathfrak{G}$ совпадает с коммутантом $\mathfrak{F}$, центр $\mathfrak{G}$ совпадает с центром $\mathfrak{F}$.*

Первое утверждение непосредственно следует из доказательства теоремы 1. Доказательство второго может быть проведено следующим образом. Возьмем какой-либо неразложимый элемент f из $\mathfrak{F}$ и разложим его нормально в $\mathfrak{G}$. Пусть $f = a + t$ — это разложение. Раскладываем теперь пространство $\mathfrak{F}$ относительно f на корневые инвариантные подпространства $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_s$. Обозначим через $\rho_0 = 0, \rho_1, \ldots, \rho_s$ соответственные корни f, $\rho_1 \ldots \rho_s \neq 0$. По определению корневых подпространств существует такое натуральное число ν, что $(F - \rho_i E)^\nu f_i = 0$, где F — матрица f в регулярном представлении $\mathfrak{F}$, E — единичная матрица, $f_i \in \mathfrak{F}_i$.

Отсюда видно, что $\mathfrak{F}_i \subset [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$, для $i \neq 0$. С другой стороны, рассмотрим алгебру $\mathfrak{F}' = \{a, \mathfrak{F}\}$. Ее коммутант порождается элементами вида $[a, \mathfrak{F}]$ и $[\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$.

---

* Ср. ([5]), где это доказано для семирегулярных элементов; для нильпотентных доказывается аналогично.

Пусть $h \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$h = h_0 + h_1 + \ldots + h_s, \quad h_i \in \mathfrak{F}_i \quad (i = 0, 1, \ldots, s),$$
$$[ah] = \rho_1 h_1 + \ldots + \rho_s h_s.$$

Так как $h_i \in [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то $[ah] \in [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$, $[\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'] = [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$. Переходя аналогичным образом от $\mathfrak{F}'$ к большей алгебре $\mathfrak{F}''$ и т. д., в конце концов мы придем к $\mathfrak{G}$ и, таким образом, получим $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}] = [\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$.

Наконец, относительно центров ясно, что центр $\mathfrak{F}$ лежит внутри центра $\mathfrak{G}$. Для доказательства обратного обозначим центр $\mathfrak{G}$ через $\mathfrak{Z}$ и рассмотрим гомоморфное отображение $\mathfrak{G} \to \overline{\mathfrak{G}}$, где $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} / [\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$. Так как алгебра $\overline{\mathfrak{G}}$ абелева, то ее можно разложить в прямую сумму вида

$$\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{F}} + \overline{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{Z}}_1, \tag{4.4}$$

где $\overline{\mathfrak{F}}$ — образ $\mathfrak{F}$, $\overline{\mathfrak{Z}}_1$ — образ некоторой центральной подалгебры $\mathfrak{Z}_1$, которую в случае $\mathfrak{Z} \not\subset \mathfrak{F}$ можно заведомо сделать отличной от нуля, $\overline{\mathfrak{P}}$ — дополнительная подалгебра. Обозначая через $\mathfrak{H}$ полный прообраз $\overline{\mathfrak{F}} + \overline{\mathfrak{P}}$ в $\mathfrak{G}$ и замечая, что $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}] \subset \mathfrak{F}$, мы из (4.4) получаем прямое разложение для алгебры $\mathfrak{G}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{Z}_1. \tag{4.5}$$

Так как расщепление прямой суммы равно сумме расщеплений слагаемых и $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{F}$, то (4.5) показывает, что расщеплением $\mathfrak{F}$ будет $\mathfrak{H}$, а не $\mathfrak{G}$, как было предположено. Следовательно. $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{F}$.

n° 5. Конструкция разрешимых алгебр. Поставим следующую задачу: какими инвариантами можно характеризовать разрешимые алгебры, если в число допустимых инвариантов включить и нильпотентные алгебры, считая их, таким образом, как бы известными и более простыми? Этот вопрос был решен в n° 2 для расщепляемых алгебр. Теоремы n° 4 позволяют дать аналогичное решение для произвольных разрешимых алгебр. Для этого в качестве основного инварианта, определяющего разрешимую алгебру $\mathfrak{F}$, мы примем ее расщепление $\mathfrak{G}$, что в виду n° 2 возможно. Так как алгебр с данным расщеплением в общем случае существует бесконечное множество, то требуется указать дополнительные инварианты.

По теореме 10, коммутант $\mathfrak{K}$ алгебры $\mathfrak{F}$ совпадает с коммутантом $\mathfrak{G}$ и, таким образом, $\mathfrak{F}$ находится среди алгебр, промежуточных между $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{K}$. Все такие алгебры однозначно характеризуются своим образом в $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$. Однако $\overline{\mathfrak{G}}$ абелева и ее подалгебры — произвольные линейные подпространства пространства $\overline{\mathfrak{G}}$. Следовательно, нужно знать, каким подпространствам $\overline{\mathfrak{G}}$ отвечают подалгебры, расщепление которых совпадает с $\mathfrak{G}$, и какие среди них изоморфны. Ответ на эти вопросы дают теоремы 11, 12.

ТЕОРЕМА 11. *Пусть $\mathfrak{G}$ — расщепляемая разрешимая алгебра, $\mathfrak{Z}$ — центр, $\mathfrak{K}$ — коммутант $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{T}$ — нормальное разложение *. Для*

---

* т. е. разложение теоремы 3.

того чтобы подалгебра $\mathfrak{F}$ *имела своим расщеплением* $\mathfrak{G}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$1^\circ \quad \mathfrak{G} \supset \mathfrak{F} \supset \mathfrak{K}, \quad 2^\circ \quad \mathfrak{F} \supset \mathfrak{Z}, \quad 3^\circ \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{F} = \mathfrak{T} + \mathfrak{F}.$$

Необходимость очевидна, так как 1°, 2° содержатся в теореме 10, а по поводу 3° достаточно заметить, что $\mathfrak{A} + \mathfrak{F}$ заведомо расщепляемая при любом $\mathfrak{F}$. Остается показать достаточность условий. Обозначим через $\mathfrak{T}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$ корневые подпространства $\mathfrak{T}$ относительно преобразований $\mathfrak{A}$. Таким образом,

$$[at] = \rho_i(a)\, t, \tag{5.1}$$

где $a \in \mathfrak{A}$, $t \in \mathfrak{T}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$, $\rho_0(a) = 0$, $\rho_j(a) \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$. Подпространства $\mathfrak{T}_j$ $(j = 1, \ldots, s)$, ввиду (5.1), лежат в $[\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$ и, следовательно, в $\mathfrak{F}$. Выберем базис $\mathfrak{F}$ в форме

$$a_1 + t_1, \quad a_2 + t_2, \ldots, a_k + t_k, \quad t_{k+1}, \ldots, t_m, \quad a_{k+1}, \ldots, \quad a_n, \{\mathfrak{T}_1\}, \ldots, \{\mathfrak{T}_s\}$$

где $a_{k+1}, \ldots, a_n$ — базис $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{F}$, $t_{k+1}, \ldots, t_m$ — базис $\mathfrak{T}_0 \cap \mathfrak{F}$. Докажем, что элементы $a_i + t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ не могут быть в алгебре $\mathfrak{F}$ ни нильпотентными, ни семирегулярными и, таким образом, должны разлагаться при переходе к расщеплению $\mathfrak{F}$. Пусть $a_1 + t_1$ нильпотентен в $\mathfrak{F}$. Это может быть только, если $[a_1 \mathfrak{T}_i] = 0$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$, т. е. если a_1 центральный в $\mathfrak{G}$. Согласно 2° отсюда следует, что $a_1 \in \mathfrak{F}$, $t_1 \in \mathfrak{F}$ в противоречии с выбором базиса. Пусть, наоборот, $a_i + t_1$ семирегулярен в $\mathfrak{F}$. Обозначим через A_1, T_1 линейные преобразования, вызываемые в $\mathfrak{F}$ коммутированиями, соответственно, с элементами a_1, t_1. Так как A_1, $A_1 + T_1$ семирегулярны, T_1 — нильпотентно, $[A_1 T_1] = 0$, то $T_1 = 0$, $[t_1 \mathfrak{F}] = 0$. Отсюда $[t_1, a_i + t_i] = 0$, $[t_1, t_i] = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ и, следовательно, $[t_1 \mathfrak{G}] = 0$. По 2° это дает $t_1 \in \mathfrak{F}$, $a_1 \in \mathfrak{F}$, что снова противоречит выбору базиса.

ТЕОРЕМА 12. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *расщепляемая алгебра*, $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}$ — *ее нормальное разложение*, $\mathfrak{Z}$ — *центр* $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} / [\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}]$. *Существует группа линейных преобразований* $\overline{\Gamma}^*$, *оперирующая в пространстве* $\overline{\mathfrak{G}}$ *и обладающая следующими свойствами:*

1. *Связная компонента единицы* $\overline{\Gamma}_0^*$ *группы* $\overline{\Gamma}^*$ *нильпотентна.*

2. $\overline{\Gamma}^* / \overline{\Gamma}_0^*$ *конечна.*

3. *Образы* $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{T}}$, $\overline{\mathfrak{Z}}$ *алгебр* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Z}$ *в* $\overline{\mathfrak{G}}$ *инвариантны относительно* $\overline{\Gamma}^*$.

4. *Если подпространство* $\overline{\mathfrak{F}}$ *из* $\overline{\mathfrak{G}}$ *таково, что* $\overline{\mathfrak{F}} + \mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{F}} + \overline{\mathfrak{T}} = \overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{Z}} \subset \overline{\mathfrak{F}}$, *то его прообраз в* $\mathfrak{G}$ *есть алгебра* $\mathfrak{F}$, *расщепление которой совпадает с* $\mathfrak{G}$.

5. *Чтобы две подалгебры* $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, *расщепления которых совпадают с* $\mathfrak{G}$, *были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их образы* $\overline{\mathfrak{F}}_1$, $\overline{\mathfrak{F}}_2$ *переводились друг в друга некоторыми преобразованиями из* $\overline{\Gamma}^*$.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{U}$, определенную для заданного ядра $\mathfrak{T}$ в теореме 7. Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{A} + \mathfrak{T}$ — нормальное разложение $\mathfrak{U}$. Согласно

теореме 7, $\mathfrak{G}$ можно рассматривать как одну из подалгебр $\mathfrak{U}$ вида $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}$. Обозначим через Θ^* группу автоморфизмов $\mathfrak{U}$, оставляющих инвариантной подалгебру $\mathfrak{A}$, и через Γ^* — подгруппу, образованную элементами Θ^*, оставляющими на месте подалгебру $\mathfrak{A}_1$. Так как Θ^* индуцирует в $\mathfrak{A}$ конечную группу линейных преобразований (теорема 7), то фактор-группа Θ^*/Γ^* конечна, $\Gamma_0^*=\Theta_0^*$. Пусть $\overline{\Gamma}^*$ — группа преобразований, индуцируемых в $\overline{\mathfrak{G}}$ автоморфизмами Γ^*. Тогда свойства 1, 2 следуют из аналогичных свойств группы Θ^*. Свойство 4 следует из теоремы 11, а свойство 3 очевидно, так как $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Z}$ — характеристические подалгебры $\mathfrak{G}$.

Наконец, условие 5 можно получить следующим образом. Пусть две подалгебры $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ изоморфны и имеют своим расщеплением алгебру $\mathfrak{G}$. Вследствие теоремы 9, этот изоморфизм продолжаем до некоторого автоморфизма θ алгебры $\mathfrak{G}$. По теореме 7, автоморфизм θ может быть продолжен до автоморфизма $\mathfrak{U}$, оставляющего на месте $\mathfrak{A}$. Таким образом, θ индуцируется некоторым автоморфизмом группы Γ^*, что и требовалось. Достаточность условий 5 очевидна.

n° 6. Вещественные алгебры. — *Примеры*. В теории групп Ли приходится иметь дело непосредственно лишь с алгебрами Ли над полем вещественных чисел. Поэтому представляет интерес выделить свойства, имеющие место для алгебр над таким полем. Одно из подобных свойств дает теорема 13. Определения нильпотентных и семирегулярных элементов не зависели от основного поля и мы их оставляем прежними.

ТЕОРЕМА 13. *Максимальные коммутативные подалгебры, образованные семирегулярными элементами вещественной разрешимой алгебры $\mathfrak{F}$, внутренне сопряжены в $\mathfrak{F}$.*

Если $\mathfrak{A}$ — какая-либо коммутативная семирегулярная подалгебра $\mathfrak{F}$, то для $\mathfrak{F}$ существует разложение вида $\mathfrak{F}=\mathfrak{A}+\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1$ — идеал $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{A}$ содержится в центре $\mathfrak{F}$.

Доказательство можно вести аналогично доказательству теоремы 4. При этом снова дело сводится к случаю, когда коммутант $\mathfrak{K}=[\mathfrak{F}\mathfrak{F}]$ абелев. Пусть $\overline{\mathfrak{F}}$ — комплексная форма алгебры $\mathfrak{F}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ — комплексная форма коммутанта $\mathfrak{K}$. Очевидно — $\overline{\mathfrak{K}}=[\overline{\mathfrak{F}}\,\overline{\mathfrak{F}}]$. Рассмотрим две максимальные семирегулярные подалгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ алгебры $\mathfrak{F}$. Нам нужно показать, что найдется такой элемент $x\in\mathfrak{F}$, для которого

$$[\mathfrak{A}_1,\ e^x\mathfrak{A}_2]=0 \tag{6.1}$$

или, более подробно,

$$[a_1^{(i)},\ e^x a_2^{(j)}]=1, \tag{6.2}$$

где $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$, ... — базис $\mathfrak{A}_1$, $a_2^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, ... — базис $\mathfrak{A}_2$. Пользуясь коммутативностью $\mathfrak{K}$, соотношения (6.2) можно переписать в виде

$$[a_1^{(i)}a_2^{(j)}]+[a_1^{(i)}\ [xa_2^{(j)}]]=0. \tag{6.3}$$

Полагая $x = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_s x_s$, где $x_1, \ldots, x_s$ — базис $\mathfrak{F}$, мы видим, что (6.3) является системой линейных уравнений относительно ω_i. Из теоремы 4 видно, что система (6.3) в поле комплексных чисел решение заведомо имеет. Однако тогда она имеет и вещественное решение, так как все ее коэффициенты вещественны. Утверждение теоремы о существовании полупрямого разложения $\mathfrak{A} + \mathfrak{F}_1$ очевидно.

Из теоремы 13, в частности, следует, что *максимальные компактные связные подгруппы разрешимой группы Ли* $\mathfrak{F}^*$ *сопряжены в* $\mathfrak{F}^*$ (7). Действительно, компактным подгруппам $\mathfrak{F}^*$ отвечают семирегулярные коммутативные подалгебры. По теореме 13, отсюда следует, что любую компактную подгруппу $\mathfrak{F}_1^*$ можно трансформировать посредством такого элемента $x \in \mathfrak{F}^*$, чтобы элементы $x^{-1}\mathfrak{F}_1^* x$ стали перестановочными с элементами любой другой наперед заданной компактной подгруппы $\mathfrak{F}_2^*$. Так как произведение двух компактных перестановочных подгрупп компактно и $x^{-1}\mathfrak{F}_1^* x$, $\mathfrak{F}_2^*$ максимальны, то $x^{-1}\mathfrak{F}_1^* x = \mathfrak{F}^*$, что и требовалось.

Возвращаясь снова к алгебрам над полем комплексных чисел, докажем сначала некоторое усиление теоремы 4, а затем рассмотрим один пример на классификацию разрешимых алгебр с данным ядром.

ТЕОРЕМА 4а. *Максимальные коммутативные семирегулярные подалгебры произвольной расщепляемой алгебры Ли* $\mathfrak{L}$ *сопряжены в* $\mathfrak{L}$. *Более того, если* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ — *две подалгебры одной и той же максимальной коммутативной семирегулярной подалгебры* $\mathfrak{B}$ *из* $\mathfrak{L}$ *и если существует автоморфизм* $\mathfrak{L}$, *переводящий* $\mathfrak{B}_1$ *в* $\mathfrak{B}_2$, *то существует также автоморфизм* $\mathfrak{L}$, *переводящий* $\mathfrak{B}_1$ *в* $\mathfrak{B}_2$ *и оставляющий на месте алгебру* $\mathfrak{B}$.

Согласно теореме 9, D, алгебра $\mathfrak{L}$ имеет форму

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{S} + \mathfrak{A}) + \mathfrak{T}, \tag{6.4}$$

где $\mathfrak{T}$ — нильпотентный идеал, $\mathfrak{A}$ — коммутативная семирегулярная, $\mathfrak{S}$ — полупростая, $[\mathfrak{A}\,\mathfrak{S}] = 0$. Так как подлежащее доказательству утверждение имеет место для полупростых и для разрешимых, то из (6.4) легко усматривается, что оно имеет место и для $\mathfrak{L}$.

В заключение найдем все разрешимые алгебры, ядро расщепления которых коммутативно. Для этого ищем сначала расщепляемые разрешимые алгебры с данным коммутативным ядром $\mathfrak{T}$. Автоморфизмы $\mathfrak{T}$ являются неособенными линейными преобразованиями пространства $\mathfrak{T}$ и при каком-либо фиксированном базисе $\mathfrak{T}$ обращаются в группу $\mathfrak{M}^*$ всех неособенных матриц степени n. Диагональные матрицы из $\mathfrak{M}^*$ составляют ее максимальную коммутативную семирегулярную подгруппу $\mathfrak{A}^*$. Алгебра $\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{A}$ имеет размерность n, равную размерности $\mathfrak{T}$. Пусть e_{ik} — матричные единицы. Базис $\mathfrak{A}$ дают единицы $e_{11}, \ldots, e_{nn}$. Внутренние автоморфизмы $\mathfrak{M}^*$, оставляющие инвариантной $\mathfrak{A}$, вызывают перестановки ее базисных элементов e_{ii}, и любая перестановка таким образом производится. Следовательно, группа $\bar{\Theta}$ (см. теорему 4) является симметрической группой перестановок базисных элементов. Два линейных подпространства $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ из $\mathfrak{A}$ дают изоморфные подалгебры $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}$, $\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{T}$ тогда и только тогда, когда одно

из них переходит в другсе при некоторой перестановке координатных осей $e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{nn}$.

Нерасщепляемых алгебр $\mathfrak{F}$, расщепление которых $\mathfrak{G}$ имело бы коммутативное ядро $\mathfrak{T}$, не существует. Ибо, если $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}$ — нормальное разложение $\mathfrak{G}$, то, по теореме 10, центр и коммутант $\mathfrak{G}$ должны совпадать соответственно с центром и коммутантом $\mathfrak{G}$. Однако $\mathfrak{G}$ допускает прямое разложение вида $\mathfrak{G} = (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}_1) + \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ — центр $\mathfrak{G}$, а коммутант алгебры $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}_1$ совпадает с $\mathfrak{T}_1$. Отсюда $\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{Z} \subset \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

§ 3. Приложения

n° 7. Теорема Адо. Нормальное разложение (4.3), полученное в n° 4 для расщепляемых алгебр, может быть использовано для доказательства известной теоремы Адо о том, что *всякая алгебра Ли допускает изоморфное матричное представление* [1].

Действительно, всякая алгебра содержится в расщепляемой и поэтому достаточно ограничиться рассмотрением только последних. Пусть $\mathfrak{L}$ — расщепляемая алгебра Ли и

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{S} + \mathfrak{A}) + \mathfrak{T}$$

— ее нормальное разложение из n° 4. Переходя к группам, мы получим

$$\mathfrak{L}^* = (\mathfrak{S}^* \mathfrak{A}^*)\, \mathfrak{T}^*.$$

Для нильпотентных групп G. Birkhoff'ом [2] было получено точное матричное представление $\mathfrak{D}$, обладающее тем свойством, что для каждого автоморфизма нильпотентной группы θ найдется такая матрица V_θ, для которой

$$\mathfrak{D}(t^\theta) = V_\theta^{-1} \mathfrak{D}(t)\, V_\theta \quad (t \in \mathfrak{T}). \tag{7.1}$$

Каждый элемент $p \in \mathfrak{S}^* \mathfrak{A}^*$ порождает внутренний автоморфизм группы $\mathfrak{L}$ и, следовательно, индуцирует также некоторый автоморфизм $\theta(p)$ в $\mathfrak{T}$. Пусть $V(p) = V_{\theta(p)}$ — матрица, обладающая свойством (7.1). Тогда соответствие

$$pt \to V(p)\, \mathfrak{D}(t)$$

будет представлением $\mathfrak{L}^*$. Пусть $\mathfrak{D}_1(p)$ — очевидно существующее локально точное представление $\mathfrak{S}^* \mathfrak{A}^*$. Представление

$$\mathfrak{D}(pt) = \mathfrak{D}_1(p) \dot{+} V(p)\, \mathfrak{D}(t)$$

есть искомое локально точное представление $\mathfrak{L}^*$, и, следовательно, точное для алгебры $\mathfrak{L}$. В частности, если в качестве $\mathfrak{A}^* \mathfrak{T}^*$ взять односвязную группу, а для $\mathfrak{S}^*$ выбрать линейно представимую форму, то $\mathfrak{L}^*$ будет линейно представима и в целом (ср. [3]).

n° 8. Инварианты. Пусть $\mathfrak{G}^*$ — замкнутая группа линейных преобразований векторного пространства E с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Каждое линейное преобразование $G \in \mathfrak{G}^*$ переводит вектор $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ с независимыми переменными компонентами x_i в некоторый вектор $Gx =$

$=\bar{x}_1e_1+\ldots+\bar{x}_ne_n$. Функция $F(x_1, \ldots, x_n)$ называется **инвариантом** (векторным) группы $\mathfrak{G}^*$, если $F(x_1, \ldots, x_n)=F(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ для всех $G\in\mathfrak{G}^*$. Целые рациональные инварианты образуют кольцо $\mathfrak{O}(\mathfrak{G}^*)$, содержащееся в кольце полиномов от $x_1, \ldots, x_n$. Дробные рациональные инварианты образуют подполе $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ поля рациональных функций. Фундаментальной задачей теории инвариантов является изучение алгебраической структуры $\mathfrak{O}(\mathfrak{G}^*)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ для различных $\mathfrak{G}^*$ ([11]). Например, доказано, что $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ имеет конечное число образующих ([9]). Однако, можно ли, например, для конечных групп $\mathfrak{G}^*$ выбрать эти образующие алгебраически независимыми, — представляет известную проблему минимального рационального базиса. Аналогично, имеет ли кольцо $\mathfrak{O}(\mathfrak{G}^*)$ всегда конечное число образующих, — является так называемой первой основной проблемой теории инвариантов. Эта проблема решена положительно для отдельных типов групп $\mathfrak{G}^*$: компактных, циклических, полупростых и некоторых других. В общем случае она остается нерешенной.

Weitzenböck'ом ([10]) было доказано, что если $\mathfrak{G}^*$ связна, то $\mathfrak{O}(\mathfrak{G}^*)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ совпадают соответственно с $\mathfrak{O}(\mathfrak{R}^*)$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{R}^*)$, где $\mathfrak{R}^*$ — максимальная связная разрешимая подгруппа $\mathfrak{G}^*$. Таким образом, для связных групп все приводится к изучению инвариантов разрешимых групп. В той же работе показывается, как найти инварианты разрешимой, зная инварианты нильпотентных групп. Однако это сделано несколько обходным путем, в результате чего остается неясным, от каких нильпотентных групп зависят инварианты исходной группы. Теоремы 3, 8 позволяют получить редукцию прямо и сделать явной эту нильпотентную группу.

ТЕОРЕМА 14. *Если $\mathfrak{T}^*$ — ядро расщепления $\mathfrak{G}^*$ разрешимой линейной группы $\mathfrak{R}^*$ и если $\mathfrak{O}(\mathfrak{T}^*)$ имеет конечное число образующих, то $\mathfrak{O}(\mathfrak{R}^*)=\mathfrak{O}(\mathfrak{G}^*)$ также имеет конечное число образующих.*

Пусть $\mathfrak{L}^*$ — группа всех неособенных линейных преобразований, оставляющих инвариантными полиномы кольца $\mathfrak{O}(\mathfrak{R}^*)$. Очевидно $\mathfrak{L}^*\supset\mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{O}(\mathfrak{L}^*)=\mathfrak{O}(\mathfrak{R}^*)$. По теореме 8, $\mathfrak{L}^*$ расщепляема; следовательно, $\mathfrak{L}^*\supset\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{O}(\mathfrak{G}^*)=\mathfrak{O}(\mathfrak{R}^*)$.

Перейдем к изучению связи между $\mathfrak{O}(\mathfrak{G}^*)$ и $\mathfrak{O}(\mathfrak{T}^*)$. Группу $\mathfrak{G}^*$ можно представить, при подходящем выборе базиса в E, в форме $\mathfrak{G}^*=\mathfrak{A}^*\mathfrak{T}^*$, где $\mathfrak{A}^*$—абелева группа диагональных матриц (теорема 3). Так как $\mathfrak{T}^*$ нормальный делитель $\mathfrak{G}^*$, то инварианты $\mathfrak{T}$ переводятся преобразованиями $\mathfrak{A}^*$ снова в инварианты $\mathfrak{T}^*$. Следовательно, чтобы получить инварианты $\mathfrak{G}^*$, нужно из $\mathfrak{O}(\mathfrak{T}^*)$ выбрать полиномы, остающиеся инвариантными при преобразованиях $\mathfrak{A}^*$. Выберем в $\mathfrak{A}^*$ преобразование A общего вида *. Так как A диагональна, то $Ax_i=\rho_ix_i$, $A^\nu x_i=\rho_i^\nu x_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $\nu=1, 2, \ldots$). Назовем **весом** одночлена $ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ число $\rho_1^{\alpha_1}\cdots\rho_n^{\alpha_n}$. Полином F называется **изобаричным**, если все его члены одного и того же веса. Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ инвариантен относительно $\mathfrak{T}^*$ и $F=F_1+\ldots+F_k$ — его разложение в сумму изобарич-

* т. е. обладающее следующим свойством: если между $\rho_1, \ldots, \rho_n$ существует соотношение $\rho_1^{k_1}\cdots\rho_n^{k_n}=1$ с целыми k_i, то такое же соотношение существует для всех матриц $\mathfrak{A}^*$ ($\rho_1, \ldots, \rho_n$ — диагональные элементы A).

ных частей с различными весами $\pi_1, \ldots, \pi_k$. Так как $A^s F \in \mathfrak{O}(\mathfrak{T}^*)$, то из системы уравнений

$$A^\nu F = \pi_1^\nu F_1 + \ldots + \pi_k^\nu F_k \quad (\nu = 0, 1, \ldots, k-1)$$

находим, что $F_i \in \mathfrak{O}(\mathfrak{T}^*)$. Предположим теперь, что кольцо $\mathfrak{O}(\mathfrak{T}^*)$ имеет конечное число образующих. Раскладывая эти образующие на изобаричные слагаемые, мы получим конечную систему изобаричных образующих для $\mathfrak{O}(\mathfrak{T}^*)$. Обозначим эти образующие через $f_1, \ldots, f_s$, их веса через $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$. Легко видеть, что всякий инвариант $\mathfrak{O}(\mathfrak{G}^*)$ есть сумма членов вида $af_1^{n_1}f_2^{n_2}\cdots f_s^{n_s}$, где вес каждого члена равен нулю. Поставим в соответствие всякому произведению вида $f_1^{m_1}f_2^{m_2}\cdots f_s^{m_s}$ ($m_i \geqslant 0$) вектор $(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ вспомогательного s-мерного пространства. Произведениям веса нуль отвечают векторы, координаты которых связаны соотношением

$$m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \ldots + m_s\sigma_s = 0. \tag{8.1}$$

Однако ясно, что среди решений уравнения (8.1) с целыми, неотрицательными m_i найдется конечное число базисных, через которые остальные будут выражаться в виде сумм ([12]). Произведения $f_1^{m_1} \cdots f_s^{m_s}$, отвечающие базисным решениям, очевидно, и будут образующими кольца $\mathfrak{O}(\mathfrak{G}^*)$.

Доказанная теорема сводит, таким образом, общую проблему к проблеме нахождения инвариантов нильпотентных линейных групп *. Вообще говоря, инварианты нильпотентных групп ведут себя более просто, чем инварианты разрешимых групп. Например, было упомянуто, что $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ всегда имеет конечное число образующих. Если $\mathfrak{G}^*$ нильпотентна, то для степеней образующих можно указать верхнюю границу, зависящую только от степени матриц $\mathfrak{G}^*$. Это заведомо не имеет места для разрешимых групп.

Заметим еще, что $\mathfrak{P}(\mathfrak{G}^*)$ для связных $\mathfrak{G}^*$ допускает алгебраически независимую систему образующих. Таким образом, проблема минимального рационального базиса для связных групп имеет положительное решение.

n° 9. Нильпотентные подалгебры. Нильпотентная подалгебра максимальна, если она не содержится ни в какой другой большей нильпотентной подалгебре. Так как все подалгебры нильпотентной алгебры нильпотентны, то первой задачей при изучении нильпотентных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{L}$ будет нахождение максимальных.

Пусть $\mathfrak{R}$ — какая-либо фиксированная максимальная разрешимая подалгебра $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{F}$ — максимальная нильпотентная из $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}_1$ — одна из максимальных разрешимых подалгебр $\mathfrak{L}$, содержащих $\mathfrak{F}$. По теореме Чеботарева — Морозова ([8]), существует такой элемент $x \in \mathfrak{L}^*$, что $x^{-1}\mathfrak{R}_1 x = \mathfrak{R}$. Алгебра $\mathfrak{F}_1 = x^{-1}\mathfrak{F}x$ содержится в $\mathfrak{R}$ и является в ней максималь-

* Под нильпотентной группой здесь снова понимается группа матриц, приводимых к треугольной форме с единичной главной диагональю.

ной нильпотентной. Таким образом, дело сводится к нахождению максимальных нильпотентных подалгебр *разрешимой* алгебры $\mathfrak{R}$.

Обозначим через $\mathfrak{G}$ расщепление $\mathfrak{R}$. Мы сначала найдем максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{G}$, а затем покажем, что они взаимно однозначно соответствуют аналогичным подалгебрам $\mathfrak{R}$.

ЛЕММА. *Если $\mathfrak{F}$ — нильпотентная подалгебра расщепляемой алгебры $\mathfrak{G}$, то расщепление $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{G}$ также нильпотентно.*

Действительно, если $f \in \mathfrak{F}$, $f = a + t$ — нормальное разложение f в $\mathfrak{G}$, то корневые подпространства $\mathfrak{F}$ относительно f и относительно a должны быть теми же самыми. Так как $\mathfrak{F}$ нильпотентна, то $\mathfrak{F}$ принадлежит корню нуль относительно f. Поэтому $[a, \mathfrak{F}] = 0$. Следовательно, расщепление $\mathfrak{F}$ либо совпадает с $\mathfrak{F}$, либо отличается от него на абелево прямое слагаемое, что и требовалось.

Приведем все матрицы регулярного представления $\mathfrak{G}$ к треугольной форме и обозначим через $\rho_1(g), \ldots, \rho_n(g)$ диагональные элементы матрицы, отвечающей элементу $g \in \mathfrak{G}$. Мы будем говорить, что элемент $f \in \mathfrak{G}$ имеет тип больший или равный типу $g \in \mathfrak{G}$, если из $\rho_i(g) \neq \rho_j(g)$ следует $\rho_i(f) \neq \rho_j(f)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

ТЕОРЕМА 15. *С точностью до сопряженности все максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{F}$ расщепляемой разрешимой алгебры $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{T}$ имеют вид $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_1 + Z_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{A}_1)$, где $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $Z_{\mathfrak{T}}(\mathfrak{A}_1)$ — совокупность элементов $\mathfrak{T}$, перестановочных с элементами $\mathfrak{A}_1$, $Z_{\mathfrak{A}}(Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1)) = \mathfrak{A}_1$. Если $a_1 \in \mathfrak{A}_1$, $a \in \mathfrak{A}$ и тип a не больше типа a_1 то $a \in \mathfrak{A}_1$. Таким образом, максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{G}$ с точностью до сопряженности в $\mathfrak{G}$ однозначно характеризуются наивысшим типом содержащихся в них элементов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — максимальная нильпотентная подалгебра $\mathfrak{G}$. Согласно лемме, $\mathfrak{F}$ расщепляема. Пользуясь теоремой 4, мы находим, что с точностью до сопряженности $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}$. Так как $\mathfrak{F}$ нильпотентна, то $[\mathfrak{A}_1 \mathfrak{F}_1] = 0$. Следовательно, нильпотентные подалгебры $\mathfrak{A}_1 + Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1)$, $Z_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}_1) + \mathfrak{F}_1$ содержат $\mathfrak{F}$. Ввиду максимальности $\mathfrak{F}$, эти подалгебры должны совпадать с $\mathfrak{F}$. Откуда $\mathfrak{F}_1 = Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1)$, $\mathfrak{A}_1 = Z_{\mathfrak{A}}(Z_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{A}_1))$. Алгебра $\mathfrak{A}_1$ состоит из элементов, матрицы которых в регулярном представлении приводятся к диагональной форме. Совокупность матриц, перестановочных с данной системой диагональных матриц, не зависит от чисел, стоящих на диагонали этих матриц, а зависит только от их типа. Таким образом, доказано и последнее утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 16. *Пусть $\mathfrak{G}$ — расщепление разрешимой алгебры $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{H}$ — максимальная нильпотентная подалгебра $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{H}_1$ — расщепление $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$. Алгебра $\mathfrak{H}_1$ содержится в единственной максимальной нильпотентной подалгебре $\mathfrak{H}_m$ из $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{H}_m$. Если две максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{G}$ сопряжены в $\mathfrak{G}$, то их пересечения с $\mathfrak{R}$ сопряжены в $\mathfrak{R}$.*

Доказательство. По теореме 4, с точностью до сопряженности имеем $\mathfrak{H}_m = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{F}_1$, где $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Докажем, что $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{F}_1$. Пусть $a_1 \in \mathfrak{A}_1$, $a_1 + t \in \mathfrak{R}$, $t \in \mathfrak{F}$. Разложим t в сумму корневых элементов относительно $\mathfrak{A}_1$:

$$t = t_0 + t_1 + \ldots + t_s, \quad [at_i] = \rho_i(a)\, t_i,$$

где $a \in \mathfrak{A}_1$, $\rho_0(a)=0$, $\rho_j(a) \neq 0$ $(j \neq 0)$. Элементы t_j $(j \neq 0)$ входят в коммутант $\mathfrak{G}$ и, следовательно (теорема 10), в $\mathfrak{R}$. Поэтому $a_1 + t_0 \in \mathfrak{R}$. Но $[\mathfrak{A}_1 t_0]=0$, т. е. $t_0 \in Z\mathfrak{F}(\mathfrak{A}_1)$, откуда $a_1 + t_0 \in \mathfrak{H}_m$, $a_1 + t_0 \in \mathfrak{H}$, $a_1 \in \mathfrak{H}_1$.

Таким образом, $\mathfrak{A}_1$, а следовательно, и $\mathfrak{H}_m = \mathfrak{A}_1 + Z\mathfrak{F}(\mathfrak{A}_1)$ определяются алгеброй $\mathfrak{H}$ однозначно. Что касается сопряженности, то она непосредственно следует из теорем 4 и 10. Действительно, по теореме 4, две семирегулярные подалгебры $\mathfrak{G}$, сопряженные в $\mathfrak{G}$, будут сопряжены посредством некоторого элемента из коммутанта $\mathfrak{G}$. Так как коммутант $\mathfrak{G}$ входит в $\mathfrak{R}$, то сопряженность семирегулярных подалгебр в $\mathfrak{G}$ эквивалентна их сопряженности в $\mathfrak{R}$. Максимальные нильпотентные подалгебры однозначно определяются семирегулярными и поэтому их сопряженность в $\mathfrak{G}$ также эквивалентна сопряженности в $\mathfrak{R}$.

Следствие. *Картановские подалгебры произвольной алгебры Ли $\mathfrak{L}$ сопряжены в* $\mathfrak{L}$ (Weyl, Chevalley (4)).

Пусть $l \in \mathfrak{L}$—элемент, матрица которого в регулярном представлении $\mathfrak{L}$ имеет максимальное возможное число различных характеристических чисел (корней). Тогда совокупность элементов $\mathfrak{L}$, принадлежащих корню нуль относительно l, образует нильпотентную подалгебру $\mathfrak{H}_l$, называемую картановской. Беря максимальную разрешимую подалгебру $\mathfrak{R} \ni l$ из $\mathfrak{L}$, мы видим, что картановскими подалгебрами будут максимальные нильпотентные подалгебры $\mathfrak{R}$, имеющие наивысший тип, и, таким образом, образующие один класс сопряженных подалгебр.

Поступило
27. II. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Адо И. Д., О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок, Изв. КФМО, (3) 7 (1934/35), 1 – 43.
[2] Birkhoff G., Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, Ann. of Math., 38 (1937), No 2, 526 – 532.
[3] Cartan E., Les représentations linéaires des groupes de Lie, J. Math. pures appl., IX, s. 17 (1938), 1 – 12.
[4] Chevalley C., An algebraic proof of a property of Lie groups, Amer. J. of Math., 63 (1941), 785 – 793.
[5] Gantmacher F., Canonical representation of automorphisms of a semi-simple Lie group, Мат. сб., 5 (47) : 1 (1939), 101 — 146.
[6] Мальцев А. И., О полупростых подгруппах групп Ли, Известия АН, серия матем., 8 (1944), 143 – 174.
[7] Мальцев А. И., О структуре групп Ли в целом, Мат. сб. 16(58) (1945), 163—179.
[8] Морозов В. В., О нильпотентном элементе в полупростой алгебре Ли, Доклады АН, XXXVI (1942), No 3, 91 – 94.
[9] Noether E., Nachr. Gött. Ges. Wiss. (1926), 28.
[10] Weitzenböck R., Über Invarianten von linearen Gruppen, Acta Math., 58 (1932), 231.
[11] Weyl H., The classical groups, Princeton, 1939.
[12] Corput J. G. van der, Proc. Akad. van Wetensch. te Amsterdam, 34 (1931), 372 – 382.

A. MALCEV. ON SOLVABLE LIE ALGEBRAS

SUMMARY

Let $\mathfrak{L}$ be a Lie algebra over the field of complex numbers. By Levi's theorem, $L = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}$, $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{R} = 0$, where $\mathfrak{S}$ is a semi-simple subalgebra and $\mathfrak{R}$ is a maximal solvable ideal in $\mathfrak{L}$. Since all semi-simple algebras are known we have the problem to find all the algebras with the given radical. The problem was discussed in our paper ([6]), in which it was proved that for every solvable algebra $\mathfrak{R}$ there exists a finite number of algebras $\mathfrak{L}$, non-isomorphic and non-decomposable into direct sum, whose radical is $\mathfrak{R}$ and these algebras $\mathfrak{L}$ correspond in a one-to-one way to the semi-simple subalgebras of the derivation algebra of $\mathfrak{R}$. Since the semi-simple subalgebras of the Lie algebras are also known in essential, the problem of classification of arbitrary Lie algebras is thus reduced to the study of solvable algebras.

This reduction is continued in the present paper. We show that the problem of classification of solvable algebras can itself be reduced to the study of nilpotent algebras.

To every element l of a Lie algebra $\mathfrak{L}$ there corresponds a matrix L of the so-called regular representation of $\mathfrak{L}$. In case the Jordan normal form of L is of purely diagonal form L is called semi-regular matrix and l is called semi-regular element of the algebra $\mathfrak{L}$. If $L^n = 0$ (n is a positive integer), then l and L are called nilpotent.

An element $l \in \mathfrak{L}$ is called splittable if it is representable in the form $l = a + t$, where a is semi-regular and t is nilpotent. If, moreover, $[at] = 0$, then the decomposition $l = a + t$ is said to be normal. If every element of the algebra $\mathfrak{L}$ is splittable, then $\mathfrak{L}$ itself is called splittable. A subalgebra $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{L}$ is called semi-regular, if all its elements are semi-regular in $\mathfrak{L}$. We note that, in case the algebra $\mathfrak{L}$ is

solvable, the totality of its nilpotent elements forms an ideal of $\mathfrak{L}$. This ideal will be called **kernel** of $\mathfrak{L}$ and denoted by $\mathfrak{T}$.

§ 1 of this paper is devoted to the investigation of splittable solvable algebras. The following theorems summarize the main properties of such algebras.

THEOREM 2. *Every splittable element of a solvable algebra admits a normal decomposition.*

THEOREM 3. *Splittable solvable algebras admit decompositions of the form* $\mathfrak{G} = \mathfrak{A} + \mathfrak{T}$, *where* $\mathfrak{T}$ *is the kernel of* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ *is a commutative semi-regular subalgebra*, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T} = 0$. *Conversely, if a solvable algebra* $\mathfrak{G}$ *admits such a decomposition, then* $\mathfrak{G}$ *is splittable.*

THEOREM 4. *Maximal semi-regular abelian subalgebras of a splittable solvable algebra* $\mathfrak{G}$ *are conjugate. No two elements of the same semi-regular subalgebra of* $\mathfrak{G}$ *are conjugate.*

Theorem 3 and 4 can be used for constructing all the splittable solvable algebras with the given kernel $\mathfrak{T}$ and for establishing the condition of their isomorphness. For this purpose let us consider the complete group of automorphisms $\mathfrak{L}^*$ of the algebra $\mathfrak{T}$. Denote by $\mathfrak{A}$ one of the maximal commutative semi-regular subalgebras of the Lie algebra $\mathfrak{L}$ of the group $\mathfrak{L}^*$. The commutation law for the elements of $\mathfrak{A}$ being trivial, it is convenient to consider $\mathfrak{A}$ as a usual linear space. The inner automorphisms of the group $\mathfrak{L}^*$, which leave the subspace $\mathfrak{A}$ invariant, induce linear transformations in $\mathfrak{A}$. Let Θ denote the totality of these linear transformations. It is easy to prove that Θ is a finite discrete group. Consider a subspace $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$. Since the elements of $\mathfrak{A}_1$ are infinitesimal automorphisms (derivations) of the algebra $\mathfrak{T}$, we can take the semi-direct sum $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}$. Evidently, for any choice of $\mathfrak{A}_1$ the algebra $\mathfrak{G}_1$ is a splittable solvable algebra with the kernel $\mathfrak{T}$. We further have.

THEOREM 7. *Every solvable splittable algebra with the kernel* $\mathfrak{T}$ *is isomorphic to one of the algebras of the form* $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}$. *The two algebras* $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{T}$ *and* $\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{T}$ *are isomorphic if and only if* $\mathfrak{A}_1$ *can be carried into* $\mathfrak{A}_2$ *by a transformation belonging to the group* Θ.

As to examples of splittable algebras, they are furnished by Theorem 8. Let G^* be the set of non-singular matrices of the given order n, the elements x_{ij} of which satisfy a system of algebraic equations $F_\alpha(x) = 0$. Then, *if* G^* *is a group, its infinitesimal algebra* $\mathfrak{G}$ *is splittable.* Such are, for instance, the group of automorphisms of an arbitrary algebra, the group of matrices determined by its invariants, *etc.*

In § 2 we show, first of all, that every Lie algebra $\mathfrak{L}$ is contained in a splittable algebra $\mathfrak{F}$. In case $\mathfrak{F}$ possesses no splittable subalgebra containing $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{F}$ is called **splitting** of $\mathfrak{L}$. The splitting $\mathfrak{F}$ of $\mathfrak{L}$ is determined uniquely, up to equivalence. An algebra $\mathfrak{L}$ is splittable if and only if its radical $\mathfrak{R}$ is splittable. Suppose $\mathfrak{R}$ is splittable and $\mathfrak{L} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R}$ is Levi's decomposition. There exists then a normal decomposition $\mathfrak{A} + \mathfrak{T} = \mathfrak{R}$ such that $[\mathfrak{A}, \mathfrak{S}] = 0$. We show in § 3 that the exist-

ence of the decomposition $\mathfrak{L}=(\mathfrak{S}+\mathfrak{A})+\mathfrak{T}$ leads immediately to Ado's theorem on the linear representability of the algebra $\mathfrak{L}$.

Relations between algebras and their splittings are made clear by Theorems 10 and 11.

THEOREM 10. *Let $\mathfrak{G}$ be the splitting of an algebra $\mathfrak{F}$. Then every ideal of $\mathfrak{F}$ is also ideal in $\mathfrak{G}$. The commutant and the center of $\mathfrak{G}$ coincide respectively with those of $\mathfrak{F}$.*

THEOREM 11. *Suppose $\mathfrak{G}$ is a splittable solvable algebra, $\mathfrak{Z}$ is the center of $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}=[\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}+\mathfrak{T}$, where $\mathfrak{T}$ is the kernel of $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ is a semi-regular abelian subalgebra, $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{T}=0$. A necessary and sufficient condition that $\mathfrak{G}$ should be the splitting of a subalgebra $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{G}$ is that $\mathfrak{G}\supset\mathfrak{F}\supset\mathfrak{K}$, $\mathfrak{F}\supset\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{F}+\mathfrak{A}=\mathfrak{F}+\mathfrak{T}$.*

The latter theorem enables us to construct solvable algebras $\mathfrak{F}$ with the given splitting $\mathfrak{G}$ in the same way as for the case of splittable algebras. Consider the linear space $\mathcal{E}=\mathfrak{G}/(\mathfrak{K}+\mathfrak{Z})$. The images of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{T}$ give the subspaces $\mathfrak{A}'$ and $\mathfrak{T}'$ is $\mathcal{E}$. With the use of the group of automorphisms of $\mathfrak{T}$ it is possible to determine a group Θ of linear transformations of the space $\mathcal{E}$. The group Θ, although analogous to the corresponding group in Theorem 7, may, however, be a topological group. Θ necessarily consists of a finite number of components and the Lie algebra of Θ is nilpotent. Further properties of Θ are given by.

THEOREM 12. *To every subspace $\mathcal{E}_1\subset\mathcal{E}$ with the property $\mathcal{E}_1+\mathfrak{A}'= =\mathcal{E}_1+\mathfrak{T}'=\mathcal{E}$ there corresponds a solvable algebra, whose splitting is isomorphic to $\mathfrak{G}$. All the algebras with the splitting $\mathfrak{G}$ can be obtained in this way. The algebras corresponding to the spaces $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}_2$ are isomorphic if and only if $\mathcal{E}_1$ can be transformed into $\mathcal{E}_2$ by a transformation belonging to Θ.*

In § 3 some applications of the above theory are indicated. One of them, Ado's theorem, was already mentioned. Another application concerns the theory of invariants of linear groups. The so called fundamental problem of the Theory of Invariants is here reduced to the case of nilpotent groups by a more direct method than those, which have been used before ([9]). Finally, the third application is the determination of the maximal nilpotent subalgebras of arbitrary Lie algebras. The problem is obviously reduced to the determination of the maximal nilpotent subalgebras of solvable algebras.

Let $\mathfrak{G}$ be a solvable Lie algebra. We choose a basis in $\mathfrak{G}$ such that the matrices of the regular representation of $\mathfrak{G}$ be triangle matrices. Take any two elements g, h of $\mathfrak{G}$ and consider their matrices G, H in the regular representation. Let $g_1, \ldots, g_r$ $(h_1, \ldots, h_r)$ be diagonal elements of G (respectively of H). We say tbat the type of g is greater than or equal to the type of h, if $h_i \neq h_j$ implies $g_i \neq g_j$ $(i, j=1, 2, \ldots, r)$. In virtue of this definition, all the elements of $\mathfrak{G}$ are divided into the classes of elements of the same type. It is evident that the set of types is finite and partially ordered. Take a type α and choose an element g_α of this type. Consider the set of elements of the algebra $\mathfrak{G}$ that

commute with g_α. This set is a solvable subalgebra and its kernel is, evidently, a nilpotent subalgebra $\mathfrak{T}(g_\alpha)$ in $\mathfrak{G}$. We call $\mathfrak{T}(g_\alpha)$ *nilpotent subalgebra of type* α. It is easy to prove that all the nilpotent subalgebras of the same type are conjugate, everyone of them is a maximal nilpotent subalgebra of $\mathfrak{G}$ and all the maximal nilpotent subalgebras of $\mathfrak{G}$ can be obtained in this way. In particular, all the subalgebras of the lowest type coincide with the kernel of $\mathfrak{G}$. Maximal nilpotent subalgebras of the highest type are the called Cartan subalgebras. Their conjugateness was proved earlier by C. Chevalley (4).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 357–362 Série mathématique

Д. И. ШЕРМАН

О ПРИВЕДЕНИИ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье указываются формы представления гармонической функции, позволяющие свести непосредственно к интегральному уравнению Фредгольма некоторые граничные задачи теории потенциала.

1. Предположим, что в плоскости xy задана конечная односвязная область S, ограниченная кривой L, имеющей непрерывную кривизну. Обход L будем считать происходящим против движения часовой стрелки, при этом за положительное направление нормали n к ней примем направление изнутри вовне.

Как известно, общая задача теории потенциала заключается в определении функции $u(x, y)$, гармонической в области S и удовлетворяющей равенству

$$a(s)\frac{\partial u}{\partial x}+b(s)\frac{\partial u}{\partial y}+c(s)\,u=f(s) \tag{1}$$

на L, где $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ и $f(s)$ — некоторые заданные функции дуги s.

Будем считать, что каждая из первых трех функций удовлетворяет условию Липшица. Кроме того, допустим, что две из них $a(s)$ и $b(s)$ не обращаются одновременно в нуль. Относительно функции $f(s)$ предположим, что она непрерывна на L.

Используя общеизвестный прием, можно эту задачу сначала свести к сингулярному интегральному уравнению и затем, регуляризуя последнее, получить уравнение Фредгольма. Однако такой путь кажется нам мало удобным, так как он, вообще говоря, приводит к уравнению Фредгольма, не эквивалентному условию (1).

Покажем, каким образом эта же задача может быть непосредственно сведена к уравнению Фредгольма, так что всякое решение его, если таковое существует, дает решение задачи.

Неизвестную функцию $u(x, y)$ будем искать в виде

$$u(x, y)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\nu\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{p}e^{\frac{cz}{p}}\left\{\ln z+\int\limits_{0}^{c}\frac{e^{-\frac{\alpha z}{p}}-e^{-\frac{\alpha}{p}}}{\alpha}\,d\alpha\right\}\right]ds, \tag{2}$$

где ν — новая неизвестная функция дуги s, подлежащая определению, и введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} z = -\{(x, \xi)\cos(n, \xi) + (y-\eta)\cos(n, \eta)\} - \\ -i\{(x-\xi)\cos(n, \eta) - (y-\eta)\cos(n, \xi)\}, \\ p = \{a\cos(n, \xi) + b\cos(n, \eta)\} - i\{b\cos(n, \xi) - a\cos(n, \eta)\}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

причем $M(\xi, \eta)$ и $M(x, y)$ — точки, лежащие соответственно на L и в области S. Символ Re как обычно, указывает, что берется вещественная часть рядом стоящего выражения.

Как нетрудно проверить, функция $u(x, y)$, определяемая формулой (2), будет гармонической в области S.

Вычислив частные производные от функции $u(x, y)$ по координатам x и y, перейдем, затем, в ней и в последних к пределу, устремляя $M(x, y)$ к некоторой точке $M(\xi_0, \eta_0)$ кривой L. Тогда, подставив полученные для них выражения в равенство (1), получим после несложных преобразований следующее уравнение Фредгольма для определения плотности ν (s_0 — значение дуги в точке $M(\xi_0, \eta_0)$):

$$\nu(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \nu(s) K(s, s_0)\, ds = f(s_0). \quad (4)$$

Здесь ядро $K(s, s_0)$ — ограниченная и абсолютно интегрируемая функция, равная

$$K(s, s_0) =$$

$$= \frac{\partial \ln r_0}{\partial n} - \operatorname{Re}\left[g(s, s_0)\, e^{\frac{c(s)\, z(s, s_0)}{p(s)}} \left\{ \ln z(s, s_0) + \int_0^c \frac{e^{\frac{-\alpha z(s, s_0)}{p(s)}} - e^{-\frac{\alpha}{p(s)}}}{\alpha}\, d\alpha \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{\{a(s_0) - a(s)\}\{\cos(n, \xi) + i\cos(n, \eta)\} + \{b(s_0) - b(s)\}\{\cos(n, \eta) - i\cos(n, \xi)\}}{p(s)\, z(s, s_0)} \right], \quad (5)$$

где $z(s, s_0)$ — значение z в точке $M(\xi_0, \eta_0)$, $r_0 = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}$ и, кроме того, положено

$$g(s, s_0) = \frac{1}{p^2(s)}\left[p(s)\{c(s_0) - c(s)\} - \right.$$

$$- c(s)\{a(s_0) - a(s)\}\{\cos(n, \xi) + i\cos(n, \eta)\} -$$

$$\left. - c(s)\{b(s_0) - b(s)\}\{\cos(n, \eta) - i\cos(n, \xi)\}\right]. \quad (6)$$

Вопрос о представимости искомой функции в форме (2) и разрешимости уравнения (4) требует особого рассмотрения в каждом отдельном случае.

Примечание 1. В частном случае, когда $a(s) = \cos(n, x)$, $b(s) = \cos(n, y)$ и $c(s) = 0$, правая часть формулы (2) принимает вид потенциала простого слоя и уравнение (4) будет, очевидно, совпадать с тем, которое мы имеем при решении задачи Неймана.

Примечание 2. Допустим, что коэффициенты $a(s)$, $b(s)$ и $c(s)$ — некоторые постоянные числа. При этом, как легко видеть, уравнение (4) значительно упрощается и принимает вид

$$\nu(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \nu(s)\frac{\partial \ln r_0}{\partial n}\, ds = f(s_0).$$

Небезынтересно отметить, что в этом случае оно совпадает с интегральным уравнением, к которому приводится задача Дирихле, если ее решать с помощью потенциала двойного слоя.

Примечание 3. Рассмотрим теперь случай, когда коэффициенты $a(s)$ и $b(s)$ любые, а $c(s)=0$. Тогда, опуская в (2) некоторый функционал, будем иметь:

$$u(x, y)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu \frac{\{a\cos(n, \eta)-b\cos(n, \xi)\}\operatorname{arc\,tg}\frac{y-\eta}{x-\xi}-\{a\cos(n, \xi)+b\cos(n, \eta)\}\ln r}{a^2+b^2}\,ds, \quad (7)$$

где $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ и уравнение (4) запишется в виде

$$\nu(s_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu(s)\left\{\frac{a(s)a(s_0)+b(s)b(s_0)}{a^2(s)+b^2(s)}\frac{\partial \ln r_0}{\partial n}+\right.$$
$$\left.+\frac{a(s)b(s_0)-a(s_0)b(s)}{a^2(s)+b^2(s)}\frac{\partial \ln r_0}{\partial s}\right\}ds=f(s). \quad (8)$$

Примечание 4. Отметим, что, взяв при граничном условии (1) функцию $u(x, y)$ в виде (7), мы для определения плотности ν, очевидно, также получим интегральное уравнение Фредгольма.

Примечание 5. Наконец, пусть область S многосвязная и ее полная граница L состоит из $m+1$ кривых L_j $(j=1, \ldots, m+1)$, из которых L_{m+1} является внешней границей области, содержащей внутри себя остальные внутренние границы L_j $(j=1, \ldots, m)$. Обход L, попрежнему будем считать происходящим в положительном направлении относительно области S и нормаль — направленной изнутри вовне. В этом случае искомую (однозначную) функцию $u(x, y)$ следует искать в виде

$$u(x, y)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_L \nu \operatorname{Re}\left[\frac{1}{p}e^{\frac{cz}{p}}\left\{\ln z+\int\limits_0^c \frac{e^{-\frac{\alpha z}{p}}-e^{-\frac{\alpha}{p}}}{\alpha}d\alpha\right\}\right]ds+$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{L_j}\nu \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{p}e^{\frac{cz}{p}}\ln z_j\right\}ds,$$

где

$$z_j=-\{(x-x_j)\cos(n, \xi)+(y-y_j)\cos(n, \eta)\}-$$
$$-i\{(x-x_j)\cos(n, \eta)-(y-y_j)\cos(n, \xi)\} \quad (j=1, \ldots, m)$$

и $M_j(x_j, y_j)$ — некоторые произвольно фиксированные точки, лежащие внутри соответственных кривых L_j $(j=1, \ldots, m)$.

2. Рассмотрим кратко более сложный случай, когда граничное условие (1) содержит производные от искомой функции до некоторого порядка m и имеет вид

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}=f(s) \quad (9)$$

на L, где коэффициенты a_{kj} — некоторые заданные функции дуги s,

удовлетворяющие условию Липшица. При этом будем считать, что выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=0}^{m} i^k a_{mk}\right| > 0. \qquad (10)$$

Положим теперь

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_L \nu(s) F(s;\ x, y)\, ds, \qquad (11)$$

где *

$$F = \operatorname{Re}\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z}}{\omega(\alpha)}\, d\alpha \qquad (12)$$

и

$$\omega(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} \alpha^k \{\cos(n, \xi) + i\cos(n, \eta)\}^k \sum_{j=0}^{k} (-i)^j a_{kj}. \qquad (13)$$

Для простоты предположим, что функция $\omega(\alpha)$ ** не имеет вещественных корней.

Интеграл в (12) имеет смысл только при

$$(x-\xi)\cos(n, \xi) + (y-\eta)\cos(n, \eta) < 0.$$

Последнее же условие выполняется для всех точек $M(x, y)$ области S, если ограничивающая ее кривая L выпуклая. Однако нетрудно показать, что в том случае, когда кривая L не выпуклая, функция F может быть все же продолжена и будет сохранять смысл вместе со своими производными для всех $M(x, y)$ области S, не лежащих на L. Для этого запишем (12) в виде

$$F = \operatorname{Re}\int_0^A \frac{e^{-\alpha z}}{\omega(\alpha)}\, d\alpha + \operatorname{Re}\int_A^\infty \frac{e^{-\alpha z}}{\omega(\alpha)}\, d\alpha,$$

где A — некоторое фиксированное достаточно большое число.

---

* Легко видеть, что функция F дает решение нашей задачи для полуплоскости, ограниченной прямой, касающейся L в точке $M(\xi, \eta)$, при $f(s) = \pi$ в $M(\xi, \eta)$, и равна 0 в других точках прямой.

** При некоторых соотношениях между коэффициентами a_{kj} функция $\omega(\alpha)$ может, вообще говоря, иметь вещественные корни.

Если, например, $\omega(\alpha)$ имеет один простой вещественный корень α_1, то можно придать смысл выражению (12), взяв в подъинтегральной функции числитель равным $e^{-\alpha z} - e^{-\alpha_1 z}$. Если же этот корень будет (наивысшей) кратности m, то указанный числитель нужно взять в виде

$$e^{-\alpha z} - e^{-\alpha_1 z}\left\{\sum_{k=0}^{m-2} (-1)^k \frac{(\alpha-\alpha_1)^k z^k}{k!} + \frac{(-1)^{m-1}(1+\alpha_1)(\alpha-\alpha_1)^{m-1} z^{m-1}}{(m-1)!\,(1+\alpha)}\right\}.$$

Легко указать, как следует его изменить в других случаях.

Отметим, что если корни α_j функции $\omega(\alpha)$ не зависят от S и являются постоянными числами, то удобнее понимать интеграл (12) в смысле главного значения по Коши (если корни простые), или же (если они кратные), выделив их полуокружностями малых радиусов ε (лежащими в верхней полуплоскости α), заменит последними при интегрировании отрезки $(\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j + \varepsilon)$.

В том случае, когда коэффициенты a_{kj} $(k, j = 0, 1, \ldots, m)$ — постоянные величины и $\omega(\alpha)$ имеет корни α_j кратности k_j $(j = 1, \ldots, n \leqslant m)$, функции $z^k e^{\alpha_j z}$ $(k = 0, 1, \ldots, k_j - 1)$ будут, очевидно, решениями однородной задачи (при $f(s) = 0$).

Первое слагаемое в правой части последнего равенства сохраняет смысл при всех конечных значениях x и y. Второе же слагаемое, которое обозначим через I, может быть после несложных преобразований представлено в форме

$$I=\frac{1}{\chi(s)}\sum_{k=0}^{\infty} b_k\left[\frac{(-1)^{k+m}z^{k+m-1}}{(k+m-1)!}\left\{\ln z+\int_0^A\frac{e^{-\alpha z}-e^{-\alpha}}{\alpha}d\alpha-\int_A^\infty\frac{e^{-\alpha}}{\alpha}d\alpha\right\}+\right.$$

$$\left.+e^{-Az}\sum_{n=0}^{k+m-2}\frac{(-1)^n}{(k+m-n-1)\cdots(k+m-1)}\frac{z^n}{A^{k+m-n-1}}\right],$$

где

$$\chi(s)=\{\cos(n,\ \xi)+i\cos(n,\ \eta)\}^m\sum_{j=0}^{m}(-i)^j a_{mj}$$

и b_k — некоторые коэффициенты, не зависящие от x и y (из них $b_0=1$). Отсюда вытекает справедливость сказанного.

Подставив выражение для $u(x,\ y)$ из формулы (11) в (9), получим для определения ν уравнение вида (4), в котором ядро

$$K(s,\ s_0)=\frac{\partial\ln r_0}{\partial n}+\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\{a_{kj}(s_0)-a_{kj}(s)\}\left(\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-j}\partial y^j}\right)_{\substack{x=\xi_0\\ y=\eta_0}},$$

как нетрудно усмотреть из предшествующего равенства, ограничено и абсолютно интегрируемо.

Примечание 1. Если коэффициенты a_{kj} в равенстве (9) постоянные числа, то, как и в предыдущем параграфе, уравнение (4) будет совпадать с тем, к которому приводится задача Дирихле.

В частном случае, когда S — круг радиуса R, будем иметь

$$\nu(s_0)+\frac{1}{2\pi R}\int_L\nu(s)\,ds=f(s_0),$$

откуда

$$\nu(s_0)=f(s_0)-\frac{1}{4\pi R}\int_L f(s)\,ds.$$

Подставив значение $\nu(s)$ из последней формулы в равенство (11), получим в этом случае решение нашей задачи.

Примечание 2. В соответствии со сказанным выше относительно формулы (7) отметим, что нашу задачу при условии (9) можно также непосредственно свести к уравнению Фредгольма, если функцию F взять равной

$$F=\mathrm{Re}\,\frac{1}{\chi(s)}\int_0^\infty\frac{e^{-\alpha z}-\sum\limits_{k=0}^{m-2}(-1)^k\frac{\alpha^k z^k}{k!}-(-1)^{m-1}\frac{\alpha^{m-1}z^{m-1}}{(m-1)!\,(1+\alpha)}}{\alpha^m}\,d\alpha.$$

Вычислив интеграл, содержащийся в правой части этой формулы, и отбросив некоторый полином от z степени $m-1$, будем иметь:

$$F = -\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\operatorname{Re}\frac{z^{m-1}\ln z}{\chi(s)}$$

Примечание 3. Выражение (11) может быть преобразовано к виду, подобному (2). Имеем

$$\omega(\alpha) = \chi(s)\prod_{j=1}^{m}(\alpha+\alpha_j),$$

где α_j — некоторые комплексные выражения. Будем считать их отличными друг от друга. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z}}{\omega(\alpha)}d\alpha = \frac{1}{\chi(s)}\sum_{j=1}^{m}\omega_j\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha z}}{\alpha+\alpha_j}d\alpha.$$

Преобразуя очевидным образом каждый из интегралов, заключающихся в фигурных скобках, и отбросив некоторые слагаемые, найдем, возвращаясь к (10):

$$u(x, y) = -\frac{1}{\pi}\int_L \nu\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\chi(s)}\sum_{j=1}^{m}\omega_j e^{\alpha_j z}\left\{\ln z + \int_0^{\alpha_j}\frac{e^{-\alpha z}-e^{-\alpha}}{\alpha}d\alpha\right\}\right]ds.$$

Легко выписать аналогичную формулу для случая многосвязной области S.

Институт механики Академии наук СССР

Поступило 5. III. 1945

D. SHERMAN. ON THE REDUCTION OF THE PLANE PROBLEM OF THE TREORY OF POTENTIAL TO AN INTEGRAL EQUATION

SUMMARY

In this paper the author discusses the problem to determine the function $u(x, y)$ harmonic within a finite (simply- or multi-connected) domain S in the z-plane ($z = x + iy$), whose boundary L consists of a finite number of closed curves of continuous curvature. The following relation is given on L:

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j}\partial y^j} = f(s),$$

where $a_{kj}(s)$ and $f(s)$ are given functions of the length of arc; a_{kj} satisfy Hölder's condition, f is continuous. By a method of ours the problem is reduced to Fredholm's equation.

The method is applicable to the case, where some unknown harmonic (in S) functions are subject to certain relations on L.

We also establish some properties possessed by the unknown functions represented in a suitable form.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 363—370 Série mathématique

Д. И. ШЕРМАН

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье указывается прием, позволяющий непосредственно свести к интегральному уравнению Фредгольма некоторые задачи математической физики.

1. Предположим, что в плоскости xy задана конечная односвязная область S, ограниченная кривой L, имеющей непрерывную кривизну. Обход L будем считать совершающимся против движения часовой стрелки и за положительное направление нормали n к ней примем направление изнутри вовне.

Одна из важных задач теории колебаний заключается в определении функции $u(x, y)$, непрерывной в области S вместе со своими частными производными до второго порядка, удовлетворяющей в ней дифференциальному уравнению

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \tag{1}$$

и предельному равенству на L

$$k(s)\, u + m(s) \frac{\partial u}{\partial x} + n(s) \frac{\partial u}{\partial y} = f(s), \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа, λ — некоторое вещественное число, коэффициенты $k(s)$, $m(s)$, $n(s)$ и свободный член $f(s)$ — заданные функции дуги s кривой L.

Предположим, что каждая из функций $k(s)$, $m(s)$ и $n(s)$ удовлетворяет условию Липшица, и, кроме того, имеет место неравенство $m^2(s) + n^2(s) > 0$ во всех точках L (если $m(s)$ и $n(s)$ не обращаются на ней тождественно в нуль). Функцию же $f(s)$ будем считать непрерывной на L.

Взяв искомую функцию $u(x, y)$ в виде потенциала простого слоя с неизвестной плотностью, мы сведем задачу и сингулярному интегральному уравнению и затем, регуляризуя его по методу Гильберта, получим уравнение Фредгольма. Однако последнее уравнение, вообще говоря, не будет эквивалентно (2), и это обстоятельство в значительной степени затрудняет его использование.

Покажем, каким образом эта же задача может быть непосредственно сведена к уравнению Фредгольма, любое решение которого в том случае, когда таковое существует, приводит к решению задачи.

Будем искать функцию $u(x, y)$ в следующем виде:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_L \nu(s) F(s; x, y)\, ds \tag{3}$$

и

$$F(s; x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\varphi(\alpha)}}{\omega(\alpha)}\, d\alpha, \tag{4}$$

где ν — новая неизвестная функция дуги s, подлежащая определению, и введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= i\{b(x-\xi) - a(y-\eta)\}\alpha + \{a(x-\xi) + b(y-\eta)\}\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}, \\ \omega(\alpha) &= k + i(mb - na)\alpha + (ma+nb)\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}, \\ a &= \cos(n, \xi), \quad b = \cos(n, \eta), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

причем под величинами x, y и ξ, η следует понимать координаты точек, принадлежащих соответственно области S и кривой L. Радикал $\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}$ условимся считать положительным при $|\alpha| > \lambda$ и положительно мнимым при $|\alpha| < \lambda$.

Для простоты допустим, что функции $mb - na$ и k нигде на L не обращаются в нуль. В этом случае функция $\omega(\alpha)$ не будет иметь вещественных корней *.

* При значении s, обращающем $k(s)$ в нуль, функция $\omega(\alpha)$ будет иметь вещественный корень

$$\alpha_1 = \pm \frac{|\lambda(ma+nb)|}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

где знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, будут ли $mb - na$ и $ma + nb$ (при указанном s) соответственно одинакового или противоположного знаков.

Если же при некотором s выражение $mb - na$ обращается в нуль, то $\omega(\alpha)$ будет иметь два вещественных корня

$$\alpha_{1,2} = \pm \frac{(ma+nb)\sqrt{k^2+\lambda^2(m^2+n^2)}}{m^2+n^2},$$

или не будет иметь ни одного корня, смотря по тому, будут ли при этом k и $ma + nb$ разного или одинакового знаков.

Пусть, для определенности, $\omega(\alpha)$ имеет два вещественных корня $\alpha_{1,2}$. Тогда, чтобы придать смысл интегралу (4), нужно числитель его подъинтегральной функции взять, например, равным

$$\exp\varphi(\alpha) - \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha+\alpha_0)^2}\left\{(\alpha_1+\alpha_0)^2(\alpha-\alpha_2)\exp\varphi(\alpha_1) - (\alpha_2+\alpha_0)^2(\alpha-\alpha_1)\exp\varphi(\alpha_2)\right\},$$

где α_0 — любое фиксированное комплексное число.

В том случае, когда $\alpha_{1,2}$ — постоянные величины (не зависящие от s), удобнее интеграл (4) понимать в смысле главного значения по Коши.

Наконец, отметим, что функция $e^{\varphi(\alpha_j)}$ $(j = 1, 2)$, если коэффициенты k, m и n — некоторые постоянные, будут частными решениями соответствующей однородной задачи (при $f(s) = 0$).

Интеграл (4) имеет смысл лишь при

$$a(x-\xi)+b(y-\eta)<0. \tag{6}$$

Последнее же условие выполняется для всех точек $M(x, y)$ области S, если кривая L выпуклая. Очевидно, в этом случае функция $u(x, y)$, определяемая формулой (3), будет удовлетворять уравнению (1).

Для того, чтобы установить характер особенности, которую имеет функция F, когда точка $M(x, y)$ лежит на L, преобразуем равенство (4) к другому виду. Положим

$$F(s; x, y)=\int_{-A}^{A}\frac{e^{\varphi(\alpha)}}{\omega(\alpha)}\,d\alpha+2\,\mathrm{Re}\int_{A}^{\infty}\frac{e^{\varphi(\alpha)}}{\omega(\alpha)}\,d\alpha, \tag{7}$$

где A — некоторое фиксированное достаточно большое положительное число и символ Re, как обычно, указывает, что берется вещественная часть рядом стоящего выражения.

Первое слагаемое в правой части равенства (7) остается, очевидно, непрерывным вместе со своими частными производными при стремлении $M(x, y)$ к L.

Далее, при $\alpha\geqslant A$

$$\frac{e^{\{a(x-\xi)+b(y-\eta)\}\{\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}-\alpha\}}}{\omega(\alpha)}=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\frac{1}{\alpha^j},$$

где коэффициенты c_j — некоторые функции дуги s и координат x и y. Первый из них

$$c_1=\frac{1}{(ma+nb)+i(mb-na)} \tag{8}$$

Отсюда, полагая

$$z=-\{a(x-\xi)+b(y-\eta)\}-i\{b(x-\xi)-a(y-\eta)\} \tag{9}$$

и принимая во внимание равенство

$$\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha z}-e^{-\alpha}}{\alpha}\,d\alpha=-\ln z,$$

после несложных преобразований получим

$$\int_{A}^{\infty}\frac{e^{\varphi(\alpha)}}{\omega(\alpha)}\,d\alpha=-\frac{1}{(ma+nb)+i(mb-na)}\ln z+\ldots \tag{10}$$

Здесь многоточие обозначает функцию, непрерывную на кривой L с абсолютно интегрируемыми на ней частными производными первого порядка.

Возвращаясь снова к (7), получим требуемое выражение для F.

Вычислим частные производные первого порядка от функции $u(x, y)$, пользуясь формулой (2) и, затем, перейдем в них и в $u(x, y)$ к пределу, устремляя $M(x, y)$ к некоторой точке $M(\xi_0, \eta_0)$ кривой L. Полученные предельные выражения для u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ подставим в граничное равенство (2). Тогда для определения плотности ν получим следующее уравнение Фредгольма (s_0 — значение дуги в точке $M(\xi_0, \eta_0)$):

$$\nu(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_L \nu(s) K(s, s_0)\, ds = f(s_0), \tag{11}$$

где ядро $K(s, s_0)$ может быть представлено в форме*

$$K(s, s_0) = i\, \frac{dH_0^{(2)}(\lambda r_0)}{dn} +$$

$$+ \left[\{k(s_0) - k(s)\} F + \{m(s_0) - m(s)\} \frac{\partial F}{\partial x} + \{n(s_0) - n(s)\} \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{\substack{x=\xi_0 \\ y=\eta_0}},$$

при этом $H_0^{(2)}(\lambda r_0)$ — функция Ханкеля, n — нормаль к L** в $M(\xi, \eta)$ и $r_0 = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}$. Как нетрудно усмотреть из равенства (10), оно ограничено и абсолютно интегрируемо.

---

* Разобьем интеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\varphi(\alpha)}}{\sqrt{\alpha^2 - \lambda^2}}$ на четыре интеграла соответственно в пределах от $-\infty$ до $-k$, от $-k$ до 0, далее, от 0 до k и, наконец, от k до ∞, обозначив их (в указанной последовательности) через I_j ($j = 1, \ldots, 4$). Затем, полагая

$$b(x - \xi) - a(y - \eta) = r\cos\theta, \qquad a(x - \xi) + b(y - \eta) = r\sin\theta,$$

введем в каждом из них вместо α новую переменную интегрирования t согласно формулам $\alpha = -\lambda \operatorname{ch}(t + i\theta)$ в I_j ($j = 1, 2$) и $\alpha = \lambda \operatorname{ch}\{t - i(\pi - \theta)\}$ в двух остальных интегралах. После этого, на основании теоремы Коши, получим

$$I = 2 \int_0^{\infty} e^{-i\lambda r \operatorname{ch} t}\, dt = -\pi i H_0^{(2)}(\lambda r).$$

Отсюда легко найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varphi(\alpha)}\, d\alpha = \pi i\, \frac{dH_0^{(2)}(\lambda r)}{dn}.$$

** Смешение с коэффициентом $n(s)$ здесь невозможно.

Вопрос о разрешимости уравнения (11) требует дополнительного исследования в каждом отдельном случае.

Отметим, что если кривая L не выпуклая, то функция F может быть все же «продолжена» и будет сохранять смысл для точек $M(x, y)$ области S, не удовлетворяющих условию (6). В этом случае задача также может быть непосредственно сведена к уравнению Фредгольма.

Примечание 1. Полагая в (2) $k(s)=1$, $m(s)=n(s)=0$, будем иметь задачу Дирихле. При этом уравнения (3) и (11) упрощаются и, как следовало ожидать, принимают соответственно вид

$$u(x,y)=\frac{i}{2}\int\limits_L \nu \frac{dH_0^{(2)}(\lambda r)}{dn}\,ds \tag{12}$$

и

$$\nu(s_0)+\frac{i}{2}\int\limits_L \nu \frac{dH_0^{(2)}(\lambda r_0)}{dn}\,ds=f(s_0). \tag{13}$$

Примечание 2. При $k(s)=0$, $m(s)=\cos(n, x)$ и $n(s)=\cos(n, y)$ имеем задачу Наймана. Уравнения (3) и (11) здесь также будут иметь обычный для этой задачи вид:

$$u(x, y)=-\frac{i}{2}\int\limits_L \nu H_0^{(2)}(\lambda r)\,ds \tag{14}$$

и

$$\nu(s_0)-\frac{i}{2}\int\limits_L \nu(s)\frac{dH_0^{(2)}(\lambda r_0)}{dn_0}\,ds=f(s_0) \tag{15}$$

Примечание 3. Пусть теперь коэффициенты $k(s)$, $m(s)$ и $n(s)$ — некоторые постоянные величины. Тогда, как легко видеть, уравнение (11) будет совпадать с (13).

Таким образом, в этом случае мы получаем для определения ν такое же интегральное уравнение, как в задаче Дирихле.

2. Рассмотрим кратко случай, когда граничное условие (2) содержит производные от искомой функции до порядка m и имеет вид

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s)\,\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j}\partial y^j}=f(s), \tag{16}$$

где $a_{kj}(s)$ и $f(s)$ — некоторые заданные функции. Как выше, предположим, что $a_{kj}(s)$ удовлетворяют условию Липшица, а $f(s)$ непрерывна на L. Кроме того, будем считать

$$\left|\sum_{k=0}^{m}(i)^k a_{mk}\right|>0.$$

Искомое решение будем и здесь искать в форме (3) и (4), взяв функцию $\omega(\alpha)$ равной

$$\omega(\alpha)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}a_{kj}\left(ib\alpha+a\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}\right)^{k-j}\left(-ia\alpha+b\sqrt{\alpha^2-\lambda^2}\right)^{j} \quad (17),$$

и предположив, для простоты, что она не имеет вещественных корней *.

Преобразуя F, как и в предыдущем случае, получим вместо (10) следующее равенство:

$$\int_{A}^{\infty}\frac{e^{\varphi(\alpha)}}{\omega(\alpha)}\,d\alpha=\frac{(-1)^m z^{m-1}\ln z}{(m-1)!\,(a+ib)^m\sum\limits_{k=0}^{m}(-i)^k a_{mk}}+\cdots, \quad (18)$$

где многоточие обозначает функцию, непрерывную на L и имеющую на ней абсолютно интегрируемые производные до m-го порядка (включительно).

Имея это в виду, получим для определения плотности ν уравнение (11) с ограниченным и абсолютно интегрируемым ядром

$$K(s,s_0)=i\frac{dH_0^{(2)}(\lambda r_0)}{dn}+$$
$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\{a_{kj}(s_0)-a_{kj}(s)\}\left(\frac{\partial^k F}{\partial x^{k-j}\,\partial y^j}\right)_{\substack{x=\xi_0\\ y=\eta_0}}$$

Примечание 1. Если коффициенты $a_{kj}\,(k,j=0,1,\ldots,m)$ — постоянные величины, то уравнение (11) (как и прежде в аналогичном случае) будет совпадать с (13).

В частном случае, когда S — круг радиуса R, уравнение (13) принимает вид

$$\nu(R\theta_0)+\frac{i\lambda}{4}\int_{0}^{2\pi}\nu(R\theta)\,H_0^{(2)}(\lambda r_0)\,r_0\,d\theta=f(R\theta_0),$$

где θ и θ_0 — полярные углы, соответствующие дугам s и s_0.

Полагая

$$\nu(R\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n^{(1)}\cos n\theta+a_n^{(2)}\sin n\theta\right),$$

$$\frac{i\lambda}{4}H_0^{(2)}(\lambda r_0)\,r_0=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\cos n(\theta-\theta_0),$$

$$f(R\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n^{(1)}\cos n\theta+c_n^{(2)}\sin n\theta\right),$$

---

* Если $\omega(\alpha)$ имеет вещественные корни, то, чтобы придать смысл интегралу (4), следует поступить аналогично тому, как указано выше.

где $a_0^{(2)}=c_0^{(2)}=0$, будем иметь

$$a_n^{(1)}=\frac{c_n^{(1)}}{1+\pi b_n}, \quad a_n^{(2)}=\frac{c_n^{(2)}}{1+\pi b_n} \quad (n=0, 1, \ldots, \infty).$$

При этом $1+\pi b_n \neq 0$, если λ не является характеристическим числом внутренней задачи Дирихле для круга. Допуская последнее и подставив найденное значение для ν в формулу (3), получим решение нашей задачи для круга.

Примечание 2. К тем же результатам можно притти и в том случае, когда требуется определить функции $u_j(x, y)$ $(j=1, \ldots, n)$, каждая из которых удовлетворяет в области S уравнению (1) при следующих условиях на L:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k_1=0}^{m}\sum_{j_1=0}^{k_1} a_{k_1 j_1}^{kj} \frac{\partial^{k_1} u_j}{\partial x^{k_1-j_1}\,\partial y^{j_1}}=f_k \quad (k=1, \ldots, n),$$

где $a_{k_1 j_1}^{kj}$ и f_k — заданные функции дуги s. Относительно них следует сделать предположения, аналогичные указанным выше.

Институт механики
Академии Наук СССР

Поступило
2. VI. 1945

D. SHERMAN. ON SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF STATIONARY OSCILLATIONS

SUMMARY

Given a finite simply-connected domain S in the z-plane $(z = x + iy)$ bounded by a curve L of continuous curvature. It is required to find a function $u(x, y)$ satisfying the differential equation

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0$$

within S and a boundary equality on L:

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial y^j} = f(s),$$

where a_{kj} and f are given functions of the length of arc on L. The functions a_{ij} are supposed to satisfy Hölder's condition, while f is continuous on L. By means of the method developed in the paper the problem is reduced to a Fredholm integral equation.

We also establish some properties of the solution, which is represented in the form suitable for our purposes.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 371—386 Série mathématique

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе развивается общий метод исследования поверхностей в симметрических пространствах с помощью представления этих пространств в виде поверхностей вращения в эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве. С помощью полученных результатов для симметрических пространств с полупростой основной группой находится система дифференциальных форм, определяющих поверхность в симметрическом пространстве с точностью до группового преобразования. Теория применяется к многообразиям плоскостей, сфер и квадрик.

1. Теория конгруэнций и комплексов прямых и плоскостей, сфер и квадрик — все это частные случаи теории поверхностей в симметрических пространствах. Настоящая работа посвящена развитию общего метода такой теории.

Такая общая теория приводится к решению следующей задачи: дано многообразие M с транзитивной группой $\mathfrak{G}$; требуется погрузить M в эвклидово или псевдоэвклидово (с неопределенной метрикой) пространство E достаточно высокой размерности так, чтобы:

1° всякое преобразование группы $\mathfrak{G}$ на многообразии M могло быть продолжено до вращения пространства E,

2° всякое вращение E, переводящее M в себя, индуцировало в M одно из преобразований $\mathfrak{G}$.

Погружение, удовлетворяющее одному условию 1°, мы будем называть *односторонним представлением* многообразия M в виде транзитивной поверхности вращения в E; погружение, удовлетворяющее обоим условиям 1° и 2°, мы будем называть *двусторонним представлением*.

Эта задача, будучи частным случаем общей задачи о погружении одного однородного пространства в другое, интересует нас, если иметь в виду нашу конечную цель — геометрические теории, только в том специальном случае, когда многообразие M — *симметрическое пространство*. Возможность решения такой специальной задачи непосредственно вытекает еще из картановских исследований симметрических пространств, но такое решение и, что особенно важно, геометрические выводы из него, производились не во всей геометрической общности этой задачи, а только в отдельных вопросах и притом каждый раз специфическим методом. Таковы частные решения поставленной,

здесь задачи в линейчатой геометрии Штуди [1], в сферической геометрии Лагерра [2], в эллиптической линейчатой геометрии [3].

2. Начнем с частного случая симметрических пространств — с групповых пространств компактных групп.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая компактная полупростая группа Ли допускает двустороннее представление своего группового пространства с инвариантной метрикой в виде поверхности вращения в эвклидовом пространстве.*

Теорема вытекает из двух результатов Картана. Изучая полные ортогональные системы функций на компактных полупростых группах Ли [4], Картан построил одностороннее представление группового пространства такой группы с инвариантной метрикой в виде поверхности вращения в эвклидовом пространстве.

В своей диссертации [5] Картан ввел в полупростые группы Ли метрику, в которой компоненты g_{ij} метрической формы в единице группы выражаются через структурные константы c_{ij}^k группы по формуле

$$g_{ij} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} c_{i\alpha}^{\beta} c_{j\beta}^{\alpha}.$$

Расстояние в произвольной инвариантной метрике простой группы Ли отличаются от соответственного расстояния в метрике Картана этой группы постоянным множителем. Расстояние в произвольной инвариантной метрике полупростой группы Ли определяется инвариантными метриками простых групп—прямых слагаемых данной группы, отличающихся произвольными постоянными множителями от соответствующих метрик Картана. Поэтому группа движений группового пространства полупростой группы Ли с произвольной инвариантной метрикой, вообще говоря, является подгруппой группы движений этого пространства с метрикой Картана. Группа вращений окрестности единицы, сохраняющая метрику Картана, совпадает с **присоединенной группой**, т. е. с группой преобразований

$$g \to a^{-1}ga \quad (a,\ g \text{ — элементы данной группы}).$$

Поэтому вся группа движений группового пространства полупростой группы Ли, сохраняющая ее метрику Картана, совпадает с группой

$$g \to agb \quad (a,\ b,\ g \text{ — элементы данной группы}). \tag{1}$$

Значит, группа движений группового пространства полупростой группы Ли, сохраняющая ее произвольную инвариантную метрику, вообще говоря, является подгруппой группы преобразования (1). Так как односторонность представления, найденная Картаном в [4], подразумевает, что группа (1) является подгруппой группы движений группового пространства в возникающей при построении Картана инвариантной метрике, то этим двусторонность представления Картана доказана.

3. Удобный способ представления групповых пространств компактных групп в виде поверхностей вращения дают нам представления групп в алгебрах (нахождение в группах обратимых элементов ассоциативных алгебр подгрупп, изоморфных данным группам). Алгебру A такую, что группа $\mathfrak{G}$ изоморфно отображена в группу ее обратимых элементов, мы будем называть алгеброй представления группы $\mathfrak{G}$. Здесь имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Во всякую алгебру представления компактной группы Ли можно ввести эвклидову метрику так, чтобы поверхность, изображающая группу, односторонне представляла ее в виде поверхности вращения.*

Доказательство аналогично доказательству известной теоремы, приведенной в книге Понтрягина [(6); стр. 126]. Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму на элементах алгебры представления, например

$$\varphi(a)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

Если x и y — элементы нашей группы, то можно рассмотреть новую квадратичную форму

$$\Phi(a)=\int\int \varphi(xay)\,dx\,dy, \tag{2}$$

где интегрирование по группе произведено в соответствии с определением Неймана [(6); стр. 106]. Форма (2) также положительно определенная. Из инвариантности интегрирования следует, что эта форма инвариантна при замене элемента a на элемент vaw (v и w — элементы нашей группы). Искомая эвклидова метрика в алгебре та, в которой основной квадратичной формой служит форма $\Phi(a)$. Поверхность, изображающая группу, в полученной метрике целиком лежит на гиперсфере радиуса $\sqrt{\Phi(e)}$.

Для полупростых групп в силу доказанного в п. 2 эти представления являются двусторонними.

4. Если форма (1) инвариантна, т. е. $\varphi(a)=\varphi(xay)$, то в силу того, что $\int\int dx\,dy=1$, получаем $\Phi(a)=\varphi(a)$. Именно так обстоит дело с представлениями ортогональной группы O^n в *алгебре действительных матриц* R^n, *унимодулярной унитарной группы* U^n в *алгебре комплексных матриц* $R^n[i]$ и универсальной накрывающей для группы O^n *спинорной группы* S^n (7) в алгебре клиффордовых чисел C^n (8). Соответственные формы имеют вид:

$$\Phi(a)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2, \tag{3}$$

$$\Phi(a)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}'^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}'' =\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{a}_{ij}, \tag{4}$$

$$\Phi(a) = \sum_{k=0}^{n} a^2_{i_1 i_2 \ldots i_k}\,*. \qquad (5)$$

Инвариантность форм (3) и (4) следует из того, что их можно переписать в виде

$$\Phi(a) = \mathrm{Sp}\,(aa^*), \qquad (6)$$

где в действительном случае $(a^*)_{ij} = a_{ji}$, а в комплексном случае $(a^*)_{ij} = a_{ji}$ (след матрицы A будем обозначать $\mathrm{Sp}\,A$). Если матрицы x и y принадлежат к группам O^n или U^n, то они удовлетворяют условию $xx^* = e$ и поэтому (а также потому, что $\mathrm{Sp}\,a = \mathrm{Sp}\,(xax^{-1})$) мы получаем

$$\Phi(axy) = \mathrm{Sp}\,(xay\,(xay)^*) = \mathrm{Sp}\,(xayy^*a^*x^*) = \mathrm{Sp}\,(aa^*) = \Phi(a). \qquad (7)$$

5. Теореме 2 можно придать другую формулировку.

ТЕОРЕМА 2′. *Всякая компактная группа Ли допускает одностороннее представление своего группового пространства с инвариантной симметрической метрикой в виде поверхности вращения в эвклидовом пространстве.*

В самом деле, в доказательстве теоремы 2 не предполагалась полупростота группы.

6. При переходе к *групповым пространствам некомпактных групп Ли* заметим, что, в отличие от компактных групп *не всякая некомпактная группа Ли линейно представима в целом* (условия линейной представимости см. ([9])) *и не во всякую алгебру представления некомпактной группы Ли можно ввести такую метрику, чтобы группа представилась в виде поверхности вращения* (например, в алгебру R^n нельзя ввести ни такой эвклидовой, ни такой псевдоэвклидовой метрики, чтобы *полная линейная группа* L^n представилась в виде поверхности вращения).

ТЕОРЕМА 3. *Всякая некомпактная линейно представимая полупростая группа Ли допускает двустороннее представление своего группового пространства с инвариантной симметрической метрикой в виде поверхности вращения в псевдоэвклидовом пространстве.*

7. Строение некомпактной полупростой группы Ли в малом (строение ее алгебры Ли) определяется по строению алгебры Ли компактной полупростой группы, имеющей ту же комплексную форму, по следующей теореме Картана [([10]), стр. 27; ([11]), стр. 227].

Для того чтобы найти все действительные формы данной комплексной полупростой группы Ли, надо найти все инволютивные автоморфизмы компактной действительной формы этой группы и все векторы алгебры Ли этой компактной группы, изменяющие при этом автомор-

---

* Алгебра C^n клиффордовых чисел имеет в качестве своих образующих элементы e_i, $e_i^2 = -1$, $e_ie_j = -e_je_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Общий элемент ее представим в форме

$$a = \sum_{k=0}^{n} a_{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \ldots e_{i_k}.$$

физме свое направление на обратное, надо умножить на i, а все векторы алгебры Ли этой компактной группы, остающиеся при этом автоморфизме инвариантными, надо оставить без изменения. Полученная новая алгебра Ли является алгеброй Ли действительной некомпактной формы данной комплексной группы.

8. Из теоремы п. 6 и того, что всякий автоморфизм в группе может быть продолжен до автоморфизма в ее алгебре представления, следует важное для нас предложение:

Для того чтобы построить в целом все линейно представимые действительные формы данной комплексной полупростой группы Ли $\mathfrak{G}$, надо рассмотреть ее компактную форму в ее алгебре представления A и найти все инволютивные автоморфизмы этой алгебры представления, порождающие инволютивные автоморфизмы компактной группы.

Пусть базис алгебры A состоит из элементов

$$e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_r,$$

причем при одном из найденных нами инволютивных автоморфизмов этот базис переходит в

$$-e_1, -e_2, \ldots, -e_p, e_{p+1}, \ldots, e_r.$$

Исходная компактная группа $\mathfrak{G}$ представляется в алгебре A поверхностью с уравнениями

$$F_\alpha(a_1, a_2, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots, a_r) = 0. \qquad (8)$$

Построим новую алгебру A^*, являющуюся подалгеброй алгебры $A[i]$, полученной «окомплексиванием» (расширением основного поля до поля комплексных чисел) алгебры A, причем элементы алгебры A^* являются линейными комбинациями с действительными коэффициентами элементов

$$ie_1, ie_2, \ldots, ie_p, e_{p+1}, \ldots, e_r$$

алгебры $A[i]$. Элементы алгебры A^*, удовлетворяющие уравнениям (8), в алгебре $A[i]$ образуют группу $\mathfrak{G}^*$, действительную некомпактную форму данной комплексной полупростой группы.

В самом деле, выделенное множество будет группой, так как оно представляет собою пересечение группы с уравнениями (8) в алгебре $A[i]$ и алгебры A^*, являющейся подалгеброй $A[i]$.

Построенная группа $\mathfrak{G}^*$ является действительной некомпактной формой данной комплексной полупростой группы, так как по построению ее алгебра Ли получается из алгебры Ли компактной формы процессом теоремы п. 7.

Максимальная компактная подгруппа построенной группы, как и для всякой некомпактной полупростой группы, также определяет инволютивный автоморфизм, для которого элементы этой подгруппы и только они являются инвариантными элементами. Если к построенной группе и ее алгебре представления применить тот же процесс, получим исходную компактную группу и ее алгебру представления.

Таким образом, можно построить любую линейно представимую некомпактную полупростую группу $\mathfrak{G}^*$: инволютивный автоморфизм этой группы, определяемый ее максимальной компактной подгруппой, можно продолжить до инволютивного автоморфизма в ее алгебре представления и, применяя к этой алгебре тот же процесс, получить некоторую компактную полупростую группу и ее алгебру представления — ту самую группу $\mathfrak{G}$ и алгебру A, из которых процессом нашей теоремы можно получить данную группу $\mathfrak{G}^*$.

9. Из предложения п. 8 непосредственно вытекает следующее:

Если линейно представимая некомпактная полупростая группа $\mathfrak{G}^*$ построена вместе со своей алгеброй представления процессом п. 8, то в эту алгебру можно ввести такую псевдоэвклидову метрику, чтобы поверхность, изображающая группу, двусторонне представляла ее в виде поверхности вращения.

Пусть квадрат расстояния в алгебре A, определяющий метрику в исходной компактной группе $\mathfrak{G}$, определяется положительно определенной квадратичной формой $\Phi(a)$, найденной согласно теореме 2. Форма $\Phi(a)$ инвариантна и в алгебрах $A[i]$ и A^*, так как групповые преобразования соответственных групп $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}[i]$ и $\mathfrak{G}^*$ выражаются через координаты элементов по одинаковым формулам. В алгебре $A[i]$ форма $\Phi(a)$ всегда комплексна. В алгебре A^* эта форма, вообще говоря, тоже комплексна и имеет вид

$$\Phi(a) = \Phi_0(a) + i\Phi_1(a) \quad (\Phi_0 \text{ и } \Phi_1 \text{ действительны}).$$

Тогда в качестве действительной формы в алгебре A^* надо взять форму типа

$$\Phi'(a) = \Phi_0(a) + \lambda\Phi_1(a) \qquad (\lambda \text{ действительно}).$$

Эта действительная, вообще говоря, неопределенная квадратичная форма определит в алгебре A^* искомую псевдоэвклидову метрику.

В случае инвариантности формы $\Phi(a)$ в алгебре A при ее инволютивном автоморфизме, определяющем построение алгебры A^*, член $\Phi_1(a)$ исчезает. Это всегда имеет место в часто встречающемся случае, когда этот инволютивный автоморфизм — внутренний.

Изложенное доказывает односторонность построенного представления.

Это представление будет двусторонним, так как группа $\mathfrak{G}^*$ — полупростая и к ней применимо рассуждение теоремы 1.

Теорема 3 полностью доказана.

10. Пример. Группа O^n допускает инволютивный автоморфизм, состоящий в том, что элементы a_{ij} ее матриц с индексами, удовлетворяющими неравенству

$$(i-l)(j-l) \leqslant 0, \tag{9}$$

где $0 < l < n$, меняют знак (т. е. если каждую матрицу группы разбить на 4 прямоугольника прямыми, проходящими между l-м

и $l+1$-м столбцами и l-й и $l+1$-й строками, то меняют знак все элементы правого верхнего и левого нижнего прямоугольников). Этот инволютивный автоморфизм продолжается до инволютивного автоморфизма во всей алгебре R^n, определяющегося тем же условием.

Для получения новой алгебры мы должны умножить все базисные элементы e_{ij} алгебры R^n с индексами, удовлетворяющими (9), на i. Однако это не принципиально новая алгебра, она изоморфна старой алгебре R^n. Для установления этого изоморфизма достаточно поставить в соответствие каждой матрице новой алгебры такую матрицу алгебры R^n, у которой элементы левого верхнего и правого нижнего прямоугольников равны соответственным элементам этой матрицы, элементы правого верхнего прямоугольника равны коэффициентам при i соответственных элементов матрицы новой алгебры, а элементы левого нижнего прямоугольника равны коэффициентам при i соответственных элементов матрицы новой алгебры с обратным знаком. Таким образом построенная алгебра—это старая алгебра R^n с новым базисом.

Элементы новой группы в алгебре R^n в новом базисе, согласно п. 8, удовлетворяют тому же условию ортогональности, что и элементы группы O^n в алгебре R^n. Условие ортогональности $aa^*=e$ в развернутом виде представляется уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}. \tag{10}$$

Если мы введем символ

$$\sigma(n)=\begin{cases} -1, & \text{если } n\leqslant 0,\\ 1, & \text{если } n>0,\end{cases}$$

то при переходе описанным образом от нового базиса алгебры R^n к обычному базису этой алгебры мы видим, что матрицы алгебры R^n в обычном базисе, изображающие элементы новой группы, удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(k-l)\, a_{ik}a_{jk}=\sigma(i-l)\,\delta_{ij}.$$

Матрицы, удовлетворяющие этому соотношению, называются *псевдоортогональными*. Они переводят в себя квадратичную форму $\sum_{i=1}^{n}\sigma(i-l)\,a_i^2$. Эту группу мы будем называть группой O_l^n.

Группа U^n также допускает инволютивный автоморфизм, состоящий в том, что элементы ее матриц, удовлетворяющие (9), меняют знак. Так же, как для O_l^n, можно построить группу U_l^n *псевдоунитарных* унимодулярных комплексных матриц, переводящих в себя эрмитову форму $\sum_{i=1}^{n}\sigma(i-l)\,a_i\,\overline{a}_i$.

Из предложения п. 9 находим, что для получения в алгебрах R^n, $R^n[i]$ и получающейся процессом п. 8 из алгебры C^n алгебре C_l^n *псевдо-*

клиффордовых чисел* псевдоэвклидовой метрики, в которой, соответственно, группы O_l^n, U_l^n и накрывающая группу O_l^n псевдоспинорная группа S_l^n представляются в виде поверхностей вращения, достаточно в качестве основных квадратичных форм взять формы

$$\Phi(a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma(i-l)\,\sigma(j-l)\,a_{ij}^2\,, \tag{11}$$

$$\Phi(a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma(i-l)\,\sigma(j-l)\,a_{ij}'^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma(i-l)\,\sigma(j-l)\,a_{ij}''^2, \tag{12}$$

$$\Phi(a) = \sum_{k=0}^{n} \sigma(i_1-l)\,\sigma(i_2-l)\cdots\sigma(i_k-l)\,a_{i_1 i_2 \ldots i_k}^2\,. \tag{13}$$

11. Группа U^n допускает также другой инволютивный автоморфизм, состоящий в том, что все элементы $a_{aj} = a_{ij}' + ia_{ij}''$ ее матриц заменяются на числа $\bar{a}_{ij} = a_{ij}' - ia_{ij}''$. Новая алгебра, строящаяся согласно п. 8, уже не будет изоморфна $R^n[i]$, как в случае U_l^n, а является новой алгеброй $R^n[\omega]$ — алгеброй двойных матриц — алгеброй матриц над алгеброй двойных чисел, имеющей базис 1, ω, где $\omega^2 = 1$. Элементы новой группы в алгебре $R^n[\omega]$ удовлетворяют тем же условиям унитарности и унимодулярности, что и элементы группы U^n в алгебре $R^n[i]$. В условии унитарности $\alpha\alpha^* = e$ сопряженная матрица α^* определяется по той же формуле $(\alpha^*)_{ji} = \bar{\alpha}_{ji}$, что и в $R^n[i]$, причем если $\alpha = \alpha' + \omega\alpha''$, то $\bar{\alpha} = \alpha' - \omega\alpha''$. Алгебра $R^n[\omega]$ изоморфна прямой сумме двух алгебр R^n и, если единицы этих алгебр $e_1 = \frac{1+\omega}{2}e$, $e_2 = \frac{1-\omega}{2}e$, то любая двойная матрица α из $R^n[\omega]$ представляется в виде

$$\alpha = ae_1 + be_1 = \frac{a+b}{2} + \omega\,\frac{a-b}{2}\,, \tag{14}$$

где a и b — матрицы из R^n. Отсюда следует, что

$$\alpha^* = \frac{a^*+b^*}{2} - \omega\,\frac{a^*-b^*}{2} = b^*e_1 + a^*e_2. \tag{15}$$

Поэтому условие унитарности в алгебре $R^n[\omega]$ имеет вид $b = (a^*)^{-1}$, т. е. унитарные двойные матрицы имеют разложение (14) вида

$$\xi = xe_1 + (x^*)^{-1}e_2 = \frac{x+(x^*)^{-1}}{2} + \omega\,\frac{x-(x^*)^{-1}}{2}\,. \tag{16}$$

Если матрицы x из R^n пробегают унимодулярную группу, то соответствующие им по (16) матрицы ξ из $R^n[\omega]$ пробегают изоморфную группу. Обе эти группы являются нормальными делителями: первая — группы L^n, вторая — ее изображения в $R^n[\omega]$, причем факторгруппы по этим нормальным делителям обе изоморфны группе действительных чисел (без нуля) по умножению. Отсюда следует, что обе эти группы

---

* Алгебра C_l^n псевдоклиффордовых чисел имеет тот же базис, что и алгебра C^n клиффордовых чисел и отличается от нее только тем, что здесь $e_i^2 = -\sigma(i-l)$.

состоят из матриц с единичными детерминантами, т. е. подгруппа алгебры $R^n[\omega]$, связанная условиями унитарности и унимодулярности, изоморфна унимодулярной группе алгебры R^n (накрывающей группу проективных преобразований).

Из предложения п. 9 мы получаем, что для представления унимодулярной действительной группы в виде поверхности вращения в псевдоэвклидовом пространстве достаточно представить эту группу в алгебре $R^n[\omega]$ с помощью соответствия (16) и ввести в $R^n[\omega]$ псевдоэвклидову метрику, взяв в качестве основной квадратичной формы форму

$$\Phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}'^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}''^2. \tag{17}$$

12. ТЕОРЕМА 4. *Всякая некомпактная линейно представимая группа Ли допускает одностороннее представление своего группового пространства с инвариантной симметрической метрикой в виде поверхности вращения в псевдоэвклидовом пространстве.*

Достаточно доказать это утверждение для полной линейной группы L^n. Примером искомого представления будет представление этой группы в алгебре $R^n[\omega]$ с помощью соответствия (16), причем псевдоэвклидова метрика в этой алгебре введена с помощью формы (17). В самом деле, форму (17) можно переписать в виде

$$\Phi(\alpha) = \mathrm{Sp}(\alpha'\alpha'^*) - \mathrm{Sp}(\alpha''\alpha''^*) = \mathrm{Sp}\left(\frac{a+b}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^*\right) - \\ - \mathrm{Sp}\left(\frac{a-b}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^*\right) = \mathrm{Sp}(ab^*).$$

Если матрицы x и y из L^n представляются матрицами ξ и η из $R^n[\omega]$, то в силу того, что

$$\xi\alpha\eta = xaye_1 + (x^*)^{-1}\, b\, (y^*)^{-1}\, e_2,$$

получаем

$$\Phi(\xi\alpha\eta) = \mathrm{Sp}(xay((x^*)^{-1}\, b\, (y^*)^{-1})^*) = \mathrm{Sp}(xayy^{-1}\, b^*\, x^{-1}) = \\ = \mathrm{Sp}(ab^*) = \Phi(\alpha).$$

13. При переходе к *общим симметрическим пространствам* заметим, что характеристическим свойством этих пространств является то, что *стационарная подгруппа* основной группы этого пространства состоит из тех и только из тех элементов группы, которые инвариантны относительно одного из ее инволютивных автоморфизмов ([10]).

Характеристическим свойством симметрического пространства с полупростой основной группой является то, что групповое пространство этой группы или ее накрывающей можно инвариантно метризовать так, чтобы наше пространство было изометрично вполне геодезической поверхности в групповом пространстве. Эта поверхность состоит из тех элементов группы, которые при инволютивном автоморфизме, опреде-

ляемом станционарной подгруппой симметрического пространства, меняются на обратный ([12]).

14. ТЕОРЕМА 5. *Всякое симметрическое пространство с линейно представимой полупростой основной группой допускает двустороннее представление в виде поверхности вращения в эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве.*

Для доказательства достаточно инвариантно метризовать групповое пространство основной группы данного симметрического пространства или ее накрывающей группы так, чтобы данное пространство было изометрично вполне геодезической поверхности в групповом пространстве, и по теореме 1 или 3 представить это групповое пространство двусторонне в виде поверхности вращения в эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве. Линейная представимость полученной группы в случае ее некомпактности следует из того, что эту группу можно получить процессом, изложенным в п. 8, из соответственной компактной группы. Построенная геодезическая поверхность будет поверхностью вращения; это следует из того, что групповое преобразование симметрического пространства может быть получено как произведение двух преобразований симметрии, каждое из которых может быть расширено до изометрического преобразования всего группового пространства. Всякое вращение полученной поверхности служит образом группового преобразования, так как это свойство (по нашему построению) имеется у поверхности, представляющей групповое пространство.

15. Примеры. *Многообразие m-мерных плоскостей, проходящих через точку n-мерного эвклидова пространства* — это однородное пространство, в качестве основной группы которого мы возьмем группу O^n. Тогда станционарной группой будет прямое произведение группы O^m вращений в одной из плоскостей многообразия и группы O^{n-m} вращений в ее ортогональном дополнении (эта подгруппа — множество элементов, инвариантных при инволютивном автоморфизме группы O^n, рассмотренном в п. 10). В это многообразие можно ввести симметрическую метрику, причем за расстояние между двумя m-мерными плоскостями с d-мерным пересечением и станционарными углами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{m-d}$ принимается число ω, определяемое по формуле

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{m-d}^2 \qquad (18)$$

Внутренняя геометрия этого многообразия в этой метрике изучалась в наших работах ([13,14]). Многообразие плоскостей с метрикой (18) изометрично пересечению поверхности

$$x_{[i_1 i_2 \ldots i_m} x_{j_1] j_2 \ldots j_m} = 0 \qquad (19)$$

с гиперсферой

$$\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} x_{i_1 i_2 \ldots i_m}^2 = 1 \qquad (20)$$

с отождествленными диаметрально противоположными точками в $\binom{n}{m}$-мерном эвклидовом пространстве, причем групповое преобразо-

вание изображается вращением этой поверхности, а всякое вращение поверхности является образом группового преобразования.

Эта поверхность — вполне геодезическая поверхность той поверхности вращения, которая изображает групповое пространство накрывающей группы O^n группы S^n в представлении в алгебре клиффордовых чисел.

16. *Многообразие m-мерных плоскостей, проходящих через точку n-мерного псевдоэвклидова пространства*, — однородное пространство, которое мы рассмотрим с основной группой O^n_l. В него можно ввести симметрическую инвариантную метрику по той же формуле (18), что и в п. 16. Это многообразие изометрично пересечению поверхности (19) с гиперсферой

$$\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} \sigma(i_1 - l)\,\sigma(i_2 - l)\ \ldots\ \sigma(i_m - l)\, x^2_{i_1 i_2 \ldots i_m} = 1 \qquad (21)$$

с отождествлёнными диаметрально противоположными точками в $\binom{n}{m}$-мерном псевдоэвклидовом пространстве, причем групповое преобразование изображается вращением этой поверхности, а всякое вращение поверхности — образ группового преобразования. Эта поверхность — вполне геодезическая подповерхность той поверхности вращения, которая изображает групповое пространство накрывающей группу O^n_l группы S^n_l в представлении в алгебре псевдоклиффордовых чисел.

17. *Многообразие m-мерных сфер n-мерного эвклидова пространства* — однородное пространство, основная группа которого — *конформная группа*. Это многообразие взаимно однозначно отображается на многообразие $(n-m)$-мерных плоскостей, проходящих через точку $(n+3)$-мерного псевдоэвклидова пространства, причем преобразования конформной группы изображаются псевдоэклидовыми вращениями многообразия плоскостей. В многообразие сфер можно ввести симметрическую инвариантную метрику, приняв за расстояние между двумя сферами инвариант, определяемый по формуле (18) для соответственных плоскостей. Внутренняя геометрия такого многообразия в этой метрике изучалась в наших работах ([15,16]). Представление многообразия сфер в виде поверхности вращения дает поверхность с уравнениями (19) и (21) в псевдоэвклидовом пространстве.

18. *Многообразие гиперквадрик n-кратного ((n — 1)-мерного) проективного пространства.* Полное многообразие гиперквадрик Q^n допускает группу проективных пресбразований, однако эта группа не является на нем транзитивной. Рассмотрим одну из областей транзитивности — многообразие Q^n_l. Если представить группу проективных преобразований матрицами алгебры R^n не в обычном базисе, а в том базисе, которым мы пользовались в п. 10, то стационарная подгруппа многообразия Q^n_l будет группой матриц, ортогональных в этом базисе. Переход от матрицы a в базисе п. 10 к матрице $(a^*)^{-1}$ в том же базисе является инволютивным автоморфизмом группы проективных преобразований, оставляющим инвариантными элементы стационарной подгруппы мно-

гообразия Q_i^n. Поэтому в многообразие Q_i^n можно ввести симметрическую инвариантную метрику, рассматривавшуюся Картаном [17]. Чисто геометрически расстояние в этой метрике может быть введено в Q_i^n следующим образом: в случае $n=2$ (проективная прямая), где роль гиперквадрик играют *пары точек*, искомым расстоянинм между двумя парами точек будет такое число ω, что ангармоническое отношение этих двух пар равно $-\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}$. В общем случае, если расстояния между парами точек, высекающимися двумя данными гиперквадриками на ребрах их общего автополярного симплекса, равны ω_{ij}, то искомое расстояние ω между этими гиперквадриками определяется по формуле

$$\omega^2=\sum_{(i,j)}\omega_{ij}^2. \tag{22}$$

Многообразие Q^n в этой метрике во всех своих компонентах Q_i^n изометрично многообразию элементов алгебры $R^n[\omega]$ в ее метрике (17), удовлетворяющих условию (16) и условию симметричности, причем гиперквадрике с уравнением $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=0$ соответствует элемент $\alpha=ae_1+(a^*)^{-1}e_2=ae_1+a^{-1}e_2$.

При проективном преобразовании с матрицей x матрица гиперквадрики a переходит в матрицу xax^*, причем соответственное преобразование в алгебре $R^n[\omega]$ является псевдоэвклидовым вращением, а всякое вращение этой поверхности есть образ проективного преобразования в многообразии гиперквадрик.

19. ТЕОРЕМА 6. *Всякое симметрическое пространство с линейно представимой основной группой и связной стационарной подгруппой допускает одностороннее представление в виде поверхности вращения в эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве.*

В силу того что инволютивный автоморфизм в группе порождает инволютивный автоморфизм в алгебре ее представления, множество элементов алгебры представления, инвариантных относительно этого автоморфизма, образуют одну или несколько плоскостей, пересекающихся в нуле алгебры (инвариантные линейные подпространства, соответствующие характеристическому числу 1 линейного преобразования в алгебре, определяемого инволютивным автоморфизмом). Поэтому стационарная подгруппа симметрического пространства высекается из группового пространства его основной группы плоскостью (являющейся подалгеброй). Так как каждой точке однородного пространства можно поставить во взаимно однозначное соответствие класс смежности его основной группы по стационарной подгруппе, то каждой точке симметрического пространства с линейно представимой основной группой и связной стационарной подгруппой можно поставить в соответствие плоскость в алгебре представления его основной группы, высекающую из группового пространства группы соответственный класс смежности по стационарной подгруппе. Так как все классы смежности можно получить из подгруппы вращениями вокруг нуля алгебры,

то все соответствующие им плоскости проходят через нуль алгебры. Таким образом, наше симметрическое пространство поставлено во взаимно однозначное соответствие с подмногообразием многообразия плоскостей, проходящих через точку эвклидова или псевдоэвклидова пространства, причем групповое преобразование нашего пространства изображается вращением в многообразии плоскостей. Полное многообразие плоскостей, проходящих через точку (в силу примеров пп. 15 и 16), допускает представление в виде поверхности вращения, поэтому подповерхность этой поверхности вращения, изображающая наше симметрическое пространство, также является поверхностью вращения. Эта поверхность вращения находится во взаимно-однозначном соответствии с нашим симметрическим пространством.

20. Для применения изложенной теории к одной из геометрических задач воспользуемся теоремой Майера ([18]) и ее обобщением на псевдоэвклидово пространство, которые можно сформулировать следующим образом:

Если в n-мерном эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве m-мерная поверхность задана ее уравнением

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, \ \ldots, \ u_m) \tag{23}$$

и мы определим в каждой ее точке векторы Майера $\mathbf{b}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, *являющиеся проекциями соответственных производных* $\dfrac{\partial^k \mathbf{x}}{\partial u_1 \, \partial u_2 \cdots \partial u_k}$ *на направление, перпендикулярное плоскости порожденной производными низшего порядка (в частности,* $\mathbf{b}_i$ — *обычные производные,* $\mathbf{b}_{ij}$ — *ковариантные производные, общие векторы Майера — обобщения ковариантных производных), и составим дифференциальные формы Майера*

$$g_k(u) = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 \ldots j_k} g_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 \ldots j_k} du_{i_1} \ldots du_{i_k} du_{j_1} \ldots du_{j_k}, \tag{24}$$

где

$$g_{i_1 i_2 \ldots i_k j_1 \ldots j_k} = \mathbf{b}_{(i_1 i_2 \ldots i_k} \mathbf{b}_{j_1 j_2 \ldots j_k)} \tag{25}$$

(в частности, $g_1(u)$ — *обычная 1-я квадратичная форма и для гиперповерхностей* $g_2(u) = b^2(u)$, *где* $b(u)$ — *2-я квадратичная форма), то формы* $g_k(u)$ *(их конечное число) определят поверхность* (23) *с точностью до движения в эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве.*

21. Из этой теоремы и теорем 1, 3, 5 следует

ТЕОРЕМА 7. *Если в симметрическом пространстве с линейно представимой полупростой основной группой m-мерная поверхность задана ее уравнением*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2, \ldots, u_m) \tag{26}$$

и мы с помощью теорем 1, 2 *или* 3 *представим это пространство в виде поверхности вращения в эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве, так, чтобы всякое вращение этой поверхности было образом группового преобразования, то в эвклидовом или псевдоэвклидовом пространстве поверхность* (26) *изобразится поверхностью* (23) *и, если для последней мы найдем в каждой ее точке дифференциальные формы Майера*

(24), *то эти формы определят поверхность* (26) *в симметрическом пространстве с точностью до группового преобразования.*

Теорема 7 и пример п. 4 дают возможность на поверхностях в групповых пространствах ортогональной группы O^n, унимодулярной группы U^n и спинорной группы S^n найти систему дифференциальных форм, определяющих эти поверхности с точностью до умножения на элементы слева и справа. Теорема 7 и пример п. 10 позволяют сделать то же для псевдоортогональной группы O_l^n, унимодулярной псевдоунитарной U_l^n и псевдоспинорной группы S_l^n. Теорема 7 и пример п. 11 позволяют сделать то же для унимодулярной действительной группы.

Теорема 7 и пример п. 15 дают возможность на конгруэнциях и комплексах *m-мерных плоскостей, проходящих через точку n-мерного эвклидова пространства*, найти систему дифференциальных форм, определяющих эти многообразия с точностью до эвклидова вращения; теорема 7 и пример п. 16 позволяют сделать то же на конгруэнциях и комплексах *m-мерных плоскостей, проходящих через точку n-мерного псевдоэвклидова пространства*, определяя их с точностью до псевдоэвклидова вращения; теорема 7 и пример п. 17 позволяют сделать то же на конгруэнциях и комплексах *m-мерных сфер n-мерного эвклидова пространства*, определяя их с точностью до конформного преобразования; теорема 7 и пример п. 18 позволяют сделать то же на конгруэнциях и комплексах *гиперквадрик n-мерного проективного пространства*, определяя их с точностью до проективного преобразования.

22. Из доказательства теоремы 6 видно, что представление в виде поверхности вращения указанным там способом можно получить и для несимметрических однородных пространств, стационарные подгруппы которых в одной из алгебр представления, в которой групповое пространство основной группы представляется в виде поверхности вращения, высекаются подалгебрами.

Простейшие примеры несимметрических пространств, обладающих указанным свойством: *многообразие n-вершинных симплексов n-кратного проективного пространства* (основная группа — проективная группа, ее алгебра представления — R^n, стационарная подгруппа — совокупность проективных преобразований, имеющих вершины симплекса своими двойными точками; такая группа — максимальная подгруппа нулевого ранга проективной группы — высекается из R^n подалгеброй диагональных матриц), *многообразие систем автополярных прямых эллиптического или псевдоэллиптического пространства* (система автополярных прямых — система непересекающихся ребер автополярного симплекса, основная группа — группа движений, ее алгебра представления — R^n, стационарная подгруппа — совокупность движений, имеющих одну из таких систем системой своих прямолинейных проекторий; такая подгруппа — максимальная подгруппа нулевого ранга группы эллиптических или псевдоэллиптических движений — высекается из R^n подалгеброй квазидиагональных матриц), *многообразие m-векторных ортонормированных реперов в точке n-мерного эвклидова или псевдоэвклидова пространства* (основная группа — группа вращений, ее алгебра представления — R^n,

стационарная подгруппа — группа вращения плоскости, вполне ортогональной к плоскости репера, высекается из алгебры R^n ее подалгеброй R^{n-m}).

Рассмотрим более подробно пример многообразия 2-векторных ортонормированных реперов в точке 4-мерного эвклидова пространства. Реперу, образованному векторами $\mathfrak{a}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $\mathfrak{b}(b_1, b_2, b_3, b_4)$, можно поставить в соответствие точку 8-мерного эвклидова пространства с координатами

$$x_1 = \frac{a_1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{a_2}{\sqrt{2}},\ x_3 = \frac{a_3}{\sqrt{2}},\ x_4 = \frac{a_4}{\sqrt{2}},\ x_5 = \frac{b_1}{\sqrt{2}},\ x_6 = \frac{b_2}{\sqrt{2}},$$
$$x_7 = \frac{b_3}{\sqrt{2}},\ x_8 = \frac{b_4}{\sqrt{2}}. \tag{27}$$

Так как векторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ связаны тремя условиями: $\mathfrak{a}^2 = 1$, $\mathfrak{b}^2 = 1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = 0$, то эти координаты связаны условиями

$$x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_8 = 0, \tag{28}$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 = 1, \tag{29}$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2 = 0. \tag{30}$$

Таким образом, наше многообразие представляется в виде 5-мерной поверхности вращения с уравнениями (28), (29), (30) в 8-мерном эвклидовом пространстве. Эта поверхность является подповерхностью (не вполне геодезической) 8-мерной поверхности с уравнением (28), (29) в том же пространстве, изометричной групповому пространству спинорной группы S^4, накрывающей основную группу O^4 нашего многообразия.

Поступило
18. XI. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бляшке В., Дифференциальная геометрия, т. I, Москва, 1935.
[2] Blaschke W., Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. III, Berlin, 1929.
[3] Розенфельд Б. А., Теория конгруэнций и комплексов прямых в эллиптическом пространстве, Известия АН, серия матем., 5 (1941), 105.
[4] Cartan E., Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, Rend. del Circolo matem. di Palermo, 53 (1929), 217.
[5] Cartan E., Thèse, «Sur la structure des groupes finis et continus», Paris, 1894.
[6] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Москва, 1938.
[7] Cartan E., Leçons sur les spineurs, Paris, 1938.
[8] Clifford W. K., Applications of Grassman's extensive algebra, Amer. Journ. of Math., I, (1878), 350.
[9] Мальцев А. И., О линейных связных локально-замкнутых группах, Доклады АН, 40 (1943), 108.
[10] Cartan E., Groupes simples et ouverts et géométrie riemannienne, Journ. de math. pures et appl., 8 (1929), 1.
[11] Gantmacher F., On the classification of real simple Lie groups, Мат. сб., 5 (47):2 (1939), 217.
[12] Cartan E., La géométrie des groupes de transformations, Journ. de math. pures et appl., 6 (1927) 1.

[13] Розенфельд Б. А., Внутренняя геометрия множества прямых эллиптического пространстра, Ученые записки МГУ, математика, LXXIII:5 (1944), 49.
[14] Розенфельд Б. А., Внутренняя геометрия множества m-мерных плоскостей в n-мерном эллиптическом пространстве, Известия АН, серия матем., 5 (1941), 325.
[15] Розенфельд Б. А., Метрические геометрии пространства шаров, Ученые записки МГУ, математика, LXXIII:5 (1944), 59.
[16] Розенфельд Б. А., Геометрия шаровых многообразий, Труды семинара по векторному анализу при МГУ, 1945.
[17] Cartan E., Leçons sur la géométrie projective complexe, Paris, 1931.
[18] Mayer W., Die Differentialgeometrie der Untermannigfaltigkeiten des R_m konstanter Krümmung, Trans. Amer. Math. Soc., 38 (1935), 267.

B. ROSENFELD. THEORY OF SURFACES IN SYMMETRICAL SPACES

SUMMARY

By a *representation of a symmetrical space as a surface of revolution in an euclidean or in a pseudoeuclidean space* we mean a mapping of the symmetrical space into the surface such that the transformations of the fundamental group are represented in the surface by euclidean or pseudoeuclidean rotations.

In this paper we show (Theorems 2, 4, 6) that every symmetrical space, whose fundamental group is linearly representable and the stationary subgroup is connected, admits a representation as a surface of revolution in an euclidean space (in case the fundamental group is compact) or in a pseudoeuclidean space (in the general case).

Moreover (Theorems 1, 3, 5) every symmetrical space with the *semi-simple* linearly representable fundamental group admits such a representation as a surface of revolution in an euclidean or in a pseudoeuclidean space that every rotation of the surface is image of a transformation of the group.

By means of the latter representation it is proved (Theorem 7) that, if a surface is given in a symmetrical space with the linearly representable semi-simple fundamental group, then at every point of this surface there exists a system of differential forms that determines the surface, up to transformations of the group.

The results obtained are applied to the group spaces of the following semi-simple groups: orthogonal, unimodular unitary, spinor, pseudo-orthogonal, unimodular pseudounitary, pseudospinor, unimodular real, as well as to the manifolds with semi-simple fundamental groups: (i) of m-dimensional planes passing through a fixed point of the n-dimensional euclidean space (the group of euclidean rotations), (ii) of m-dimensional planes passing through a fixed point of an n-dimensional pseudoeuclidean space (the group of pseudoeuclidean rotations), (iii) of the m-dimensional spheres in an n-dimensional euclidean space (the conform group), (iv) of hyperquadrics in an n-dimensional projective space (the projective group).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 387—422 Série mathématique

Ф. И. ФРАНКЛЬ

К ТЕОРИИ СОПЕЛ ЛАВАЛЯ

(*Представлено академиком* **Л. С. Лейбензоном**)

В работе дается метод построения сопел Лаваля, без скачков уплотнения, основанный на методе годографа Чаплыгина. Исследуются общие свойства течения в сопле Лаваля вблизи критического течения.

Содержание

Важнейшие обозначения

u, v — составляющие скорости потока в декартовых координатах.

$w = \sqrt{u^2 + v^2}$ — модуль скорости.

$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u}$ — угол наклона скорости.

a^* — критическая скорость.

$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ — показатель адиабатической зависимости давления от плотности.

$\beta = \frac{1}{\varkappa - 1}$ — показатель адиабатической зависимости плотности от температуры.

$w_m = \sqrt{\frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1}}\, a^* = \sqrt{2\beta + 1}\, a^*$ — скорость истечения газа в вакуум.

$$\left.\begin{aligned}
&\tau=\frac{w^2}{w_m^2}\\
&K=\frac{1-(2\beta+1)\,\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}}\\
&\sigma=\int\limits_{\tau}^{\tau^*}\frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau}\,d\tau\left(\tau^*=\frac{1}{2\beta+1}\right)\\
&\eta=\left[\frac{3}{2}\int\limits_0^\sigma\sqrt{K}\,d\sigma\right]^{2/3}\\
&b=\frac{1}{2K}\left(\frac{dK}{d\eta}-\frac{K}{\eta}\right)\\
&z_\nu(\tau)=\tau^\nu y_\nu(\tau)=\tau^\nu F(a_\nu,\ b_\nu;\quad 2\nu+1;\quad \tau)\\
&a_\nu+b_\nu=2\nu-\beta;\quad a_\nu b_\nu=-\beta\nu(2\nu+1)
\end{aligned}\right\}\ \text{функция безразмерной скорости (числа Маха)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda=\theta-\frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}\\
&\mu=\theta+\frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}
\end{aligned}\right\}\ \text{характеристические координаты.}$$

ψ — функция тока.

$\bar{\psi}$ — главный член выражения функции тока.

α — значение производной $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ в центре сопла.

Введение

В работе дается новый метод построения «безударных» плоскопараллельных сопел Лаваля, т. е. таких, которые обеспечивают поток без скачков уплотнения вблизи наиболее узкого сечения сопла.

Первое решение этой задачи принадлежит Майеру (¹).

Оно получено следующим образом: вдоль оси сопла задается распределение скоростей в виде аналитической функции, затем методом степенных рядов находят скоростной потенциал, а две найденные таким образом линии тока (расположенные симметрично относительно оси сопла) принимаются за стенки сопла. Теорема Коши — Ковалевской обеспечивает безударный характер полученного сопла.

Указанный метод обладает, однако, одним существенным недостатком: степенный ряд для потенциала сходится лишь в некоторой окрестности оси, причем трудно определить радиус сходимости. Поэтому не всегда можно достаточно точно определить входную (суживающуюся) часть сопла, что может все же привести к появлению скачков уплотнения.

Недавно в работе С. А. Христиановича и его сотрудников (²) был предложен другой метод, свободный от этого недостатка. Зато авторы этой работы ограничиваются соплами с прямой линией перехода от дозвуковых к сверхзвуковым скоростям. В связи с этим кривизна всех линий тока в узком сечении сопла, а также производная скорости в осевом направлении в точке пересечения переходной линии с осью сопла (или, как мы в дальнейшем будем выражаться, в «центре сопла») равны нулю. Благодаря этому такие сопла получаются длинными, что увеличивает их вес, а также потери энергии от трения и теплопередачи.

В данной работе нам удалось избавиться от требования прямой переходной линии. Сопла строятся методом годографа, причем используются ряды того типа, который был введен в работе С. А. Чаплыгина «О газовых струях» ([3]). Эти ряды дают возможность получить форму стенки суживающейся части сопла достаточно точно на любом расстоянии от узкого сечения.

В связи с указанной задачей пришлось рассматривать ряд вопросов, представляющих самостоятельный теоретический интерес.

Главная трудность в применении метода годографа к соплам Лаваля заключается в том, что функция тока в зависимости от составляющих скоростей вблизи центра сопла не однозначна. Узловыми линиями, вдоль которых смыкаются разные ветви этой функции, служат характеристики, исходящие из точки, соответствующей центру сопла. Поэтому необходимо прежде всего знать поведение функции тока в окрестности этих узловых линий и в особенности вблизи центра сопла.

При исследовании указанного вопроса удалось в этой функции выделить главный член, который вместе со своими производными вблизи центра сопла велик по сравнению с соответствующими поправками. Этот главный член в общем случае является линейной комбинацией двух гипергеометрических функций переменной, зависящей от составляющих скоростей.

Основываясь на этом результате, удается доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА (условие продолжимости). *Пусть задано некоторое газовое течение, симметричное относительно оси X (которая является линией тока) и примыкающее к линии перехода от до- к сверхзвуковой скорости.*

Тогда достаточным условием для того, чтобы это течение можно было продолжить в область сверхзвуковых скоростей как безударное течение, является выполнение следующих соотношений вдоль переходной линии:*

$$\psi = -\frac{3^{1/3}}{(\varkappa+1)^{2/3}\alpha}\,\theta^{1/3} + O(\theta), \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial w} = -\frac{1}{3^{1/3}(\varkappa+1)^{1/3}\alpha}\,\theta^{-1/3} + O(\theta), \tag{1b}$$

а также соответствующих условий для первых производных этих функций по углу наклона скорости θ.

Если функции ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial w}$ известны вдоль переходной линии, то этим определено течение в части сверхзвуковой области, расположенной между переходной линией и линиями Маха, исходящими из центра сопла и направленными вверх по течению (фиг. 1). Дальнейшее продолжение течения в область сверхзвуковых скоростей до известной степени произвольно; оно может быть найдено, например, если задать значе-

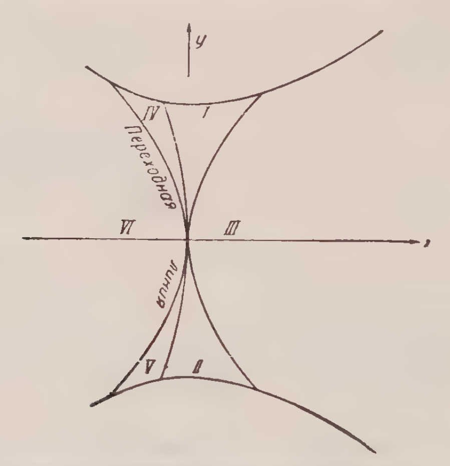
* За единицы скорости и плотности приняты их критические значения a^* и ρ^*.

ния скорости вдоль оси сопла в сверхзвуковой части последнего. При этом нужно, однако, соблюдать некоторое условие («условие смыкания»), которое сводится к неравенству

$$\alpha_2 \leqslant \alpha_1 \leqslant 4\alpha_2, \tag{2}$$

где α_2 и α_1 — производные скорости вдоль оси на сверхзвуковой и на дозвуковой стороне сопла в центре последнего (более точная формулировка дается далее).

Если это условие не выполнено, то это приводит к образованию скачков уплотнения в участках потока, ограниченных двумя линиями Маха, исходящими из центра сопла, из которых одна направлена вверх, другая вниз по течению (фиг. 1) (или же сопло с этими значениями α_1 и α_2 вовсе не может существовать).



Фиг. 1. Окрестность центра сопла в плоскости потока.

Наконец, удается найти семейство функций тока, представляемых рядами типа Чаплыгина и удовлетворяющих условию продолжимости (1), а именно:

$$\psi = -\theta - A \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{z_{cn}(\tau)}{z_{cn}(\tau^*)} \frac{\sin 2cn\theta}{n^{4/3}}, \tag{3}$$

где A и c — постоянные.

Чтобы доказать, что функция ψ, данная уравнением (3), действительно удовлетворяет условию продолжимости, выводится сперва асимптотическое разложение вспомогательной функции Чаплыгина

$$\frac{z'_\nu(\tau^*)}{z_\nu(\tau^*)} = \frac{\nu}{\tau^*} x_\nu(\tau^*)$$

по убывающим степеням $\nu^{2/3}$, а затем исследуется поведение функций вида

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^{2k/3}} \tag{4}$$

вблизи $\varphi = 0$.

Отметим еще, что условие продолжимости (1) необходимо также и в случае аналитических сопел (т. е. таких, в которых функция тока в окрестности центра сопла представляет собою регулярно аналитическую функцию координат), если производная α скорости вдоль оси x в центре сопла отлична от нуля.

Полученный главный член функции тока может быть с успехом применен к практическому вычислению течения в сопле Лаваля вблизи его центра.

§ 1. Аналитические сопла

Рассмотрим течение в аналитическом сопле, ось которого совпадает с осью X. Пусть начало координат совпадает с центром сопла. Примем за единицу скорости критическую скорость. Дифференциальное уравнение для потенциала скорости имеет вид:

$$(a^2-u^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2uv\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+(a^2-v^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \tag{1a}$$

и скорость звука a определяется функцией

$$a^2=\frac{\varkappa+1}{2}-\frac{\varkappa-1}{2}w^2\qquad (w^2=u^2+v^2). \tag{1b}$$

Данные Коши вдоль оси сопла будут:

$$u=1+\alpha x+\beta x^2+\ \dots \tag{2}$$

Решая с этими данными Коши дифференциальное уравнение (1), получим в окрестности центра сопла

$$u=1+\alpha x+\frac{\varkappa+1}{2}\alpha^2y^2+\dots \tag{3a}$$

$$v=(\varkappa+1)\alpha^2 xy+\frac{(\varkappa+1)^2\alpha^3}{6}y^3+\ \dots \tag{3b}$$

На этом основании получим уравнение линии перехода от до- к сверхзвуковым скоростям (в дальнейшем ради краткости будем называть ее «переходной линией») в виде

$$x=-\frac{(\varkappa+1)}{2}y^2+\ \dots \tag{4}$$

Найдем, далее, уравнения линий Маха, проходящих через центр сопла. Для этой цели воспользуемся дифференциальными уравнениями

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{v}{u}\pm\dfrac{a}{\sqrt{w^2-a^2}}}{1\mp\dfrac{v}{u}\dfrac{a}{\sqrt{w^2-a^2}}}\,. \tag{5}$$

Получаем соответственно для линий Маха, направленных вверх и вниз по течению, уравнения

$$x=-\frac{(\varkappa+1)\,\alpha}{4}y^2+\ \dots \tag{6a}$$

$$x=\frac{(\varkappa+1)\,\alpha}{2}y^2+\ \dots \tag{6b}$$

Взаимное положение линии перехода (4) и линий Маха (6) показано на фиг. 1. Введем теперь функцию тока ψ, определяемую уравнением

$$\psi = \int\limits_{0,\,0}^{x,\,y} \rho\,(u\,dy - v\,dx), \tag{7}$$

причем за единицу плотности возьмем плотность, соответствующую критической скорости. Рассмотрим функцию тока как функцию модуля скорости w и угла наклона скорости

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{u}. \tag{8}$$

Используя уравнения (3) и (4), получим вдоль переходной линии

$$\psi = -\frac{3^{1/3}}{(\varkappa+1)^{2/3}\alpha}\,\theta^{1/3} + O(\theta), \tag{9a}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial w} = -\frac{1}{3^{1/3}(\varkappa+1)^{1/3}\alpha}\,\theta^{-1/3} + O(\theta), \tag{9b}$$

т. е. как раз приведенные в введении условия продолжимости.

Вдоль линий Маха (6a) и (6b) получаем соответственно

$$\psi = -\frac{\sqrt[3]{12}}{(\varkappa+1)^{2/3}\alpha}\,\theta^{1/3} + O(\theta), \tag{10a}$$

$$\psi = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{12}}{(\varkappa+1)^{2/3}\alpha}\,\theta^{1/3} + O(\theta). \tag{10b}$$

§ 2. Метод годографа. Главный член выражения функции тока в случае производной скорости, непрерывной вдоль оси

Перейдя к методу годографа, вспомним уравнение С. А. Чаплыгина, которому удовлетворяет функция тока

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} + K\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{1}$$

Здесь σ и K — функции скорости, а именно

$$K = \frac{1-(2\beta+1)\tau}{(1-\tau)^{2\beta+1}} \cdot \left(\beta = \frac{1}{\varkappa-1}, \quad \tau = \frac{w^2}{w_m^2}\right), \tag{1a}$$

$$\sigma = \int\limits_{\tau}^{\tau^*} \frac{(1-\tau)^\beta}{2\tau}\,d\tau \quad .\left(\tau^* = \frac{1}{2\beta+1}\right). \tag{1b}$$

Уравнение (1) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \eta\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + b(\eta)\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0, \tag{2}$$

где

$$\eta = \left[\frac{3}{2}\int\limits_0^{\sigma} \sqrt{K}\,d\sigma\right]^{2/3}, \tag{2a}$$

$$b = \frac{1}{2K}\left(\frac{dK}{d\eta} - \frac{K}{\eta}\right). \tag{2b}$$

В области сверхзвуковых скоростей, где η отрицательно, целесообразно перейти к характеристическим координатам:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \theta - \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}, \\ \mu &= \theta + \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \frac{6}{6(\mu-\lambda)}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b}{(\mu-\lambda)^{1/3}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right) = 0. \tag{4}$$

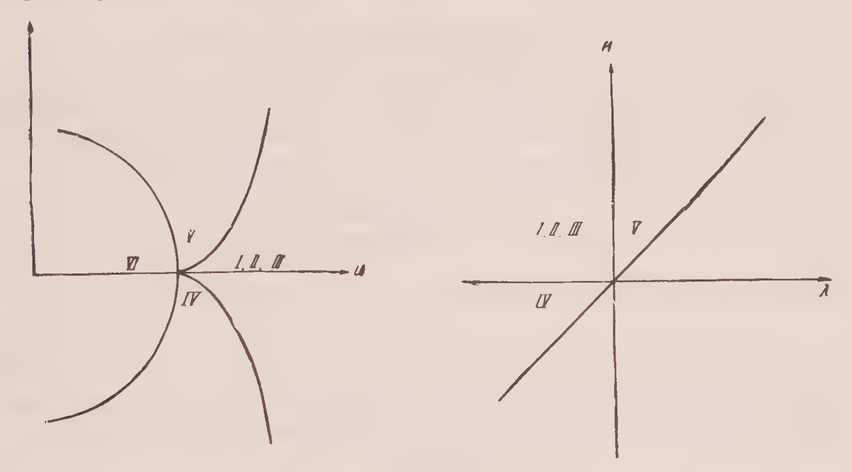
Уравнение (2) может быть в первом приближении заменено уравнением

$$\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\eta^2} + \eta\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\theta^2} = 0 \tag{5}$$

или, в характеристических координатах,

$$\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\lambda\,\partial\mu} + \frac{1}{6(\mu-\lambda)}\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\lambda} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\mu}\right) = 0. \tag{6}$$

Упомянутый в ведении главный член решения будет в дальнейшем определен как решение уравнения (5) или (6), удовлетворяющее некоторым краевым условиям.



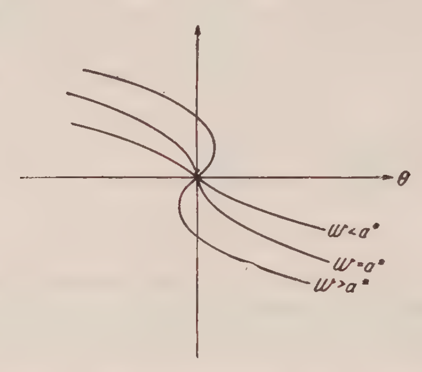
Фиг. 2. Плоскость годографа.

Фиг. 3. Плоскость характеристических координат.

Прежде чем пойти дальше, мы должны еще разобраться в качественном поведении функции ψ в плоскости годографа в окрестности точки, соответствующей центру сопла. Рассмотрим для этой цели отображение плоскости потока на плоскость годографа в случае сопла Лаваля (фиг. 1 и 2). При этом отображении переходная линия отображается на окружность $w=1$, а линии Маха, переходящие через центр сопла Лаваля, отображаются на характеристики (эпициклоиды Буземана) $\lambda=0$ и $\mu=0$. Области течения, обозначенные римскими цифрами $I-IV$, отображаются на области плоскости годографа, обозначенные на фиг. 2 теми же цифрами. При этом следует обратить внимание на то обстоятельство, что области I, II, III плоскости (x, y)

отображаются на одну и ту же область плоскости (u, v), лежащую между характеристиками $\lambda=0$ и $\mu=0$. Отсюда ясно, что функция ψ в указанной области должна быть трехзначной, в остальной части плоскости (u, v) она однозначная. Как качественно выглядит зависимость ψ от θ при разных заданных w, показано на фиг. 4.

Определим теперь сперва ветвь главного члена $\overline{\psi}$, соответствующую области I. Эту ветвь обозначим через $\overline{\psi}_I$.



Фиг. 4. Зависимость функции тока от угла наклона при постоянной скорости.

Так как она вдоль линий Маха, ограничивающих эту область, должна в первом приближении совпасть с функцией тока аналитического сопла, мы накладываем на нее следующие условия:

$$\overline{\psi}=-c\lambda^{1/3} \quad \text{на характеристике } \mu=0, \tag{7a}$$

$$\overline{\psi}=\frac{c}{2}\mu^{1/3} \quad \text{на характеристике } \lambda=0. \tag{7b}$$

Так как на этих характеристиках имеем соответственно

$$\lambda=2\theta \tag{8a}$$

$$\mu=2\theta, \tag{8b}$$

то уравнения (7a) и (7b) действительно совпадают в первом приближении с уравнениями § 1 (10a), (10b) при условии, что

$$c=\frac{6^{1/3}}{(\varkappa+1)^{2/3}\alpha}. \tag{9}$$

Легко показать, что решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям (7), может быть представлено в виде

$$\overline{\psi}=\overline{\psi}_I=c\rho^{1/3}\zeta(t), \tag{10}$$

где

$$\rho=\mu-\lambda, \tag{11a}$$

$$t=\frac{\mu}{\mu-\lambda}. \tag{11b}$$

В самом деле, если выражение (10) подставить в уравнение (6), то получим для $\zeta(t)$ гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$t(1-t)\zeta''(t)+\frac{1}{2}(1-2t)\zeta'(t)+\frac{1}{9}\zeta(t)=0, \tag{12}$$

независимыми решениями которого являются гипергеометрические функции [([4]), 14.4]

$$F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ t\right), \tag{13a}$$

$$F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 1-t\right). \tag{13b}$$

Так как

$$F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 0\right)=1 \tag{14a}$$

и

$$F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 1\right)=\frac{1}{2}, \tag{14b}$$

то окончательно

$$\bar{\psi}^{1}=c\rho^{1/3}F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ t\right)=c\rho^{1/3}\zeta_I(t). \tag{15}$$

В секторе II краевые значения на характеристиках $\lambda=0$ и $\mu=0$ будут

$$\bar{\psi}=-c\mu^{1/3} \quad \text{на характеристике } \lambda=0, \tag{16a}$$

$$\bar{\psi}=\frac{c}{2}\lambda^{1/3} \quad \text{на характеристике } \mu=0. \tag{16b}$$

Соответствующее решение уравнения (6) будет тогда

$$\bar{\psi}=\bar{\psi}_{II}=-c\rho^{1/3}F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 1-t\right)=c\rho^{1/3}\zeta_{II}(t). \tag{17}$$

Наконец, в секторе III краевые условия будут

$$\bar{\psi}=\frac{c}{2}\mu^{1/3} \quad \text{на характеристике } \lambda=0, \tag{18a}$$

$$\bar{\psi}=\frac{c}{2}\lambda^{1/3} \quad \text{на характеристике } \mu=0. \tag{18b}$$

Соответствующее решение $\bar{\psi}_{III}$ имеет, следовательно, вид

$$\bar{\psi}=\bar{\psi}_{III}=c\rho^{1/3}\left[F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 1-t\right)-F\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ t\right)\right]=c\rho^{1/3}\zeta_{III}(t). \tag{19}$$

Пользуясь известными формулами, выражающими гипергеометрические функции t через гипергеометрические функции $1-t$, легко показать, что $\zeta_I(t)$, $\zeta_{II}(t)$ и $\zeta_{III}(t)$ представляют собой различные ветви одной и той же аналитической функции, как это и следовало ожидать на основании связи этих функций с аналитическими соплами Лаваля.

В самом деле [([4]), 14.53],

$$\zeta_I(t)=F\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ t\right)=\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 1-t\right)+\sqrt{\frac{1-t}{3}}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6};\ \frac{3}{2};\ 1-t\right), \tag{20a}$$

$$\zeta_{III}(t)=F\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 1-t\right)-F\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ t\right)=\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ 1-t\right)-\sqrt{\frac{1-t}{3}}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6};\ \frac{3}{2};\ 1-t\right). \tag{20b}$$

Заменяя t через $1-t$, получим соответственно

$$\zeta_{II}(t)=-F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1-t\right)=-\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right)-$$
$$-\sqrt{\frac{t}{2}}F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; t\right), \tag{21a}$$
$$\zeta_{III}(t)=F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1-t\right)-F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right)=$$
$$=-\frac{1}{2}F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right)+\sqrt{\frac{t}{3}}F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; t\right). \tag{21b}$$

Значения главного члена $\bar{\psi}$ в секторах IV, V и VI мы будем определять на основании данных Коши на переходной линии $\eta=0$, т. е. условий (9) § 1 при отбрасывании поправочных членов. Если учесть, что при $\eta=0$ имеет место уравнение

$$\frac{dw}{d\eta}=-(x+1)^{-1/3}, \tag{22}$$

получим

$$\bar{\psi}=-2^{-1/3}c\theta^{1/3} \tag{23a}$$
$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta}=+18^{1/3}c\theta^{-1/3} \tag{23b}$$
при $\eta=0$.

Чтобы найти решения уравнения (6), удовлетворяющие условиям (23), отметим следующие два решения уравнения (12) [(4), 14.4]:

$$t^{-1/3}F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; t^{-1}\right), \tag{24a}$$
$$t^{1/3}F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; t^{-1}\right). \tag{24b}$$

Умножим эти два решения на $(\mu-\lambda)^{1/3}$ и учтем, что

$$(\mu-\lambda)=\frac{4}{3}(-\eta)^{3/2}. \tag{25}$$

Тогда получим следующие два решения уравнения (6):

$$-\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\mu^{-1/3}\eta F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; t^{-1}\right), \tag{26a}$$
$$\mu^{1/3}F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; t^{-1}\right). \tag{26b}$$

Таким образом, получаем решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям (23), в виде

$$\bar{\psi}=-c\left[2^{-1/3}\mu^{1/3}F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; t^{-1}\right)-\right.$$
$$\left.-18^{-1/3}\mu^{-1/3}\eta F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; t^{-1}\right)\right]. \tag{27}$$

Благодаря уравнениям [(4), 14.4]

$$t^{-1/3}F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; t^{-1}\right)=(t-1)^{-1/3}F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; \frac{1}{1-t}\right), \tag{28a}$$
$$t^{1/3}F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; t^{-1}\right)=(t-1)^{1/3}F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{1-t}\right) \tag{28b}$$

решение (27) может быть записано также в виде

$$\bar{\psi} = -c\left[2^{-1/3}\lambda^{1/3}F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{1-t}\right) - \right.$$
$$\left. -18^{-1/3}\lambda^{-1/3}\eta F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; \frac{1}{1-t}\right)\right]. \qquad (29)$$

Формулы (27) и (29) можно с одинаковым правом использовать при вычислении главного члена в секторах IV и V.

В секторе VI формула (27) дает два сопряженно комплексных значения $\bar{\psi}$ в зависимости от знака величины

$$(-\eta)^{3/2} = \pm i\eta^{3/2}.$$

Поэтому действительное решение уравнения (5), удовлетворнющее условиям (23), имеет вид

$$\bar{\psi}_{VI} = -c\,\mathrm{Re}\left\{2^{-1/3}\left(\theta + \frac{2}{3}i\eta^{1/3}\right)F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{\frac{4}{3}i\eta^{3/2}}{\theta + \frac{2}{3}i\eta^{3/2}}\right) - \right.$$
$$\left. -18^{-1/3}\eta\left(\theta + \frac{2}{3}i\eta^{3/2}\right)^{-1/3}F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; \frac{\frac{4}{3}i\eta^{3/2}}{\theta + \frac{1}{3}i\eta^{3/2}}\right)\right\}. \qquad (30)$$

Покажем теперь, что функция $\bar{\psi}_{IV}$ — аналитическое продолжение функции $\bar{\psi}_I$ через характеристику $\mu = 0$ и что функция $\bar{\psi}_V$ — аналитическое продолжение функции $\bar{\psi}_{II}$ через характеристику $\lambda = 0$.

В самом деле, можно переписать решение (27) в виде

$$\bar{\psi}_{IV} = c(\mu - \lambda)^{1/3}\zeta_{IV}(t), \qquad (31)$$

где

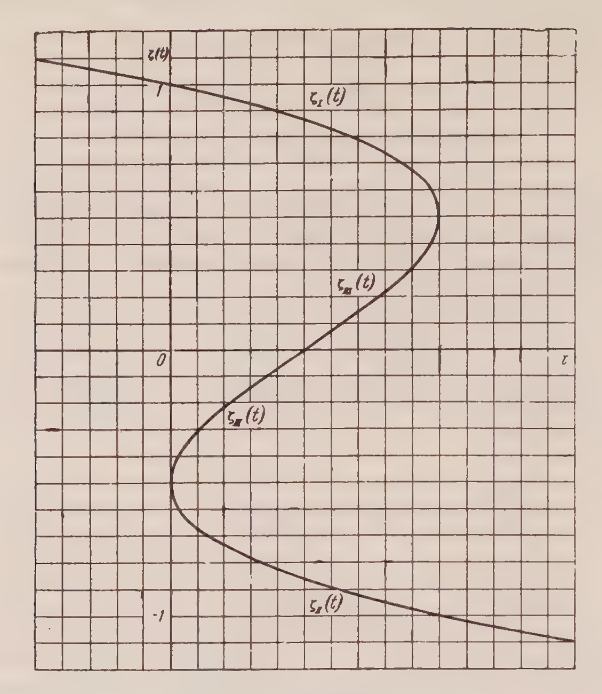
$$\zeta_{IV}(t) = -2^{-1/3}t^{1/3}F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; t^{-1}\right) -$$
$$-2^{-5/3}F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; t^{-1}\right)t^{-1/3}. \qquad (31a)$$

С другой стороны, согласно известной формуле теории гипергеометрических функций [(4), 14.5],

$$\zeta_I(t) = F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right) =$$
$$= -2^{-1/3}t^{1/3}F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; t^{-1}\right) - 2^{-5/3}t^{-1/3}F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; t^{-1}\right). \qquad (32)$$

Отсюда следует доказуемое. Что $\bar{\psi}_V$ — аналитическое продолжение $\bar{\psi}_{II}$, доказывают аналогично, пользуясь формулой (29).

В дальнейшем будет показано, что соответствующие исследованному главному члену точные решения дают течения, не имеющие слабых разрывов (т. е. разрывов производных скорости по координатам) вдоль линий Маха $\lambda = 0$ и $\mu = 0$. Это связано с тем, что функции ζ_I, ζ_{II}, ζ_{III}, ζ_{IV}, ζ_V, представляют собой различные ветви одной и той же аналитической функции (фиг. 5).



Фиг. 5. Функция ζ (t).

§ 3. Исследование первых производных главного члена по характеристическим координатам

При применении метода годографа координаты точки x, y получаются как функции составляющих скорости u, v в этой точке. Чтобы этому отображению плоскости (u, v) на плоскость (x, y) соответствовало физически реальное течение без скачков уплотнения, необходимо и достаточно, чтобы обращение этого отображения было однозначным. Что касается отображения $(u, v) \rightarrow (x, y)$, то оно в нашем случае однозначно в секторах IV, V и VI плоскости (u, v), а между характеристиками $\lambda = 0$ и $\mu = 0$ оно распадается на три однозначных ветви, обозначенные соответственно цифрами I, II, III. Структура «римановой поверхности», соответствующей этому отображению, характеризуется наличием «складок» вдоль характеристики $\lambda = 0$, соответственно переходу от ветви I к ветви III, а также вдоль характеристики $\mu = 0$, соответственно переходу от ветви II к ветви III. Следовательно, ориентировка ветвей отображения I, II, IV, V, VI должна быть одна и та же, а ветвь III должна обладать противоположной ориентировкой. Как известно [(3), стр. 14; (5), 3.3], ориентировка отображения $(u, v) \rightarrow (x, y)$ зависит от знака выражения

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 + K\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 = 4K\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\theta, \sigma)}. \tag{1}$$

Таким образом, необходимо доказать, что при наших условиях произведение

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\mu}$$

имеет отрицательный знак для ветвей I, II, IV, V и положительный знак для ветви III.

Докажем, что для ветвей I, IV

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}<0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mu}>0, \tag{2}$$

для ветвей II, V

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}>0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mu}<0, \tag{3}$$

для ветви III

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}>0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mu}>0. \tag{4}$$

Неравенства (2), (3), (4) докажем сначала для главного члена ψ; при этом нам необходимо получить более точные оценки, чтобы быть уверенными, что поправочные члены не повлияют на знак производных $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\mu}$. Для всех ветвей функции ζ имеют место формулы

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\mu}=c\rho^{-2/3}\left[\frac{1}{3}\zeta(t)+(1-t)\zeta'(t)\right]=c\rho^{-2/3}\mathfrak{F}[\zeta], \tag{4a}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda}=-c\rho^{-2/3}\left[\frac{1}{3}\zeta(t)-t\zeta'(t)\right]=-c\rho^{-2/3}\mathfrak{G}[\zeta]. \tag{4b}$$

Рассмотрим ветвь I. Согласно известному интегральному представлению гипергеометрической функции [(4), 14.6].

$$\zeta_I(t)=F\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3};\frac{1}{2};t\right)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\int_0^1 u^{-2/3}(1-u)^{-5/6}(1-ut)^{1/3}\,du. \tag{5}$$

Отсюда

$$\zeta_I'(t)=-\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\int_0^1 u^{1/3}(1-u)^{-5/6}(1-ut)^{-2/3}\,du \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{F}[\zeta_I]=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\int_0^1 u^{-2/3}(1-u)^{1/6}(1-ut)^{-2/3}\,du=$$
$$=\frac{1}{9}F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{3}{2};t\right)>0, \tag{7}$$

$$\mathfrak{G}[\zeta_I] = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\int\limits_0^1 u^{-2/3}(1-u)^{-5/6}(1-ut)^{-2/3}\,du =$$

$$= \frac{1}{9}F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right) > 0. \tag{8}$$

Формулы (7), (8) относятся, конечно, также к ветви IV. Тем самым доказано, что для ветвей I и IV действительно имеют место неравенства

$$\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\lambda} < 0, \quad \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial\mu} > 0. \tag{9}$$

Чтобы найти требуемые более точные оценки этих производных, необходимо исследовать поведение гипергеометрических функций, встречающихся в формулах (7) и (8), вблизи значений $t = 1$ и $t = -\infty$.

Функция $F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; t\right)$ ограничена вблизи $t = 1$. Отсюда немедленно следует оценка вида

$$\frac{a}{(\mu-\lambda)^{2/3}} < \frac{\partial\overline{\psi}_I}{\partial\mu} < \frac{A}{(\mu-\lambda)^{2/3}}, \tag{10}$$

где a, A — положительные постоянные.

Чтобы оценить функцию $\frac{\partial\overline{\psi}_{IV}}{\partial\mu}$, выразим $F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; t\right)$ посредством гипергеометрических функций от $\frac{1}{1-t}$. Получим

$$F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; t\right) = -\frac{3}{2^{4/3}}(1-t)^{-2/3}F\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}; \frac{4}{3}; \frac{1}{1-t}\right) +$$

$$+ \frac{3}{2^{2/3}}(1-t)^{-1/3}F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1-t}\right). \tag{11}$$

Отсюда вытекает оценка вида

$$\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/3}(-\lambda)^{1/3}} < \frac{\partial\overline{\psi}_{IV}}{\partial\mu} < \frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/3}(-\lambda)^{1/3}}. \tag{12}$$

Чтобы оценить $\frac{\partial\overline{\psi}_I}{\partial\lambda}$, выразим $F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right)$ через гипергеометрические функции переменной $1-t$. Получим

$$F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right) = \frac{1}{6}F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{3}{2}; 1-t\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)^{-1/2}F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}; \frac{1}{2}; 1-t\right). \tag{13}$$

Отсюда вытекает оценка

$$-\frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/6}(-\lambda)^{1/2}} < \frac{\partial\overline{\psi}_I}{\partial\lambda} < -\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/6}(-\lambda)^{1/2}}. \tag{14}$$

Наконец, чтобы оценить $\frac{\partial\overline{\psi}_{IV}}{\partial\lambda}$, выразим $F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right)$ через гипергеометрические функции переменной $\frac{1}{1-t}$

$$F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right)=2^{-4/3}(1-t)^{-2/3}F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}; \frac{4}{3}; \frac{1}{1-t}\right)+ \\ +2^{-2/3}(1-t)^{-1/3}F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1-t}\right). \tag{15}$$

Отсюда получаем оценку

$$-\frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/3}(-\lambda)^{1/3}}<\frac{\partial\bar{\psi}_{IV}}{\partial\lambda}<-\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/3}(-\lambda)^{1/3}}. \tag{16}$$

Производные ψ_{II} и ψ_V удовлетворяют аналогичным оценкам:

$$\frac{a}{(\mu-\lambda)^{2/3}}<\frac{\partial\bar{\psi}_{II}}{\partial\lambda}<\frac{A}{(\mu-\lambda)^{2/3}}, \tag{17}$$

$$\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/3}\mu^{1/3}}<\frac{\partial\psi_V}{\partial\lambda}<\frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/3}\mu^{1/3}}, \tag{18}$$

$$-\frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/6}\mu^{1/2}}<\frac{\partial\bar{\psi}_{II}}{\partial\mu}<-\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/6}\mu^{1/2}}, \tag{19}$$

$$-\frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/3}\mu^{1/3}}<\frac{\partial\psi_V}{\partial\mu}<-\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/3}\mu^{1/3}}. \tag{20}$$

Остается еще выяснить знаки производных $\frac{\partial\bar{\psi}_{III}}{\partial\lambda}$ и $\frac{\partial\psi_{III}}{\sigma\mu}$ и оценить их. Имеем

$$\zeta_{III}(t)=F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1-t\right)-F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right)= \\ =\frac{4}{9}F\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\xi(s), \tag{21}$$

где

$$s=t-\frac{1}{2}, \tag{22a}$$

$$\xi(s)=s+a_3s^3+a_5s^5+\ldots \tag{22b}$$

Так как $\xi(s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{1}{4}-s^2\right)\xi''-s\xi'+\frac{1}{9}\xi=0, \tag{23}$$

то для коэффициента ряда (22b) получаем формулу

$$a_{2n+1}=\frac{4^n\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(9-\frac{1}{9}\right)\cdots\left[(2n-1)^2-\frac{1}{9}\right]}{(2n+1)!}. \tag{24}$$

Ряд (22b) сходится при $|s|<\frac{1}{2}$, т. е. как раз в интересующей нас области. Поскольку все его коэффициенты положительны, то имеют место неравенства

$$\left.\begin{array}{c}\xi'(s)\geqslant 1,\\ s\xi'(s)>\xi(s)>0 \quad \text{при} \quad s>0,\\ s\xi'(s)<\xi(s)<0 \quad \text{при} \quad s<0.\end{array}\right\} \tag{25}$$

С другой стороны,

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F}[\zeta_{III}] = \frac{4}{9} F\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\xi(s) + \left(\frac{1}{2} - s\right)\xi'(s)\right],\\ \mathfrak{G}[\zeta_{III}] = \frac{4}{9} F\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\xi(s) - \left(\frac{1}{2} + s\right)\xi'(s)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Отсюда, применяя неравенства (25), находим

$$\mathfrak{F}[\zeta_{III}] > 0, \quad \mathfrak{G}[\zeta_{III}] < 0. \qquad (27)$$

Учитывая еще особенность функции $F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right)$ при $t=1$ и, соответственно, особенность функции $F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1-t\right)$ при $t=0$, получим оценки

$$\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/6}}[\mu^{-1/2} + (-\lambda)^{-1/2}] < \frac{\partial\psi_{III}}{\partial\lambda} < \frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/6}}[\mu^{-1/2} + (-\lambda)^{-1/2}], \qquad (28)$$

$$\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/6}}[\mu^{-1/2} + (-\lambda)^{-1/2}] < \frac{\partial\psi_{III}}{\partial\mu} < \frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/6}}[\mu^{-1/2} + (-\lambda)^{-1/2}]. \qquad (29)$$

Замечание. Формулы (26) могут быть использованы для суммирования гипергеометрического ряда $F\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. В самом деле, вдоль оси сопла

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{w^2}{(1-\tau)^3 K \frac{\partial\psi_{III}}{\partial\theta}}\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{1/\varkappa-1}.$$

При предельном переходе $x \to 0$ можно ψ_{III} заменить главным членом $c(\varkappa+1)$, как будет показано ниже. Вычисление при помощи формул (26) дает

$$\alpha = \lim_{x\to 0}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2^{-1/3}3^{4/3}}{F\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{c(\varkappa+1)^{2/3}}.$$

С другой стороны, согласно формуле (9) § 2 для аналитического сопла

$$\alpha = \frac{6^{1/3}}{(\varkappa+1)^{2/3}c},$$

откуда

$$F\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}. \qquad (30)$$

§ 4. Главный член при наличии разрыва производной скорости вдоль оси в центре сопла

Как известно, в сверхзвуковых течениях могут существовать так называемые «слабые разрывы», т. е. разрывы производных составляющих скорости по координатам; геометрическими местами таких разрывов являются линии Маха. Пользуясь методом годографа, можно показать, что существуют безударные симметричные сопла Лаваля, в которых образуются слабые разрывы вдоль линий Маха, исходящих из центра

сопла. Такое явление имеет место тогда и только тогда, когда производная $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}$ имеет разрыв в центре сопла (см. ниже).

Пусть предел этой величины при приближении к центру сопла со стороны сверхзвуковой области равен α_2, а соответствующий предел при приближении со стороны дозвуковых скоростей равен α_1. По аналогии с результатами § 2 мы должны ожидать, что главный член в секторе I определяется следующими краевыми условиями:

$$\bar{\psi}_I = -c_1\lambda^{1/3} \text{ на характеристике } \mu = 0, \tag{1a}$$

$$\bar{\psi}_I = \frac{c_2}{2}\mu^{1/3} \text{ на характеристике } \lambda = 0. \tag{1b}$$

Следовательно,

$$\bar{\psi}_{II} = -c_1\mu^{1/3} \text{ на характеристике } \lambda = 0, \tag{2a}$$

$$\bar{\psi}_{II} = \frac{c_2}{2}\lambda^{1/3} \text{ на характеристике } \mu = 0, \tag{2b}$$

$$\bar{\psi}_{III} = \frac{c_2}{2}\mu^{1/3} \text{ на характеристике } \lambda = 0, \tag{3a}$$

$$\bar{\psi}_{III} = \frac{c_2}{2}\lambda^{1/3} \text{ на характеристике } \mu = 0. \tag{3b}$$

Наконец, в секторах IV, V, VI $\bar{\psi}_-$ определяется следующими условиями Коши на переходной линии:

$$\bar{\psi} = -2^{-1/3}c_1\theta^{1/3}, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta} = -18^{-1/3}c_1\theta^{-1/3}. \tag{4b}$$

Во всех этих формах постоянные c_1 и c_2 имеют значения

$$c_1 = \frac{6^{1/3}}{(\varkappa+1)^{2/3}\alpha_1}, \tag{5a}$$

$$c_2 = \frac{6^{1/3}}{(\varkappa+1)^{2/3}\alpha_2}. \tag{5b}$$

В секторах III, IV, V решение $\bar{\psi}$ по существу ничем не отличается от того, которое мы рассматривали в предыдущих двух параграфах. Следовательно, его производные по характеристическим координатам в этих секторах знакопостоянны. Иначе обстоит дело в секторах I и II. Мы докажем, что эти производные остаются в секторах I и II знакопостоянными тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$1 \leqslant \frac{c_2}{c_1} \leqslant 4. \tag{6}$$

Это — основное содержание «условия смыкания». В следующем параграфе оно будет уточнено.

Перейдем к доказательству. Очевидно, $\bar{\psi}_I$ может быть представлено в виде

$$\bar{\psi}_I = (\mu-\lambda)^{1/3}\left\{\alpha F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; t\right) + \beta F\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1-t\right)\right\}, \tag{7}$$

где коэффициенты α и β определяются из уравнений

$$\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{c_2}{2}, \tag{8a}$$

$$\alpha+\frac{\beta}{2}=c_1. \tag{8b}$$

Положим, что скорость вдоль оси сопла растет слева направо. Тогда

$$c_1>0, \tag{9a}$$

$$c_2>0. \tag{9b}$$

Имеем

$$\frac{\partial\bar\psi_I}{\partial\mu}=(\mu-\lambda)^{-2/3}\left\{\frac{\alpha}{9}F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{3}{2};t\right)+\frac{\beta}{3}F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{1}{2};1-t\right)\right\}, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial\bar\psi_I}{\partial\lambda}=-(\mu-\lambda)^{-2/3}\left\{\frac{\alpha}{3}F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{1}{2};t\right)+\frac{\beta}{9}F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{3}{2};1-t\right)\right\}. \tag{10b}$$

Покажем, что выражения (10) знакопостоянны при одновременном выполнении условий (9) тогда и только тогда, когда

$$\alpha\geqslant 0, \tag{11a}$$

$$\beta\geqslant 0, \tag{11b}$$

причем, конечно, один из этих двух коэффициентов должен быть отличен от нуля.

В самом деле, если бы было $\alpha<0$, то при $t=1$ $(\lambda=0)$, мы имели бы $\frac{\partial\bar\psi_I}{\partial\lambda}=+\infty$. Чтобы тот же знак сохранился и при $t=0$, требовалось бы

$$\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{9}F\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3};\frac{3}{2};1\right)\leqslant 0$$

или

$$\alpha+\frac{\beta}{2}\leqslant 0,$$

в противоречии с условием (9a).

Точно так же предположение $\beta<0$ привело бы к неравенству

$$\frac{\alpha}{2}+\beta\leqslant 0,$$

в противоречии с условием (9b).

С другой стороны, при выполнении условий (11) условия (9) выполнены и производные $\frac{\partial\bar\psi_I}{\partial\lambda}$ и $\frac{\partial\bar\psi_I}{\partial\mu}$ знакопостоянны:

$$\frac{\partial\bar\psi_I}{\partial\lambda}<0, \tag{12a}$$

$$\frac{\partial\bar\psi_I}{\partial\mu}>0. \tag{12b}$$

Но, согласно уравнениям (8),

$$\alpha=\frac{1}{3}(4c_1-c_2),\quad \beta=\frac{2}{3}(c_2-c_1),$$

так что условия (11) оказываются эквивалентными условиям (6).

При заданной входной части сопла, т. е. заданном α_1, наиболее выгодным значением α_2, с точки зрения уменьшения габаритов сопла, будет,

очевидно, наибольшее из допустимых, т. е., согласно формуле (6), значение $\alpha_2 = \alpha_1$.

Укажем, наконец, еще неравенства, которым удовлетворяют производные $\bar{\psi}_I$ и $\bar{\psi}_{II}$ в случае наличия слабых разрывов:

$$\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\,[\mu^{-1/2}+(-\lambda)^{-1/2}] < \frac{\partial\bar{\psi}_I}{\partial\mu} < \frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\,[\mu^{-1/2}+(-\lambda)^{-1/2}], \quad (13a)$$

$$-\frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\,[\mu^{-1/2}+(-\lambda)^{-1/2}] < \frac{\partial\bar{\psi}_I}{\partial\lambda} < -\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\,[\mu^{-1/2}+(-\lambda)^{-1/2}], \quad (13b)$$

$$\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\,[\mu^{-1/2}+(-\lambda)^{-1/2}] < \frac{\partial\bar{\psi}_{II}}{\partial\lambda} < \frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\,[\mu^{-1/2}+(-\lambda)^{-1/2}], \quad (14a)$$

$$-\frac{A}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\,[\mu^{-1/2}+(-\lambda)^{-1/2}] < \frac{\partial\bar{\psi}_{II}}{\partial\mu} < -\frac{a}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\,[\mu^{-1/2}+(-\lambda)^{-1/2}]. \quad (14b)$$

§ 5. Исследование поправочных членов

В данном параграфе мы дадим точную формулировку и доказательство упомянутых в введении условий продолжительности и смыкания.

Формулируем сперва условие продолжамости.

Предпосылка. *Пусть задано некоторое решение уравнения* (2) § 2

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+\eta\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+b(\eta)\,\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0, \quad (1)$$

удовлетворяющее следующим условиям:

(a) *Оно задано в области вида*

$$-\bar{\theta}<\theta<\bar{\theta}, \quad \bar{\eta}>\eta\geqslant 0. \quad (2)$$

(b) *Оно — нечетная функция* θ:

$$\psi(\theta,\eta) = -\psi(-\theta,\eta). \quad (3)$$

(c) *Оно удовлетворяет вдоль оси* θ *условиям вида*

$$\left.\begin{aligned} \psi(\theta,0) &= \tau(\theta) = -2^{-1/3}c_1\theta^{1/3}+\delta\tau, \\ \psi_\eta(\theta,0) &= \nu(\theta) = -18^{-1/3}c_1\theta^{-1/3}+\delta\nu, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \delta\tau &= O(\theta), \quad \frac{d\delta\tau}{d\theta}=O(1), \\ \delta\nu &= O(\theta^{1/3}), \quad \frac{d\delta\nu}{d\theta}=O(\theta^{-2/3}). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Этому решению соответствует некоторое дозвуковое газовое течение в плоскости (x, y), *примыкающее к линии, вдоль которой скорость потока равна скорости звука. Пусть точке* $\theta=\eta=0$ *соответствует начало координат в плоскости.*

Утверждения. *Тогда упомянутое дозвуковое течение может быть распространено на область плоскости* (x, y), *содержащую начало координат, как внутреннюю точку. Продолженное течение будет смешанным до- и сверхзвуковым течением, не содержащим скачков уплотнения.*

Разделим указанную окрестность начала координат («центра сопла») на секторы I—VI, как это показано на фиг. 1. В каждом из этих

секторов рассмотрим функцию тока ψ, как функцию θ, η. Тогда получим шесть ветвей ψ_I, $\psi_{II}, \ldots, \psi_{VI}$.

В нашем случае ветвь ψ_{VI} считается заданной, а ветви $\psi_I, \ldots, \psi_V$ подлежат определению. При этом определяются единственным образом ветви ψ_{IV} и ψ_V посредством условий Коши (4). При определении ветвей ψ_I, ψ_{II}, ψ_{III} имеется, однако, некоторый произвол. Эти ветви находятся по краевым условиям, заданным на характеристиках, следующим образом:

Функция ψ_{IV} вдоль характеристики $\mu = 0$ имеет значение

$$\psi_{IV} = -c_1 \lambda^{1/3} + \delta k(\lambda), \tag{6}$$

где, как будет доказано,

$$\delta k = O(\lambda), \quad \frac{d\delta k}{d\lambda} = O(1). \tag{6a}$$

Соответственно вдоль характеристики $\lambda = 0$

$$\bar{\psi}_V = -c_1 \mu^{1/3} + \delta k(\mu). \tag{7}$$

Тогда ветви ψ_I, ψ_{II}, ψ_{III} определяются на основании условий:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_I = -c_1 \lambda^{1/3} + \delta k(\lambda) \quad \text{на характеристике} \quad \mu = 0, \\ &\psi_I = \frac{c_2}{2} \mu^{1/3} + \delta t(\mu) \quad \text{на характеристике} \quad \lambda = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{II} = -c_1 \mu^{1/3} + \delta k(\mu) \quad \text{на характеристике} \quad \lambda = 0, \\ &\psi_{II} = \frac{c_2}{2} \lambda^{1/3} + \delta l(\mu) \quad \text{на характеристике} \quad \mu = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{III} = \frac{c_2}{2} \mu^{1/3} + \delta l(\mu) \quad \text{на характеристике} \quad \lambda = 0, \\ &\psi_{III} = \frac{c_2}{2} \lambda^{1/3} + \delta l(\lambda) \quad \text{на характеристике} \quad \mu = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Для того чтобы полученная таким образом функция ψ имела производные на λ и μ, удовлетворяющие неравенствам (2), (3), (4) § 3, достаточно, чтобы при этом были выполнены следующие условия:

$$1 \leqslant \frac{c_2}{c_1} \leqslant 4, \tag{11}$$

$$\delta l(\lambda) = O(\lambda), \quad \frac{d\delta l}{d\lambda} = O(1). \tag{11a}$$

Условия (11) и (11a) и представляют собой упомянутые в введении «условия смыкания». При выполнении этих условий полученное на основании найденной функции $\psi = \psi(\theta, \eta)$ отображение плоскости потока на плоскость годографа будет однозначным в достаточно малой окрестности начала координат, в связи с чем получается безударное сопло Лаваля.

Для доказательства требуются некоторые оценки, относящиеся к функции Римана $u(\lambda, \mu; \lambda', \mu')$ уравнения (1), а также к ядрам $g(\lambda, \mu; t)$ и $h(\lambda, \mu; t)$, данным в другой работе автора (7).

Приведем эти оценки, согласно указанной работе:

$$u=(\lambda,\mu;\ \lambda',\mu')=O(1)\,\frac{(\mu'-\lambda')^{1/3}}{(\mu-\lambda')^{1/6}(\mu'-\lambda)^{1/6}}, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\lambda'}+\frac{u}{3(\mu'-\lambda')}&=O(1)\,\frac{(\mu-\lambda)^{2/3}}{(\mu-\lambda')^{5/6}(\mu'-\lambda)^{5/6}},\\ \frac{\partial u}{\partial\mu'}-\frac{u}{3(\mu'-\lambda')}&=O(1)\,\frac{(\mu-\lambda)^{2/3}}{(\mu-\lambda')^{5/6}(\mu'-\lambda)^{5/6}}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Далее, если ввести переменные

$$s=\frac{\mu-\mu'}{\mu-\lambda},\quad t=\frac{\lambda'-\lambda}{\mu-\lambda} \tag{14}$$

в обозначение

$$w(\lambda,\ \mu;\quad s,\ t)=u(\lambda,\ \mu;\quad \lambda',\ \mu'), \tag{15}$$

имеют место оценки

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial\lambda}&=\frac{O(1)}{\mu-\lambda}\,\frac{(\mu'-\lambda')^{1/3}}{(\mu-\lambda')^{1/6}(\mu'-\lambda)^{1/6}},\\ \frac{\partial w}{\partial\mu}&=\frac{O(1)}{\mu-\lambda}\,\frac{(\mu'-\lambda')^{1/3}}{(\mu-\lambda')^{1/6}(\mu'-\lambda)^{1/6}}.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Приняв во внимание уравнения

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\lambda}&=\frac{\partial w}{\partial\lambda}-\frac{\mu-\lambda'}{\mu-\lambda}\frac{\partial u}{\partial\lambda'}-\frac{\mu-\mu'}{\mu-\lambda}\frac{\partial u}{\partial\mu'},\\ \frac{\partial u}{\partial\mu}&=\frac{\partial w}{\partial\mu}-\frac{\lambda'-\lambda}{\mu-\lambda}\frac{\partial u}{\partial\lambda'}-\frac{\mu'-\lambda}{\mu-\lambda}\frac{\partial u}{\partial\mu'},\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

получим, на основании оценок (12), (13), (16), следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\lambda}&=O(1)\,\frac{(\mu-\lambda')^{1/6}}{(\mu-\lambda)^{1/3}(\mu'-\lambda)^{5/6}},\\ \frac{\partial u}{\partial\mu}&=O(1)\,\frac{(\mu'-\lambda)^{1/6}}{(\mu-\lambda)^{1/3}(\mu-\lambda')^{5/6}}.\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Наконец, для ядер $g(\lambda,\ \mu;\quad t)$ и $h(\lambda,\ \mu;\quad t)$ имеем оценки

$$g(\lambda,\ \mu;\quad t)=\frac{O(1)}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}},\qquad h(\lambda,\ \mu;\quad t)=\frac{O(1)\,(\mu-\lambda)^{2/3}}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}, \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial\lambda}&=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/3}t^{5/3}(1-t)^{5/6}},\qquad &\frac{\partial h}{\partial\lambda}&=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/3}t^{1/6}(1-t)^{1/6}},\\ \frac{\partial g}{\partial\mu}&=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/3}t^{5/6}(1-t)^{5/6}},\qquad &\frac{\partial h}{\partial\mu}&=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/3}t^{1/6}(1-t)^{1/6}}.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Искомую функцию ψ мы представим в виде

$$\psi=\overline{\psi}+\delta\psi, \tag{21}$$

где $\overline{\psi}$ — изученный в предыдущих трех параграфах главный член, а $\delta\psi$ — поправка.

Обозначим еще для сокращения через $L(\psi)$ левую часть уравнения (4) § 2.

Рассмотрим сперва функцию $\delta\psi_{IV}$. Ее можно представить в виде

$$\delta\psi_{IV} = \delta_1\psi_{IV} + \delta_2\psi_{IV}, \tag{22}$$

где $\delta_1\psi_{IV}$ представляет собой решение уравнения

$$L(\delta_1\psi_{IV}) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{b}{(\mu-\lambda)^{1/3}} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\mu}\right) \overline{\psi}_{IV}, \tag{23}$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$\delta_1\psi_{IV} = \frac{\partial\delta_1\psi_{IV}}{\partial\eta} = 0 \quad \text{на линии } \eta = 0, \tag{24}$$

а $\delta_2\psi_{IV}$ — решение уравнения

$$L(\delta_2\psi_{IV}) = 0, \tag{25}$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$\delta_2\psi_{IV} = \delta\tau(\theta), \qquad \frac{\partial\delta_2\psi_{IV}}{\partial\eta} = \delta\nu(\theta) \quad \text{на линии } \eta = 0. \tag{26}$$

Следовательно,

$$\delta_1\psi_{IV} = \\ = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \iint\limits_{\lambda<\lambda'<\mu'<\mu} u(\lambda,\ \mu;\ \ \lambda',\ \mu') \frac{b(\lambda',\ \mu')}{(\mu'-\lambda')^{1/3}} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda'} - \frac{\partial}{\partial\mu'}\right) \overline{\psi}_{IV}\, d\lambda' d\mu' \tag{27}$$

и, на основании работы автора ([6]),

$$\delta_2\psi_{IV} = \\ = \int\limits_0^1 g(\lambda,\ \mu;\ \ t)\,\delta\tau[\lambda + (\mu-\lambda)t]\,dt + \int\limits_0^1 h(\lambda,\ \mu;\ \ t)\,\delta\nu[\lambda + (\mu-\lambda)t]\,dt. \tag{28}$$

Для множителя, стоящего при $u(\lambda, \mu;\ \lambda', \mu')$, имеем, согласно формулам (12), (16) § 1, оценку

$$\frac{b(\lambda',\ \mu')}{(\mu'-\lambda')^{1/3}} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda'} - \frac{\partial}{\partial\mu'}\right) \overline{\psi}_{IV} = \frac{O(1)}{(\mu'-\lambda')^{2/3}(-\lambda')^{1/3}}. \tag{29}$$

Если теперь использовать оценки (5), (12), (18), (19), (20), (29), то получим

$$\frac{\partial\delta_1\psi_{VI}}{\partial\lambda} = O(1), \qquad \frac{\partial\delta_1\psi_{VI}}{\partial\mu} = O(1), \tag{30}$$

$$\frac{\partial\delta_2\psi_{IV}}{\partial\lambda} = O(1)\left(\frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/3}, \qquad \frac{\partial\delta_2\psi_{IV}}{\partial\mu} = O(1)\left(\frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/3}, \tag{31}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial\delta\psi_{IV}}{\partial\lambda} = O(1)\left(\frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/3}, \qquad \frac{\partial\delta\psi_{IV}}{\partial\mu} = O(1)\left(\frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/3}. \tag{32}$$

Подробно вывод этих оценок дан в приложении.

Сопоставляя формулы (32) с формулами (12), (16) § 3, мы видим, что в малой окрестности точки $\lambda = \mu = 0$ должно быть

$$\frac{\partial\psi_{IV}}{\partial} < 0, \quad \frac{\partial\psi_{IV}}{\partial\mu} > 0. \tag{33}$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial\psi_V}{\partial\lambda} > 0, \quad \frac{\partial\psi_V}{\partial\mu} < 0. \tag{34}$$

На характеристике $\mu = 0$, согласно первой формуле (31),

$$\frac{\partial\delta\psi_{IV}}{\partial\lambda} = O(1), \quad \delta\psi_{IV} = \delta k(\lambda) = O(\lambda), \tag{35}$$

как это мы утверждали выше (см. формулы (6а)).

Поправочный член функции ψ_I мы представляем в виде

$$\delta\psi_I = \delta_1\psi_I + \delta_2\psi_I, \tag{36}$$

где $\delta_1\psi_I$ — решение уравнения

$$L(\delta_1\psi_I) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{b}{(\mu-\lambda)^{1/3}} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\mu}\right)\bar{\psi}_I, \tag{37}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} &\delta_1\psi_I = 0 \text{ на характеристике } \lambda = 0, \\ &\delta_1\psi_I = 0 \text{ на характеристике } \mu = 0, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

а $\delta_2\psi_I$ — решение уравнения

$$L(\delta_2\psi_I) = 0, \tag{39}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} &\delta_2\psi_I = \delta k(\lambda) \text{ на характеристике } \mu = 0, \\ &\delta_2\psi_I = \delta l(\mu) \text{ на характеристике } \lambda = 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Формулы для этих поправок будут:

$$\delta_1\psi_I = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \int_0^\lambda\int_0^\mu u(\lambda, \mu;\ \lambda';\ \mu') \frac{b(\lambda', \mu')}{(\mu'-\lambda')^{1/3}} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda'} - \frac{\partial}{\partial\mu'}\right)\bar{\psi}_I\, d\lambda'\, d\mu', \tag{41}$$

$$\delta_2\psi_I = \int_0^\lambda u(\lambda, \mu;\ \lambda', 0)\left\{\delta k' \left[\frac{1}{6\lambda'} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{b(\lambda', 0)}{(-\lambda')^{1/3}}\right]\delta k\right\} d\lambda' +$$

$$+ \int_0^\mu u(\lambda, \mu;\ 0, \mu')\left\{\delta l' + \left[\frac{1}{6\mu'} - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{b(0, \mu')}{\mu'^{1/3}}\right]\delta l\right\} d\mu'. \tag{42}$$

Для правой части уравнения (37) мы имеем в случае $c_2 = c_1$ оценку

$$\frac{b(\lambda, \mu)}{(\mu-\lambda)^{1/3}} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\mu}\right)\psi_I = \frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/2}(-\lambda)^{1/2}}, \tag{43}$$

вытекающую из формул (10), (14), § 3. В случае $c_2 \neq c_1$ получаем на основании формул (13) § 4 оценку

$$\frac{b(\lambda, \mu)}{(\mu-\lambda)^{1/3}} \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\mu}\right)\bar{\psi}_I = \frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/2}}\left[\mu^{-1/2} + (-\lambda)^{-1/2}\right]. \tag{44}$$

Используя, кроме оценок (43) или (44), еще оценки (6а), (11а), (12), (18), получаем на основании формул (41) и (42) следующие оценки:

$$\frac{\partial\delta_1\psi_I}{\partial\lambda} = O(1)\left(\frac{\mu-\lambda}{-\lambda}\right)^{1/2}, \quad \frac{\partial\delta_1\psi_I}{\partial\mu} = O(1) \text{ в случае } c_2 = c_1 \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\delta_1\psi_I}{\partial\lambda} = O(1)(\mu-\lambda)^{1/2}\left[\mu^{-1/2} + (-\lambda)^{-1/2}\right], \\ &\frac{\partial\delta_1\psi_I}{\partial\mu} = O(1)(\mu-\lambda)^{1/2}\left[\mu^{-1/2} + (-\lambda)^{-1/2}\right], \end{aligned}\right\} \text{ в случае } c_2 \neq c_1; \tag{46}$$

$$\frac{\partial\delta_2\psi_I}{\partial\lambda} = O(1), \qquad \frac{\partial\delta_2\psi_I}{\partial\mu} = O(1). \tag{47}$$

Подробнее эти оценки выведены в приложении.

Сопоставляя формулы (45), (46), (47) с формулами (10), (14) § 3 или, соответственно, с формулами (13) § 4, мы видим, что в малой окрестности точки $\lambda = \mu = 0$ действительно имеют место неравенства

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial \lambda} < 0, \quad \frac{\partial \psi_I}{\partial \mu} > 0. \tag{48}$$

Аналогично доказываются неравенства:

$$\frac{\partial \psi_{II}}{\partial \lambda} > 0, \quad \frac{\partial \psi_{II}}{\partial \mu} < 0. \tag{49}$$

Что касается поправки $\delta\psi_{III}$, то для нее, как легко показать, имеют место оценки (46). Сопоставляя их с формулами (28), (29) § 3, получим

$$\frac{\partial \psi_{III}}{\partial \lambda} > 0, \quad \frac{\partial \psi_{III}}{\partial \mu} > 0. \tag{50}$$

Таким образом, условия продолжимости и смыкания доказаны.

Обратимся к вопросу об образовании слабых разрывов. Легко видеть, что вдоль линии Маха $\mu = 0$ образуется слабый разрыв тогда и только тогда, когда налицо разрыв величины $\frac{\partial \psi}{\partial \mu}$; если при приближении к этой линии Маха с обеих сторон $\frac{\partial \psi}{\partial \mu}$ стремится к $\pm\infty$, то слабого разрыва не будет. То же самое относится к производной $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ вдоль линии Маха $\lambda = 0$. Отсюда заключаем, что вдоль линий Маха, исходящих с центра сопла и направленных вниз по потоку, слабых разрывов не будет, так как там $\frac{\partial \psi}{\partial \mu} = \infty$ (или, соответственно, $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \infty$). Исключение составляет лишь случай $c_2 = 4c_1$.

Что касается линий Маха, направленных вверх по течению, то в случае $c_2 \neq c_1$ имеем вдоль них слабый разрыв. В самом деле, вдоль линий Маха $\mu = 0$ функция $\frac{\partial \psi_{IV}}{\partial \mu}$ останется ограниченной, в то время как $\frac{\partial \psi_I}{\partial \mu}$ стремится к бесконечности.

В случае $c_2 = c_1$ слабых разрывов не будет. В самом деле, обозначим через $\chi(\lambda)$ разность

$$\chi(\lambda) = \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi_{IV}}{\partial \mu}\right)_{\mu=0}. \tag{51}$$

Согласно формулам (32), (45), (47),

$$\chi(\lambda) = O(1). \tag{52}$$

С другой стороны, на основе дифференциального уравнения (4) § 2 получаем для $\chi(\lambda)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\chi}{d\lambda} = \left[-\frac{1}{6\lambda} + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{b(\lambda,\ 0)}{\lambda^{1/3}}\right]\chi, \tag{53}$$

откуда

$$\chi = C\,|\lambda|^{-1/6}\, e^{\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\int \frac{b(\lambda,\,0)}{\lambda^{1/3}}\,d\lambda}. \tag{54}$$

Однако, учитывая формулу (52), получаем $C=0$ и, следовательно,

$$\chi(\lambda) \equiv 0, \tag{55}$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Исследование одной вспомогательной функции С. А. Чаплыгина

Этот и следующий параграфы содержат предварительные исследования, необходимые для построения течений с дозвуковой скоростью, удовлетворяющих условию продолжимости.

Иными словами, речь идет о построении суживающейся части безударного сопла. Эти течения будут построены при помощи рядов частных решений уравнения (1) § 2, использованных С. А. Чаплыгиным в его теории газовых струй ([3]).

Указанные решения имеют вид

$$\psi_\nu(\theta,\ \sigma) = \zeta_\nu(\sigma)\sin 2\nu\theta, \tag{1}$$

где $\zeta_\nu(\sigma)$ — решение дифференциального уравнения

$$\zeta_\nu'' = 4\nu^2 K\zeta_\nu, \tag{2}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\zeta_\nu(0) = 1, \quad \zeta_\nu(+\infty) = 0. \tag{3}$$

Если пользоваться независимой переменной τ, то получим

$$\zeta_\nu(\sigma) = \frac{z_\nu(\tau)}{z_\nu(\tau^*)}, \tag{4}$$

где

$$z_\nu(\tau) = \tau^\nu F(a_\nu,\ b_\nu;\ \ 2\nu+1;\ \ \tau). \tag{5}$$

Параметры a_ν и b_ν гипергеометрической функции в формуле (5) определяются из уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_\nu + b_\nu &= 2\nu - \beta, \\ a_\nu b_\nu &= -\beta\nu\,(2\nu+1). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В исследованиях С. А. Чаплыгина играет существенную роль вспомогательная функция

$$x_\nu(\tau) = \frac{\tau}{\nu}\frac{z_\nu'}{z_\nu} = \frac{\tau}{\nu}\frac{d\sigma}{d\tau}\frac{\zeta_\nu'}{\zeta_\nu}. \tag{7}$$

Нам необходимо исследовать зависимость этой функции от индекса ν при $\tau=\tau^*$ и больших ν. Вместо этого можно, конечно, исследовать зависимость величины $\zeta_\nu'(0)$ от индекса ν. Предварительный результат по этому вопросу был получен автором еще в работе ([7]). Было доказано, что

$$\zeta_\nu'(0) = C\nu^{2/3} + O(1). \tag{8}$$

В данном параграфе мы уточним этот результат и докажем, что $\zeta_\nu(0)$ может быть разложено в асимптотический ряд по убывающим степеням величины $\nu^{2/3}$:

$$\zeta_\nu(0)=\nu^{2/3}\left(C_0+\frac{C_1}{\nu^{2/3}}+\frac{C_2}{\nu^{4/3}}+\dots+\frac{C_i}{\nu^{2i/3}}\right)+O\left(\frac{1}{\nu^{2i/3}}\right) \qquad (9)$$

при больших ν и произвольном i.

Приступим к доказательству. Для простоты написания будем в дальнейшем вместо $\zeta_\nu(\sigma)$ писать $\zeta(\sigma)$. Заметим прежде всего, что

$$K=a\sigma-b\sigma^2+\dots, \qquad (10)$$

где

$$a=2\left(\frac{2\beta+1}{2\beta}\right)^{3\beta+1}=2\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{3}{\varkappa-1}+1}. \qquad (10a)$$

Разложим теперь $\zeta(\sigma)$ на слагаемые

$$\zeta=\bar\zeta+\zeta^{(1)}+\zeta^{(2)}+\dots+\zeta^{(i-1)}+z^{(i)}, \qquad (11)$$

где $\bar\zeta$, $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, ..., $\zeta^{(i-1)}$, $z^{(i)}$ — решения дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\bar\zeta'' - 4\nu^2a\sigma\bar\zeta = 0,\\
&\zeta^{(1)''} - 4\nu^2a\sigma\zeta^{(1)} = -4\nu^2(a\sigma-K)\bar\zeta,\\
&\zeta^{(2)''} - 4\nu^2a\sigma\zeta^{(2)} = -4\nu^2(a\sigma-K)\zeta^{(1)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\zeta^{(i-1)''} - 4\nu^2a\sigma\zeta^{(i-1)} = -4\nu^2(a\sigma-K)\zeta^{(i-2)},\\
&z^{(i)''} - 4\nu^2Kz^{(i)} = -4\nu^2(a\sigma-K)\zeta^{(i-1)},
\end{aligned}$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{aligned}
&\bar\zeta(0)=1,\quad \bar\zeta(\infty)=0,\\
&\zeta^{(k)}(0)=\zeta^{(k)}(\infty)=0,\quad (k=1,\,2,\,\dots,\,i-1),\\
&z^{(i)}(0)=z^{(i)}(\infty)=0.
\end{aligned}$$

Имеем

$$\bar\zeta(\sigma)=\lambda\,(2^{2/3}a^{1/3}\nu^{1/3}\sigma), \qquad (12)$$

где $\lambda(\xi)$ — решение дифференциального уравнения

$$\lambda''(\xi)-\xi\lambda(\xi)=0, \qquad (13)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\lambda(0)=1,\quad \lambda(\infty)=0. \qquad (13a)$$

Это решение может быть написано в явном виде:

$$\lambda(\xi)=\frac{2\cdot 3^{1/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi\rho-\frac{1}{3}\rho^3}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\xi\rho\right)d\rho. \qquad (14)$$

Согласно результату Ф. Трикоми [(3), гл. III, формула (12)], у которого мы заимствовали формулу (14), функция $\lambda(\xi)$ удовлетворяет при любом положительном N неравенству вида

$$0<\lambda(\xi)<\frac{A}{\xi^N}\quad(\xi>0) \qquad (15)$$

При положительных ξ она будет убывающей функцией. Докажем, что при любом ε $(0 < \varepsilon < 1)$ существует число A, не зависящее от ν, и такое, что

$$|\zeta^{(k)}| < \frac{A\lambda^{\varepsilon}(\xi)}{\nu^{2k/3}}, \qquad (16)$$

где

$$\xi = 2^{2/3} a^{1/3} \nu^{2/3} \sigma. \qquad (17)$$

Для этой цели рассмотрим сперва дифференциальное уравнение

$$\tilde{\zeta}'' - 4\nu^2 a \tilde{\zeta} = -4\nu^2 f(\sigma), \qquad (18)$$

где $f(\sigma)$ — функция, стремящаяся достаточно быстро к нулю при $\sigma \to \infty$.

Одно из решений уравнения (18) может тогда быть найдено в виде

$$\zeta^{(k)}(\sigma) = 4\nu^2 \bar{\zeta}(\sigma) \int_0^{\sigma} \frac{\int_{\sigma'}^{\infty} f(\rho)\bar{\zeta}(\rho)\,d\rho}{\bar{\zeta}^2(\sigma')}\,d\sigma'. \qquad (19)$$

На этом основании можно доказать, путем индукции одновременно с оценкой (16) рекуррентную формулу

$$\zeta^{(k)}(\sigma) = 4\nu^2 \bar{\zeta}(\sigma) \int_0^{\sigma} \frac{\int_{\sigma'}^{\infty} [a\rho - K(\rho)]\,\zeta^{(k-1)}(\rho)\,\zeta(\rho)\,d\rho}{\bar{\zeta}^2(\sigma')}\,d\sigma'. \qquad (20)$$

В самом деле, из формул

$$\left.\begin{aligned} &|\zeta^{(k-1)}(\rho)| < \frac{\bar{A}\lambda^{\delta}(v)}{\nu^{2(k-1)/3}} \quad (\varepsilon < \delta < 1),\\ &\lambda(\xi') \geqslant \lambda(\xi),\\ &\lambda(\xi') \geqslant \lambda(v), \quad (\xi' = 2^{2/3} a^{1/3} \nu^{2/3}\sigma'), \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

совместно с формулами (12) и (15), следует

$$|\zeta^{(k)}(\sigma)| \leqslant 4\nu^2\lambda^{\varepsilon}(\xi) \int_0^{\xi} \frac{\lambda^{1-\varepsilon}(\xi)}{\lambda^{1-\varepsilon}(\xi')} \left[\int_{\xi'}^{\infty} \frac{C}{\nu^{4/3}} v^2 \frac{\bar{A}\lambda^{\delta-\varepsilon}(v)}{\nu^{2(k-1)/3}} \frac{\lambda^{1+\varepsilon}(v)}{\lambda^{1+\varepsilon}(\xi')} \cdot \frac{dv}{2^{2/3}a^{1/3}\nu^{2/3}}\right] \frac{d\xi'}{2^{2/3}a^{1/3}\nu^{2/3}} \leqslant \frac{D\lambda^{\varepsilon}(\xi)}{\nu^{2k/3}} \int_0^{\infty} \left[\int_{\xi'}^{\infty} v^2\lambda^{\delta-\varepsilon}(v)\,dv\right] d\xi \leqslant \frac{A\lambda^{\varepsilon}(\xi)}{\nu^{2k/3}}. \qquad (22)$$

Таким образом, формулы (16) и (20) доказаны.

Что касается функции $z^{(i)}$, то для нее имеем

$$z^{(i)}(\sigma) = 4\nu^2\zeta(\sigma) \int_0^{\sigma} \frac{\int_{\sigma'}^{\infty} [a\rho - K(\rho)]\,\zeta^{(i-1)}(\rho)\,\zeta(\rho)\,d\rho}{\zeta^2(\sigma')}\,d\sigma. \qquad (23)$$

В самом деле, согласно С. А. Чаплыгину [(3), стр. 19],

$$\zeta(\sigma) \leqslant \zeta(\sigma'), \quad \zeta(\rho) \leqslant \zeta(\sigma'), \qquad (24)$$

откуда

$$|z^{(i)}| \leqslant \frac{D}{\nu^{2i/3}} \int_0^{\infty} \left[\int_{\xi'}^{\infty} v^2\lambda^{\varepsilon}(v)\,dv\right] d\xi' \leqslant \frac{A}{\nu^{2i/3}}. \qquad (25)$$

Отсюда следует, что функция $z^{(i)}$ ограничена. Согласно Чаплыгину, решения уравнения (2) при $\sigma \to \infty$ стремятся либо к нулю, либо

к бесконечности [(3), стр. 16]. Следовательно, должно быть $z^{(i)}(\infty)=0$. Таким образом, формула (11) доказана.

Продифференцируем теперь уравнения (20) и (23) при $\sigma=0$. Получаем

$$\zeta^{(k)\prime}(0)=4\nu^2\int_0^\infty [a\rho-K(\rho)]\,\zeta^{(k-1)}(\rho)\,\overline{\zeta}(\rho)\,d\rho, \tag{26}$$

$$z^{(i)\prime}(0)=4\nu^2\int_0^\infty [a\rho-K(\rho)]\,\zeta^{(i-1)}(\rho)\,\zeta(\rho)\,d\rho \tag{27}$$

и отсюда

$$|\zeta^{(k)\prime}(0)|<\frac{A}{\nu^{2/3\,(k-1)}}, \tag{28}$$

$$|z^{(i)\prime}(0)|<\frac{A}{\nu^{2/3\,(i-1)}}. \tag{29}$$

Пусть теперь будет $i=2$. Имеем

$$\zeta'(0)=\overline{\zeta}'(0)+\zeta^{(1)\prime}(0)+z^{(2)\prime}(0), \tag{30}$$

$$\overline{\zeta}'(0)=2^{2/3}a^{1/3}\nu^{2/3}\lambda'(0), \tag{31}$$

$$\zeta^{(2)\prime}(0)=4\nu^2\int_0^\infty [a\rho-K(\rho)]\,\lambda^2 v\,\frac{dv}{2^{2/3}a^{1/3}\nu^{2/3}}=$$

$$=2^{4/3}a^{-1/3}\nu^{4/3}\int_0^\infty [b\rho^2+O(\rho^3)]\,\lambda^2(v)\,dv=$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^\infty v^2\lambda^2(v)\,dv+O\left(\frac{1}{\nu^{2/3}}\right) \tag{32}$$

$$z^{(2)\prime}(0)=O\left(\frac{1}{\nu^{2/3}}\right). \tag{33}$$

Отсюда следует

$$\zeta'(0)=2^{2/3}a^{1/3}\lambda'(0)\,v^{2/3}+\frac{b}{a}\int_0^\infty v^2\lambda^2(v)\,dv+O\left(\frac{1}{\nu^{2/3}}\right). \tag{34}$$

Таким образом, асимптотическая формула (9) доказана в случае $i=2$. При $i>2$ доказательство ведется аналогично.

§ 7. Исследование рядов Фурье вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n^{2k/3}}$

Исследуем аналитический характер функции

$$f(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n^{2k/3}}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

в окрестности точки $\varphi=0$.

Ряд (1) может быть суммирован в виде определенного интеграла. В самом деле,

$$\Gamma\left(\frac{2k}{3}\right)\frac{e^{ni\varphi}}{n^{2k/3}}=\int_0^\infty x^{\frac{2k}{3}-1}\,e^{n(-x+i\varphi)}\,dx, \tag{2}$$

откуда

$$\Gamma\left(\frac{2k}{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{ni\varphi}}{n^{2k/3}}=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\frac{2k}{3}-1}dx}{e^{x-i\varphi}-1}. \qquad (3)$$

Далее,

$$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{z}+\Phi(z), \qquad (4)$$

где $\Phi(z)$ — функция, голоморфная при $z=0$. Отсюда вытекает

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{\frac{2k}{3}-1}dx}{e^{x-i\varphi}-1}=\int\limits_1^{\infty}\frac{x^{\frac{2k}{3}-1}dx}{e^{x-i\varphi}-1}+\int\limits_0^1\Phi(x-i\varphi)\,x^{\frac{2k}{3}-1}dx+\int\limits_0^1\frac{x^{\frac{2k}{3}-1}dx}{x-i\varphi}. \qquad (5)$$

Первые два слагаемых правой части являются голоморфными функциями φ при $\varphi=0$. Что же касается третьего слагаемого, нас интересует ее мнимая часть

$$I=\varphi\int\limits_0^1\frac{x^{\frac{2k}{3}-1}dx}{x^2+\varphi^2}. \qquad (6)$$

Вводя новую переменную u, согласно уравнению

$$x=\varphi u^{3/2}, \qquad (7)$$

получим

$$I=\frac{3}{2}\varphi^{\frac{2k}{3}-1}\int\limits_0^{\varphi^{-2/3}}\frac{u^{k-1}du}{u^3+1}. \qquad (8)$$

Пусть $l-1$ — остаток $k-1$ при делении на 3. Тогда

$$\frac{u^{k-1}}{u^3+1}=u^{k-4}-u^{k-7}+\ldots\pm u^{l-1}\mp\frac{u^{l-1}}{u^3+1}, \qquad (9)$$

$$\int\frac{u^{k-1}du}{u^3+1}=\frac{u^{k-3}}{k-3}-\frac{u^{k-6}}{k-6}+\ldots\pm\frac{u^l}{l}\mp\int\frac{u^{l-1}du}{u^3+1}. \qquad (9a)$$

Отсюда

$$I=\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi}{k-3}-\frac{\varphi^3}{k-6}+\ldots\right)\mp\frac{3}{2}\varphi^{\frac{2k}{3}-1}\int\limits_0^{\varphi^{-2/3}}\frac{u^{l-1}du}{u^3+1}. \qquad (10)$$

Рассмотрим теперь отдельно случаи

$$\left.\begin{array}{lll}(a) & l=1 & [k\equiv 1 \pmod 3].\\ (b) & l=2 & [k\equiv 2 \pmod 3].\\ (c) & l=3 & [k\equiv 0 \pmod 3].\end{array}\right\} \qquad (11)$$

Имеем

$$\int\frac{du}{u^3+1}=\frac{1}{3}\ln\frac{u+1}{\sqrt{u^2-u+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}, \qquad (12)$$

$$\int\frac{udu}{u^3+1}=\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{u^2-u+1}}{u+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2u-1}{\sqrt{3}}, \qquad (13)$$

$$\int\frac{u^2du}{u^3+1}=\frac{1}{3}\ln(u^3+1). \qquad (14)$$

Следовательно,

$$\int_0^{\varphi^{-2/3}} \frac{du}{u^3+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + F(\varphi^{2/3}). \tag{15}$$

$$\int_0^{\varphi^{-2/3}} \frac{u\,du}{u^3+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + G(\varphi^{2/3}), \tag{16}$$

$$\int_0^{\varphi^{-2/3}} \frac{u^2du}{u^3+1} = -\frac{2}{3}\ln\varphi + H(\varphi^2). \tag{17}$$

где F, G и H — функции, голоморфные при аргументе, равном нулю.

Таким образом, приходим к выводу, что в случае

$$k \not\equiv 0 \pmod 3) \tag{18}$$

будет

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^{2k/3}} = L(\varphi) \pm \frac{\pi\sqrt{3}}{\Gamma\left(\frac{2k}{3}\right)} \varphi^{\frac{2k}{3}-1} [1 + c\varphi^{2/3} + d\varphi^{4/3} + \ldots], \tag{19}$$

а в случае

$$k \equiv 0 \pmod 3), \tag{20}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^{2k/3}} = M(\varphi) \pm \frac{1}{\Gamma(2k')} \ln\varphi \cdot \varphi^{2k'-1}, \tag{21}$$

где $k' = \frac{k}{3}$, а L и M — функции, голоморфные при $\varphi = 0$.

§ 8. Построение сопел Лаваля при помощи рядов С. А. Чаплыгина

Из приведенных выше результатов вытекает, что функция тока, представляемая рядом вида

$$\psi = -\theta - A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{cn}(\tau)}{z_{cn}(\tau^*)} \frac{\sin 2nc\theta}{n^{4/3}} \quad (A,\ c - \text{постоянные}), \tag{1}$$

дает симметричное безударное сопло Лаваля (разумеется, при соответственно выбранном продолжении этого течения в область сверхзвуковых скоростей).

Согласно (4), (5) § 5, для этого достаточно показать, что на окружности $\tau = \tau^*$ имеют место уравнения

$$\psi = -\frac{k}{2^{1/3}}\theta^{1/3} + O(\theta), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{k}{3\cdot 2^{1/3}}\theta^{-2/3} + O(1). \tag{2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = -\frac{k}{2^{1/3}\cdot 3^{2/3}}\theta^{-1/3} + O(\theta^{1/3}). \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\eta} = \frac{k}{2^{1/3}\cdot 3^{5/3}}\theta^{-4/3} + O(\theta^{-2/3}). \tag{3}$$

В самом деле, при $\tau=\tau^*$

$$\psi=-\theta-A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nc\theta}{n^{4/3}}. \tag{4}$$

Отсюда, согласно (19), § 7, следует, что

$$\psi=-A\frac{\pi\sqrt{3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}(2c\theta)^{1/3}+O(\theta), \tag{5}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=-A\frac{\pi\sqrt{3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\frac{(2c)^{1/3}}{3}\theta^{-2/3}+O(1). \tag{5a}$$

Далее,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-\frac{1}{a^{1/3}}A\sum_{n=1}^{\infty}\zeta'_{nc}(0)\frac{\sin 2nc\,\theta}{n^{4/3}}. \tag{6}$$

С другой стороны, согласно (9) § 6,

$$\zeta'_{nc}(0)=2^{2/3}a^{1/3}\lambda'(0)(cn)^{2/3}+C_1+\frac{C_2}{(cn)^{2/3}}+O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right). \tag{7}$$

Подставив это выражение в уравнение (7) и использовав формулы (19), (21) § 7, получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-A\frac{2^{1/3}\lambda'(0)\pi\sqrt{3}c^{1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\theta^{-1/3}+K_1\theta^{1/3}+K_2\theta\ln|\theta|+O(\theta), \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\theta}=A\frac{2^{1/3}\lambda'(0)\pi\sqrt{3}c^{1/3}}{3\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\theta^{-4/3}+\frac{K_1}{3}\theta^{-2/3}+K_2\ln|\theta|+O(1). \tag{8a}$$

Вычисление $\lambda'(0)$ дает, однако,

$$\lambda'(0)=-3^{-2/3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}, \tag{9}$$

так что уравнения (5), (8) переходят в уравнения (2), (3).

Остается еще показать, что при помощи формулы (1) можно найти стенки суживающейся части сопла на сколь угодно большом расстоянии от критического сечения.

Легко показать, что если брать положительную постоянную A достаточно малой, а затем рассматривать некоторое достаточно малое положительное значение Ψ функции ψ, данной уравнением (1), то область плоскости годографа, данная неравенствами

$$\tau<\tau^*,\quad -\Psi<\psi<\Psi,$$

отображается *однолистно* на плоскость (x, y) не только в окрестности каждой точки, а *в целом*. В самом деле, при достаточно малом A для всех τ, θ

$$|\psi+\theta|<\varepsilon, \tag{10}$$

где ε — сколь угодно малая положительная величина. Но тогда при заданном $\theta=\bar\theta$ будет $\psi(\bar\theta,\tau)<-\bar\theta+\varepsilon<0$ $(\tau\leqslant\tau^*)$.

Итак, при достаточно малом Ψ имеется линия $\psi=\Psi$ в плоскости годографа, лежащая полностью в секторе $0>\theta>-\bar{\theta}$ и простирающаяся от $\tau=0$ до $\tau=\tau^*$.

С другой стороны, при достаточно малом Ψ угол наклона касательной к переходной линии при $-\Psi<\psi<\Psi$ будет сколь угодно мало отличаться от $\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, форма границ изображения области (10) на плоскость (x, y) такова, что самопересечение границ невозможно; отображение будет, таким образом, однолистным для всей области (10) в целом. Изображение этой области на плоскость (x, y) представляет собой искомую суживающуюся часть сопла Лаваля. В большом отдалении от критического сечения стенки переходят в прямые с наклоном $\pm\Psi$ относительно оси.

В предлагаемом семействе сопел имеются три независимых параметра, а именно A, c и Ψ, что может быть использовано для приспособления к заданным техническим условиям.

Для расчета сверхзвуковой части сопла можно вблизи центра заменить ψ его главной частью $\psi=k(\mu-\lambda)^{1/3}\zeta(t)$ согласно §§ 2 и 4. Если вдоль переходной линии ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial\eta}$ уже недостаточно точно представляются формулами

$$\psi=-\frac{k}{2^{1/3}}\theta^{1/3} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-\frac{k}{2^{1/3}3^{2/3}}\theta^{-1/3},$$

то следует представить их приближение в виде

$$\psi=-\frac{k}{2^{1/3}}\theta^{1/3}+C_1\theta+C_2\theta^{5/3}+\ldots+C_M\theta^{\frac{2M+1}{2}}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-\frac{k}{2^{1/3}3^{2/3}}\theta^{-1/3}+D_1\theta^{1/3}+\ldots+D_N\theta^{\frac{2N-1}{3}}. \tag{12}$$

Вблизи переходной линии можно при этом ограничиться решением уравнения (5) § 2.

Решение этой задачи Коши для указанного уравнения сводится к решению следующих задач Коши:

$$\psi=\theta^{\frac{2n+1}{3}}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0, \qquad \eta=0, \tag{13}$$

$$\psi=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=\theta^{\frac{2n-1}{3}}, \quad \eta=0. \tag{14}$$

Совершенно аналогично выводам § 2 можно показать, что решение задачи (13) дается формулой

$$\psi=\mu^{\frac{2n+1}{3}}F\left(-\frac{2n+1}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{3}; s\right), \tag{15}$$

а решение задачи (14) — формулой

$$\psi=\mu^{\frac{2n-1}{3}}\eta F\left(-\frac{2n-1}{3}; \frac{5}{6}; \frac{5}{3}; s\right), \tag{16}$$

где

$$s=\frac{\mu-\lambda}{\mu}. \tag{17}$$

Решения (15) и (16) распространяются на секторы IV и V. В секторах I, II и III к главному члену в соответствии с этим прибавляются линейные комбинации решений уравнения (6) § 2 вида

$$\psi=(\mu-\lambda)^{\frac{2n+1}{3}}F\left(-\frac{2n+1}{3},\ -\frac{2n-1}{3};\ \frac{4n-3}{6};\ t\right) \tag{18}$$

и

$$\psi=(\mu-\lambda)^{\frac{2n+1}{3}}F\left(-\frac{2n+1}{3},\ -\frac{2n-1}{3};\ -\frac{4n-3}{6};\ 1-t\right). \tag{19}$$

На более значительном расстоянии от переходной линии можно пользоваться графическим методом Прандтля — Буземана.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Оценки интегралов § 5

I. Оценка $\dfrac{\partial\delta_1\psi_{IV}}{\partial\lambda}$:

$$\frac{\partial\delta_1\psi_{IV}}{\partial\lambda}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\left\{\iint\limits_{\lambda<\lambda'<\mu'<\mu}\frac{\partial u}{\partial\lambda}\frac{b}{(\mu'-\lambda')^{1/3}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda'}-\frac{\partial}{\partial\mu'}\right)\bar{\psi}_{IV}d\lambda'd\mu'+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\lambda}^{\mu}\frac{ub}{(\mu'-\lambda)^{1/3}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda'}-\frac{\partial}{\partial\mu'}\right)\bar{\psi}_{IV|\lambda'=\lambda}d\mu'\right\}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\{I_1+I_2\}, \tag{1}$$

$$I_1=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)}\iint\frac{(\mu'-\lambda')^{1/6}\,d\lambda'\,d\mu'}{(\mu'-\lambda)^{5/6}(\mu'-\lambda')^{2/3}(-\lambda')^{1/3}}, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\lambda'}^{\mu}\frac{d\mu'}{(\mu'-\lambda)^{5/6}(\mu'-\lambda')^{2/3}}\leqslant\frac{1}{(\lambda'-\lambda)^{2/3}}\int\limits_{\lambda'}^{\mu}\frac{d\mu'}{(\mu'-\lambda')^{5/6}}=O(1)\,\frac{(\mu-\lambda')^{1/6}}{(\lambda'-\lambda)^{2/3}}, \tag{3}$$

$$I_1=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/3}}\int\limits_{\lambda}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda')^{1/3}\,d\lambda'}{(\lambda'-\lambda)^{2/3}(-\lambda')^{1/3}}=$$

$$=O(1)\left(\frac{\mu-\lambda}{-\lambda}\right)^{1/3}\int\limits_{0}^{1}y^{-2/3}(1-y)^{1/3}\left(1-\frac{\mu-\lambda}{-\lambda}y\right)^{-2/3}dy, \tag{4}$$

где

$$\lambda'=\lambda+(\mu-\lambda)\,y. \tag{4a}$$

Отсюда

$$I_1=O(1)\left(\frac{\mu-\lambda}{-\lambda}\right)^{1/3}F\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3};\ \frac{5}{3};\ \frac{\mu-\lambda}{-\lambda}\right)=O(1)\left(\frac{\mu-\lambda}{-\lambda}\right)^{1/3}=O(1), \tag{5}$$

$$I_2=O(1)\int\limits_{\lambda}^{\mu}\left(\frac{\mu'-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/6}\frac{d\mu'}{(\mu'-\lambda)^{2/3}(-\lambda)^{1/3}}=O(1)\left(\frac{\mu-\lambda}{-\lambda}\right)^{1/3}=O(1). \tag{6}$$

II. Оценка $\dfrac{\partial\delta_1\psi_{IV}}{\partial\mu}$:

$$\frac{\partial\delta_1\psi_{IV}}{\partial\mu}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\left\{\iint\limits_{\lambda<\lambda'<\mu'<\mu}\frac{\partial u}{\partial\mu}\frac{b}{(\mu'-\lambda')^{1/3}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda'}-\frac{\partial}{\partial\mu'}\right)\bar{\psi}_{IV}\,d\lambda'\,d\mu'+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\lambda}^{\mu}\frac{ub}{(\mu-\lambda')^{1/3}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda'}-\frac{\partial}{\partial\mu'}\right)\bar{\psi}_{IV|\mu'=\mu}d\lambda'\right\}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\{I_3+I_4\}, \tag{7}$$

$$I_3=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/3}}\iint\frac{(\mu'-\lambda)^{1/6}\,d\lambda'\,d\mu'}{(\mu-\lambda')^{5/6}(\mu'-\lambda)^{2/3}(-\lambda')^{1/3}}=$$

$$=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\iint\frac{d\lambda'\,d\mu'}{(\mu-\lambda')^{5/6}(\mu'-\lambda')^{2/3}(-\lambda')^{1/3}}=$$

$$=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\int\limits_{\lambda}^{\mu}\frac{d\lambda'}{(\mu-\lambda')^{1/2}(-\lambda')^{1/3}}=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\int\limits_{\lambda}^{\mu}\frac{d\lambda'}{(\mu-\lambda')^{5/6}}=O(1), \tag{8}$$

$$I_4=O(1)\int\limits_{\lambda}^{\mu}\left(\frac{\mu-\lambda'}{\mu-\lambda}\right)^{1/6}\frac{d\lambda'}{(\mu-\lambda')^{2/3}(-\lambda)^{1/3}}=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda')^{1/6}}\int\frac{d\lambda'}{(\mu-\lambda')^{5/6}}=O(1) \tag{9}$$

III. Оценка $\frac{\partial\delta_2\psi_{IV}}{\partial\lambda}$:

$$\frac{\partial\delta_2\psi IV}{\partial\lambda}=\int\limits_0^1\frac{\partial g}{\partial\lambda}\,\delta\tau\,dt+\int\limits_0^1 g\delta\tau'(1-t)\,dt+\int\limits_0^1\frac{\partial h}{\partial\lambda}\,\delta\nu\,dt+$$

$$+\int\limits_0^1 h\delta\nu'(1-t)\,dt=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/3}}\int\limits_0^1[\lambda+(\mu-\lambda)t]\frac{dt}{t^{5/6}(1-t)^{5/6}}+O(1)\int\limits_0^1\frac{(1-t)^{1/6}}{t^{5/6}}\,dt+$$

$$+\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/3}}\int\limits_0^1\frac{[\lambda+(\mu-\lambda)t]^{1/3}}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}}\,dt+O(1)(\mu-\lambda)^{2/3}\int\limits_0^1\frac{dt}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}[\lambda+(\mu-\lambda)t]^{2/3}}, \tag{10}$$

$$\int\limits_0^1\frac{dt}{t^{1/6}(1-t)^{1/6}\left(1-\frac{\mu-\lambda}{-\lambda}t\right)^{2/3}}=O(1)\,F\left(\frac{2}{3},\ \frac{5}{6};\ \frac{5}{3};\ \frac{\mu-\lambda}{-\lambda}\right)=O(1), \tag{11}$$

$$\frac{\partial\delta_2\psi_{IV}}{\partial\lambda}=O(1)\left(\frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/3}. \tag{12}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial\delta_2\psi_{IV}}{\partial\mu}=O(1)\left(\frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/3} \tag{13}$$

IV. Оценка $\frac{\partial\delta_1\psi_I}{\partial\lambda}$ при $c_2=c_1$:

$$\frac{\partial\delta_1\psi_I}{\partial\lambda}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\left\{\int\limits_{\lambda}^{\mu}u(\lambda,\mu;\lambda,\mu')\,\frac{b(\lambda,\mu')}{(\mu'-\lambda)^{2/3}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda'}-\frac{\partial}{\partial\mu'}\right)\bar{\psi}_{I_{\lambda'=\lambda}}\,d\mu'+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_0^{\mu}\frac{\partial u}{\partial\lambda}\,\frac{b(\lambda',\mu')}{(\mu'-\lambda')^{1/3}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda'}-\frac{\partial}{\partial\mu'}\right)\bar{\psi}_I\,d\lambda'\,d\mu'\right\}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\{I_5+I_6\}, \tag{14}$$

$$I_5=O(1)\int\limits_0^{\mu}\left(\frac{\mu'-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/6}\frac{d\mu'}{(\mu'-\lambda)^{1/6}(-\lambda)^{1/2}(\mu'-\lambda)^{1/3}}=O(1)\left(\frac{\mu-\lambda}{-\lambda}\right)^{1/2}, \tag{15}$$

$$I_6=O(1)\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_0^{\mu}\frac{(\mu-\lambda')^{1/6}\,d\lambda'\,d\mu'}{(\mu-\lambda)^{1/3}(\mu'-\lambda)^{5/6}(-\lambda')^{1/2}(\mu'-\lambda')^{1/2}}=$$

$$=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/6}(-\lambda)^{1/2}}\int\limits_0^{\lambda}\int\limits_0^{\mu}\frac{d\lambda'\,d\mu'}{\mu'^{5/6}(-\lambda')^{1/2}}=O(1)\,\frac{\mu^{1/6}}{(\mu-\lambda)^{1/6}}=O(1). \tag{16}$$

V. Оценка $\frac{\partial\delta_1\psi_I}{\partial\mu}$ при $c_2=c_1$:

$$\frac{\partial\delta_1\psi_I}{\partial\mu}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\left\{\int\limits_0^\lambda \frac{ub}{(\mu-\lambda')^{1/3}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda'}-\frac{\partial}{\partial\mu'}\right)\bar{\psi}_I\Big|_{\mu'=\mu}d\lambda'+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^\lambda\int\limits_0^\mu \frac{\partial u}{\partial\mu}\,\frac{b(\lambda',\mu')}{(\mu'-\lambda')^{1/3}}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda'}-\frac{\partial}{\partial\mu'}\right)\bar{\psi}_I\,d\lambda'\,d\mu'\right\}=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\{I_7+I_8\}, \qquad (17)$$

$$I_7=O(1)\int\limits_0^\lambda\left(\frac{\mu-\lambda'}{\mu-\lambda}\right)^{1/6}\frac{d\lambda'}{(\mu-\lambda')^{1/2}(-\lambda')^{1/2}}=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/6}}\int\limits_0^\lambda\frac{d\lambda'}{(-\lambda')^{5/6}}=O(1), \qquad (18)$$

$$I_8=O(1)\int\limits_0^\lambda\int\limits_0^\mu\frac{(\mu'-\lambda)^{1/6}\,d\lambda'd\mu'}{(\mu-\lambda)^{1/3}(\mu-\lambda')^{5/6}(\mu'-\lambda')^{1/2}(-\lambda')^{1/2}}=$$

$$=\frac{O(1)}{(\mu-\lambda)^{1/6}\,\mu^{1/2}}\int\limits_0^\lambda\int\limits_0^\mu\frac{d\lambda'\,d\mu'}{\mu'^{1/2}(-\lambda')^{5/6}}=O(1). \qquad (19)$$

VI. Оценка $\frac{\partial\delta_2\psi_I}{\partial\lambda}$:

$$\frac{\partial\delta_2\psi_I}{\partial\lambda}=u(\lambda,\mu;\lambda,0)\left\{\delta k'+\left[\frac{1}{-6\lambda}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b(\lambda,0)}{(-\lambda)^{1/3}}\right]\delta k\right\}+$$

$$+\int\limits_0^\lambda\frac{\partial u}{\partial\lambda}\left[\delta k'+\left(\frac{1}{-6\lambda'}+\ldots\right)\delta k\right]d\lambda'+\int\limits_0^\mu\frac{\partial u}{\partial\lambda}\left[\delta l'+\left(\frac{1}{6\mu'}+\ldots\right)\delta l\right]d\mu'=$$

$$=O(1)\left(\frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/6}+O(1)\int\limits_0^\lambda\frac{(\mu-\lambda')^{1/6}\,d\lambda'}{(\mu-\lambda)^{1/3}(-\lambda)^{5/6}}+O(1)\int\limits_0^\mu\frac{\mu^{1/6}\,d\mu'}{(\mu-\lambda)^{1/3}(\mu'-\lambda)^{5/6}}=$$

$$=O(1)\left(\frac{-\lambda}{\mu-\lambda}\right)^{1/6}=O(1). \qquad (20)$$

Аналогично

$$\frac{\partial\delta_2\psi_I}{\partial\mu}=O(1). \qquad (21)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Таблица значений функций $\zeta(t)=F\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3};\frac{1}{2};\ t\right)$

t	$\zeta_I(t)$	t	$\zeta_{III}(t)$	t	$\zeta_{II}(t)$
—0,5	1,0979	1,	0,5	0	—0,5
—0,4	1,0801	0,9	0,3042	0,1	—0,6728
—0,3	1,0615	0,8	0,2129	0,2	—0,7397
—0,2	1,0420	0,7	0,1402	0,3	—0,7861
—0,1	1,0216	0,6	0,0670	0,4	—0,8306
0,0	1	0,5	0,	0,5	—0,8660
0,1	0,9771	0,4	—0,0670	0,6	—0,8976
0,2	0,9526	0,3	—0,1402	0,7	—0,9263
0,3	0,9263	0,2	—0,2129	0,8	—0,9526
0,4	0,8976	0,1	—0 3042	0,9	—0,9771
0,5	0,8660	0	—0,5	1	—1
0,6	0,8306			1,1	—1,0216
0,7	0,7861			1,2	—1,0420
0,8	0,7397			1,3	—1,0615
0,9	0,6728			1,4	—1,0801
1	0,5			1,5	—1,0979

Поступило
31. III. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Meyer, Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt, Forschungshefte Nr. 62, 1908.

[2] Левин, Астров, Павлов, Христианович, О расчете сопел Лаваля.

[3] Чаплыгин С. А., Полное собрание сочинений, т. II — «О газовых струях», АН СССР, 1933.

[4] Уиттекер — Ватсон, Курс современного анализа.

[5] Христианович С. А., О сверхзвуковых течениях газа, Труды ЦАГИ, No 543.

[6] Франкль Ф., О задаче Коши для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с начальными данными на переходной линии, Известия АН, серия матем., 8 (1944), 195—224.

[7] Франкль Ф., О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений, Известия АН, серия матем., 9 (1945), 121—143.

[8] Tricomi F., Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto, Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei, ser. V, vol. XIV, fasc. VII, 1929.

F. FRANKL. TO THE THEORY OF THE LAVAL NOZZLE

SUMMARY

In this work there is given a method of constructiug of Laval nozzles without shock-waves by means of the hodograph method of Chaplygin. There are found the conditions, that shall be satisfied by the stream function of a subsonic flow, given in the hodograph plane, to make possible the continuation of the stream function in the supersonic zone, such, that there will be obtained a flow through a Laval nozzle without shock waves («conditions of continuation»). Besides it there is shown that under certain conditions there is allowed a discontinuity of velocity gradient in the center of the nozzle.

Finally, it is shown that the stream function given by the series

$$\psi = -\theta - A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_{cn}(z) \sin 2cn\,\theta}{n^{4/3}}$$

(in this formula the significations of Chaplygin's paper «On gas jets» are used) satisfies the conditions of continuation and therefore can be used to construct a Laval nozzle.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 423—428 Série mathématique

М. П. ЩЕГЛОВ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ СУММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ПУАССОНА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Ставится и частично разрешается проблема о включении друг в друга специальных сегментов $E_\varphi \subseteq E_s$ при некоторых условиях.

Задан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

где $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и действительны. Процесс суммирования ряда (1) по Пуассону, можно представить в виде

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{u}} \quad (0 < u < \infty). \tag{2}$$

Наряду с функцией $\varphi(u)$ рассмотрим функцию

$$s(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant u < 1, \\ \sum\limits_{n=1}^{[u]} a_n & \text{при } 1 \leqslant u < \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Возьмем множества

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & E_\varphi = \{S_{\varphi, \{u_m\}}\}, \\ & \quad \text{где } \lim\limits_{u_m \to \infty} \varphi(u_m) = S_{\varphi, \{u_m\}}, \\ & \quad u_1 < u_2 < \ldots < u_m < u_{m+1} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} \infty, \\ \text{(b)} & E_s = \{S_{s, \{u_m\}}\}, \\ & \quad \text{где } \lim\limits_{u_m \to \infty} s(u_m) = S_{s, \{u_m\}}. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Легко видеть, что E_φ и E_s — сегменты и точки с конечными или бесконечными концами.

В этой статье мы даем условия, при которых E_φ и E_s связаны соотношением

$$E_\varphi \subseteq E_s. \tag{5}$$

Получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть*

1° $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Тогда

(α) $E_\varphi = E_s$.

Эта теорема, очевидно, вытекает из следующей леммы*:

ЛЕММА. *Задан некоторый ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Пусть его частные суммы с „линейным дополнением" будут

$$1^\circ\ s(u) = \sum_{n=1}^{[u]} a_n, \quad ([u] — \textit{целая часть числа } u).$$

Возьмем также функции:

$$2^\circ\ w(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant u < 1, \\ \sum_{n=1}^{[u]} n a_n & \text{при } 1 \leqslant u < \infty, \end{cases}$$

$$3^\circ\ f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}, \qquad 0 < t < \infty.$$

Тогда, если

$$(\mathrm{w}): \quad w(u) = o([u]),$$

то имеет место соотношение

$$(s, f): \quad s(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) + o(1), \ u \to \infty.$$

Мы полагаем, что $f\left(\frac{1}{u}\right) = \varphi(u)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

1° $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

При этом условии E_φ *и* E_s,

$$E_\varphi = [d_\varphi; D_\varphi], \quad E_s = [d_s; D_s],$$

связаны общим соотношением

(α′) $E_\varphi \subseteq E_s$,

причем

(β) *фактически возможны следующие типы включения сегментов:*

1. $[d_\varphi = D_\varphi] \quad = [d_s = D_s]$,
2. $[d_\varphi < D_\varphi] \quad = [d_s < D_s]$,
3. $[d_\varphi, +\infty_\varphi] \quad = [d_s, +\infty_s]$,
4. $[-\infty_\varphi, D_\varphi] \quad = [-\infty_s, D_s]$,

---

* Лемма помещена в нашей работе (2) с подробным доказательством.

5. $[-\infty_\varphi, +\infty_\varphi] = [-\infty_s, +\infty_s]$,
6. $[d_\varphi, D_\varphi] \quad \subset [d_s, D_s]$,
7. $[d_\varphi, +\infty_\varphi] \quad \subset [d_s, +\infty_s]$,
8. $[-\infty_\varphi, D_\varphi] \quad \subset [-\infty_s, D_s]$.

($\bar\beta$) *невозможны типы включения сегментов:*

1. $[d_\varphi = D_\varphi] \subset \{[d_s < D_s],\ [d_s, +\infty_s],\ [-\infty_s, D_s],\ [-\infty_s, +\infty_s]\}$,
2. $[d_\varphi < D_\varphi] \subset \{[d_s, +\infty_s],\ [-\infty_s, D_s],\ [-\infty_s + \infty_s]\}$,
3. $\{[d_\varphi, +\infty_\varphi],\ [-\infty_\varphi, D_\varphi]\} \subset [-\infty_s, +\infty_s]$.

Доказательство. Соотношение (α') легко получается из формул

$$(\varphi, s):\quad \varphi(u) = \frac{1}{n}\int_0^\infty s(x)\, e^{-\frac{x}{u}}\, dx\, *,$$

$$(s, \varphi):\quad s(u) = \varphi(u) + O(1),\ u \to \infty\ **.$$

Случаи (β 1) и ($\bar\beta$ 1) возможны в силу теоремы Hardy—Littlewood'a ***.

Случаи (β 2), (β 3) и (β 4) всегда имеют место, если мажоранту коэффициентов брать в виде

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \subset O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Случаи (β 5), ($\bar\beta$ 2) и ($\bar\beta$ 3) возможны в силу формулы (s, φ).

Существование соотношений (β) — 6, 7, и 8 покажем на примерах.

Случай (β 6). Определим частные суммы $s(n)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следующим образом:

$$s(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leqslant n < q, \\ s(q^m + k) = s(q^{m+1} - k) = \dfrac{k}{q^{m+2}} & \text{при } q^m \leqslant n \leqslant q^{m+1}, \\ & m = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad (1)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, \frac{q^{m+1} - q^m}{2}$, q — целое положительное число, $q > 1$.

Возьмем функции

$$s(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant u < q, \\ s(n) & \text{при } n \leqslant u < n + 1, \\ & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \qquad (2)$$

и

$$\sigma(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant u \leqslant q, \\ \dfrac{1}{q^{m+2}} u - \dfrac{1}{q^2} & \text{при } q^m \leqslant u \leqslant \dfrac{q^m + q^{m+1}}{2}, \\ -\dfrac{1}{q^{m+2}} u + \dfrac{1}{q} & \text{при } \dfrac{q^m + q^{m+1}}{2} \leqslant u \leqslant q^{m+1}, \end{cases} \qquad (3)$$

---

* См. ([1]), ([2]), ([3]).

** Эта формула аналогична формуле (s, f); выводится тем же способом.

*** См. ([3]), стр. 57.

Очевидно, что

$$a_n = O\left(\frac{1}{u}\right), \tag{4}$$

$$\underline{\lim}_{u\to\infty} s(u) = d_s = 0, \tag{5}$$

$$\overline{\lim}_{u\to\infty} s(u) = D_s = \frac{q-1}{2q^2}, \tag{5_1}$$

$$s(u) - \sigma(u) = o(1),\ u \to \infty. \tag{6}$$

Рассмотрим функции

$$\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n}{u}} = \frac{1}{u}\int_0^{\infty} s(x)\, e^{-\frac{x}{u}}\, dx \tag{7}$$

и

$$\psi(u) = \frac{1}{u}\int_0^{\infty} \sigma(x)\, e^{-\frac{x}{u}}\, dx. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что

$$\varphi(u) - \psi(u) = o(1), \quad u \to \infty. \tag{9}$$

Вычисляем интеграл

$$\frac{1}{u}\int_0^{\infty} \sigma(x)\, e^{-\frac{x}{u}} dx = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\int_{q^m}^{\frac{q^m+q^{m+1}}{2}} \left(\frac{1}{q^{m+2}}x - \frac{1}{q}\right) \frac{e^{-\frac{x}{u}}}{u} dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{q^m+q^{m+1}}{2}}^{q^{m+1}} \left(-\frac{1}{q^{m+2}}x + \frac{1}{q}\right) \frac{e^{-\frac{x}{u}}}{u} dx \right]. \tag{10}$$

Элементарные вычисления приводят к формуле

$$\psi(u) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u}{q^{m+2}} \left(e^{-\frac{q^m}{2u}} - e^{-\frac{q^{m+1}}{2u}}\right)^2 {}^{*}. \tag{11}$$

Фиксируем число u в форме

$$u_0 = \alpha_0 q^{m_0}, \tag{12}$$

где $1 \leqslant \alpha_0 \leqslant q,\ m_0 = 1, 2, 3, \ldots$ (12a)

Беря только m_0 член ряда (11), легко обнаружить существование числа δ, не зависящего от α_0 и m_0, и такого, что

$$\psi(\alpha_0 q^{m_0}) \geqslant \delta > 0. \tag{13}$$

Отсюда, очевидно, следует

$$\underline{\lim}_{u\to\infty} \psi(u) > 0. \tag{14}$$

---

* Эта формула и пример имеются в нашей работе ([1]); там они использованы с другой целью.

Но так как, в силу соотношения (9),

$$\underline{\lim}_{u\to\infty}\varphi(u)=\underline{\lim}_{n\to\infty}\psi(u), \tag{15}$$

то, очевидно,

$$\underline{\lim}_{u\to\infty}\varphi(u)=d_\varphi>0. \tag{16}$$

Из (5) и (16) получаем

$$d_s<d_\varphi. \tag{17}$$

Пользуясь (17), (5) и (α'), приходим к искомому соотношению (β 6).

Случай (β 7). Возьмем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{1}$$

где

$$c_n=a_n+b_n, \tag{2}$$

причем a_n — члены построенного ряда (случай β 6), а b_n удовлетворяют следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)} & b_n=o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \text{(b)} & \begin{cases} s_1(u)=\sum\limits_{n=1}^{[u]} b_n\geqslant 0, \\ s_1(u)=0 \ \text{ при } \ 0\leqslant u<q, \end{cases} \\ \text{(c)} & \overline{\lim}_{u\to\infty} s_1(u)=+\infty, \\ \text{(d)} & s_1(q^{r_n})=s(q^{r_n})=0, \end{array}\right\} \tag{3}$$

где q, $s(u)$ — фигурируют в предыдущем примере (сл. β 6), r_n — некоторая целочисленная возрастающая последовательность.

Очевидно, что

$$c_n=O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4}$$

Возьмем функцию

$$S(u)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant u<q, \\ \sum\limits_{n=1}^{[u]} c_n & \text{при } q\leqslant u<\infty. \end{cases} \tag{5}$$

Очевидно, что

$$\underline{\lim}_{u\to\infty} S(u)=d_s=0, \tag{6}$$

$$\overline{\lim}_{u\to\infty} S(u)=+\infty. \tag{6$_1$}$$

Рассмотрим, далее, функцию

$$\Phi(u)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n}{u}}=\frac{1}{u}\int_0^{\infty} S(x) e^{-\frac{x}{u}}\, dx > \frac{1}{u}\int_0^{\infty} s(x) e^{-\frac{x}{u}}\, dx=\varphi(u). \quad (7)$$

Находим

$$\underline{\lim}_{u\to\infty} \Phi(u) \geqslant \underline{\lim}_{u\to\infty} \varphi(u) > 0, \quad (8)$$

$$\overline{\lim}_{u\to\infty} \Phi(u) = +\infty. \quad (8_1)$$

Случай (β 8). Легко вытекает из случая (β 7).

Замечание. При мажоранте $a_n=o(1)$ соотношение (α') сохраняется и, повидимому, существуют все типы включения сегментов. При мажоранте $a_n=O(1)$ соотношение (α') в общем не сохраняется.

Поступило
23. X. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Щеглов М. П., Обобщение одной теоремы Hardy—Littlewood'a, Диссертация, МГУ, 1938.

[2] Щеглов М. П., К вопросу о поведении степенного ряда на круге сходимости, Мат. сб., 14 (56) : 1 – 2 (1944), 109 – 132.

[3] Landau E., Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., 1929.

M. CHTHEGLOFF. ON SOME PROBLEMS OF SUMMATION BY POISSON'S METHOD

SUMMARY

In the paper the author sets, and partially solves, the problem of inclusion of special segments $E_\varphi \subset E_s$ into one another under certain conditions.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 429—494 Série mathématique

Б. А. ВЕНКОВ

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЕ МАРКОВА ДЛЯ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ТРОЙНИЧНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Предметом работы является продолжение ряда экстремальных форм Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм. К четырем первым формам Маркова автор прибавляет еще семь следующих за ними форм. Вывод этих дальнейших экстремальных форм основан на использовании особого нового понятия о *внешней* вершине, вводимом автором для совокупности целых точек, лежащих *вне* асимптотического конуса.

Введение

§ 1. Классические исследования Лагранжа и Гаусса по теории бинарных квадратичных форм приводят к следующей теореме:

Если $\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ — форма с произвольными коэффициентами a, b, c и $b^2 - ac = \Delta$, то переменным x, y можно дать такие целые, не равные одновременно нулю, значения, при которых

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \sqrt{\frac{4}{3}|\Delta|} \text{ при } \Delta < 0 \qquad (1)$$

и

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \sqrt{\frac{4}{5}\Delta} \text{ при } \Delta > 0. \qquad (2)$$

В формуле (2) не может быть знака $<$, если φ равна форме $M_1 = a(x^2 - xy - y^2)$, или форме, эквивалентной M_1.

Две квадратичные формы называются эквивалентными, если одна переходит в другую линейной подстановкой переменных с целыми коэффициентами и определителем ± 1. Эквивалентность будем обозначать знаком $\sim$.

Указанная теорема впервые была четко формулирована знаменитым русским математиком А. Н. Коркиным [(1), стр. 332], который при дальнейшем исследовании этого вопроса обнаружил важную принципиальную разницу между случаями $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$: при $\Delta < 0$ число $\frac{4}{3}$ в неравенстве (1) можно заменить любым (точным) коэффициентом, меньшим $\frac{4}{3}$; тогда как при $\Delta > 0$ для всякой φ, не эквивалентной M_1

имеем неравенство $|\varphi(x, y)| \leqslant \sqrt{\frac{1}{2}\Delta}$, которое опять становится точным при $\varphi \sim M_2 = a(x^2 - 2xy - y^2)$.

А. Н. Коркин поставил задачу дальнейшего продолжения ряда коэффициентов $\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \ldots$ (при $\Delta > 0$) и ряда соответствующих форм $M_1, M_2, \ldots$ Эта задача была полностью решена учеником Коркина, акад. А. А. Марковым (1856—1922) ([2]). А. А. Марков доказал, что ряд чисел $\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{100}{221}, \ldots$ и соответствующих форм $M_1, M_2, M_3 = a\left(x^2 - \frac{11}{5}xy - y^2\right)$ бесконечный и числа $\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \ldots$ стремятся к пределу $\frac{4}{9}$. Формы M_k, которые будем называть **экстремальными** (бинарными) **формами Маркова**, могут быть определены так: форма φ есть одна из форм M_k, если существует настолько малое $\varepsilon > 0$, что при всех целых, не равных одновременно нулю значениях x, y, имеем $\frac{\varphi(x, y)^2}{\Delta} > \frac{4}{9} + \varepsilon$. Формы M_k обладают многими замечательными свойствами ([2]): 1) отношения коэффициентов M_k суть числа рациональные, так что $|M_k(x, y)|$ имеет минимум m_k при целых x, y; 2) форма M_k принимает как значение $+m_k$, так и значение $-m_k$; 3) M_k связаны с решениями в целых числах неопределенного уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$, и т. д. Формы M_k располагаются по номерам $k = 1, 2, 3, \ldots$ в порядке убывания отношения $\frac{m_k^2}{\Delta}$.

§ 2. Разрешив полностью проблему Коркина для неопределенных бинарных форм, А. А. Марков ставит аналогичную проблему для неопределенных тройничных и четвертичных форм. В работе ([3]) и в позднейшей вычисленной им таблице ([4]) Марков дает первые четыре члена соответствующего ряда тройничных форм (формы $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — см. ниже). Впрочем, Марков не доказывает экстремальности форм $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, так как его метод существенно основан на предположении, что данная тройничная форма $f(x, y, z)$ достигает своего минимума, так что коэффициенты f не являются вполне произвольными вещественными числами.

Исследования Маркова о формах с 2, 3, 4 переменными излагает Dickson в своей книге по теории чисел ([6]). Японский математик Fujiwara написал ряд работ о геометризации бинарной проблемы Маркова и одну работу о тройничных формах ([7]). Последняя работа не имеет серьезного значения, так как основывается на некоторых недоказанных (и трудно доказуемых) геометрических гипотезах. Даже допуская справедливость этих гипотез, нельзя согласиться с дальнейшими выводами Fujiwara, так как, не зная о работе Маркова ([4]), в которой дается четвертый член ψ_4, и пытаясь дать этот член, он получает его ошибочно.

§ 3. Предметом настоящей работы является продолжение ряда Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм. После четырех членов $\psi_1, \ldots, \psi_4$, данных Марковым, я вычисляю еще семь и доказываю экстремальность всех этих одиннадцати форм $\psi_1, \ldots, \psi_1$

Именно, я доказываю теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть дана неопределенная тройничная форма*

$$f(x, y, z)=\begin{pmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{pmatrix}=ax^2+a'y^2+a''z^2+2b''xy+2b'xz+2byz \qquad (3)$$

определителя

$$d=\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}>0 \qquad (4)$$

с произвольными вещественными коэффициентами. Если f не эквивалентна одиннадцати формам вида $a\psi_k$ (a—постоянная), $k=1, 2, \ldots, 11$, то переменным x, y, z можно дать такие целые, не равные одновременно нулю значения, при которых

$$|f(x, y, z)|<\sqrt[3]{\tfrac{2}{9}d}.$$

Формы ψ_k имеют вид:

$$\psi_1=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad d=\frac{3}{2}=1{,}5; \quad \psi_2=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad d=\frac{5}{2}=2{,}5;$$

$$\psi_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; d=3; \quad \psi_4=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad d=\frac{25}{8}=3{,}125;$$

$$\psi_5=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & -1 & \frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{9}{7} & \frac{17}{7} \end{pmatrix}, d=\frac{1200}{7^3}=3{,}498\ldots \; \psi_6=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}, \; d=\frac{7}{2}=3{,}5;$$

$$\psi_7=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, d=\frac{15}{4}=3{,}75; \quad \psi_8=\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & 1 & \frac{9}{10} \\ 1 & -\frac{11}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}, d=\frac{3\cdot 13^2}{5^3}=4{,}056$$

$$\psi_9=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}, d=\frac{112}{3^3}=4{,}148\ldots; \; \psi_{10}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{21}{8} \end{pmatrix}, d=\frac{135}{2^5}=4{,}218..$$

$$\psi_{11}=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad d=\frac{9}{2}=4{,}5.$$

Для всех этих форм минимум $|\psi_k(x, y, z)|$ равен 1 при целых x, y, z, не равных одновременно нулю.

Работа состоит из трех глав. В первой главе излагаются общие свойства расположения целых точек пространства (x, y, z) относительно конуса второго порядка $f(x, y, z)=0$, которые могут служить базой для дальнейшего, теоретического исследования проблемы Маркова. Можно предполагать, что данная форма f не представляет 0, т. е. что уравнение $f(x, y, z)=0$ не имеет целых решений кроме $(0, 0, 0)$ (в противном случае теорема 1 очевидна). Из двух полостей K, K' конуса $f=0$ выберем одну определенную K и обозначим через $\mathfrak{M}$ множество точек с целыми координатами (x, y, z), лежащих внутри K. Наименьшее выпуклое тело, содержащее все точки $\mathfrak{M}$, есть некоторый многогранник бесконечных размеров, который будем называть **полиэдром** формы f и обозначать $\Pi(f)$. Относительно общих свойств полиэдра $\Pi(f)$, используемых отчасти в настоящей работе (а также относительно терминологии), отсылаю читателя к моей работе ([5]). Вершины $\Pi(f)$ можно назвать внутренними вершинами для формы f или конуса $f=0$. Соответствующего $\Pi(f)$ построения вне конуса $f=0$ мы не имеем; мне удалось только найти понятие о *внешней* вершине, на котором существенно основан метод настоящей работы.

Изложению некоторых свойств внешних вершин и посвящена глава I; доказательство теоремы 1 содержится в главах II и III.

Напишем союзную с f (т. е. контравариантную) форму

$$F=\begin{pmatrix} a'a''-b^2 & bb'-a''b'' & bb''-a'b' \\ bb'-a''b'' & aa''-b'^2 & b'b''-ab \\ bb''-a'b' & b'b''-ab & aa'-b''^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В дальнейшем будем постоянно пользоваться двумя основными в теории тройничных форм тождествами:

$$f(x)f(x')-f(x, x')^2=F(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx'), \tag{6}$$
$$F(x)F(x')-F(x, x')^2=df(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx'), \tag{7}$$

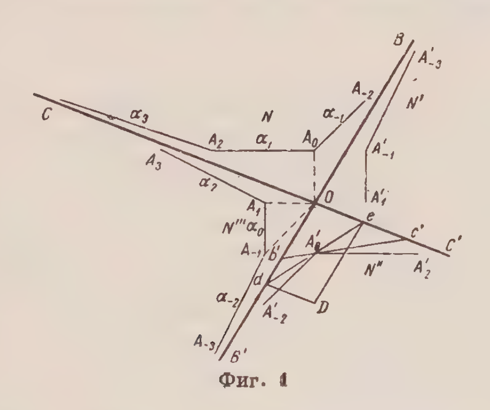
где положено для сокращения

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=f(x, y, z),\ f(x')=f(x', y', z'),\\ &f(x, x')=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}z'. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Глава I. О расположении целых точек относительно конуса второго порядка

§ 1. Возьмем на плоскости прямолинейные координаты x, y; точку $P(x, y)$ с целыми координатами будем для краткости называть **целой точкой**. Пусть $\varphi(P)=ax^2+2bxy+cy^2$ — неопределенная бинарная форма с произвольными вещественными коэффициентами, не представляющая нуля. Уравнение $\varphi=0$ представляет две прямые BB', CC' (фиг. 1), пересекающиеся в начале координат и делящие плоскость на четыре угла. Возьмем один угол BOC и рассмотрим в нем ломаную

$N = \ldots A_{-2}A_0A_2 \ldots$ вершины которой A_0, $A_{\pm 2}$, ... целые точки, и такую, что между N и сторонами угла BOC нет целых точек. Такие же ломаные N', N'', N''' построим в остальных углах, причем N и N'', так же как N' и N''', симметричны относительно начала O. Фигуру, составленную из ломаных N, N', N'', N''' будем называть плоским полигоном, соответствующим бинарной форме φ; точки A_k, A'_k будем



Фиг. 1

называть вершинами, а отрезки $A_0A_2, \ldots, A_1A_{-1}, \ldots, A'_0A'_2$ — сторонами плоского полигона.

Отметим следующие, легко доказываемые, предложения.

1. Для того чтобы целая точка A'_0 в углу $B'OC'$ была вершиной полигона, необходимо и достаточно, чтобы существовала прямая $b'A'_0c'$, пересекающая стороны OB' и OC', такого рода, что треугольник $Ob'c'$ не содержал бы других целых точек, кроме O и A'_0.

2. Вершины и стороны полигона находятся во взаимно однозначном соответствии, именно: каждой вершине, например, A_1 в углу $B'OC$, соответствует сторона A_0A_2 (точнее, пара симметричных сторон A_0A_2 и $A'_0A'_2$) в несимметричном углу BOC, параллельная вектору OA_1, причем в полосе между прямыми OA_1 и A_0A_2 нет целых точек; соседней вершине A_{-1} соответствует соседняя сторона A_0A_{-2}. Наоборот, каждой стороне полигона отвечает вершина в несимметричном углу, именно, стороне A_1A_{-1} отвечает вершина A_0. Указанное соответствие дает удобное средство для вычисления плоского полигона.

3. Пусть $A_0 = (p, q)$, $A_{-1} = (p', q')$; под $xA_0 + yA_{-1}$ будем подразумевать точку $(xp + yp', xq + yq')$. Форма

$$\varphi(xA_0 + yA_{-1}) = \varphi_0 = a_0x^2 + 2b_0xy + c_0y^2$$

эквивалентна φ и приведена по Маркову (²), т. е. один корень λ уравнения $a_0x^2 + 2b_0x + c_0 = 0$ больше 1, другой $-\frac{1}{\lambda'}$ заключается между 0 и -1. Векторы OA_0 и OA_{-1} будем называть первым основным и вторым основным векторами формы φ_0. Пусть $\alpha_0 \geqslant 1$ — число равных частей, на которые делится отрезок $A_{-1}A_1$ целыми точками. Подстановка $x = \alpha_0x' + y'$, $y = x'$ переводит φ_0 в соседнюю приведенную

форму с первым вектором OA_1 и вторым OA_0. Таким путем получаются разложения λ, λ' в непрерывную дробь

$$\lambda = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdot}} = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots], \quad \lambda' = [\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \alpha_{-3}, \ldots].$$

Отметим тождество

$$\frac{2\sqrt{\Delta}}{|a_0|} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{|\varphi(A_0)|} = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots}} + \cfrac{1}{\alpha_{-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-2} + \cdots}}; \quad \Delta = b^2 - ac,$$

служащее исходным пунктом рассуждений Маркова (²).

Возьмем вершину A_0' и проведем через нее прямую $dA_0'e$ так, чтобы $dA_0' = eA_0'$, т. е. прямую, сопряженную с направлением OA_0', считая пару прямых BB', CC' за коническое сечение. Если бы треугольник Ode содержал целую точку E, отличную от O и A_0', то симметрия с центром A_0' превратила бы E в целую точку E', лежащую в треугольнике Ded и, следовательно, в углу $B'OC'$, так что точка A_0', будучи срединой отрезка EE', не могла бы быть вершиной полигона. Итак, критерий 1 можно заменить таким: для того чтобы точка A_0' была вершиной полигона, необходимо и достаточно, чтобы треугольник Ode $(dA_0' = eA_0')$ не содержал целых точек, кроме O и A_0'. Применяя к параллелограму $OeDd$ теорему о выпуклом теле, получим неравенство

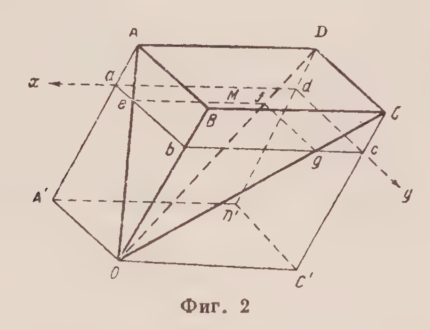
$$|\varphi(A_0')| \leqslant 2\sqrt{\Delta}, \quad \Delta = b^2 - ac. \tag{1}$$

Для дальнейшего нам понадобится еще вид плоских полигонов $\mathfrak{p}_k$ для первых трех форм Маркова $M_k(x, y)$ $(k = 1, 2, 3;$ см. Введение). Вычисляя эти полигоны, видим, что у $\mathfrak{p}_1$ все стороны простые (т. е. не содержат целых точек, кроме концов) и значения $M_1 = a(x^2 - xy - y^2)$ в вершинах равны $\pm a$, т. е. минимуму формы M_1. У $\mathfrak{p}_2$ все стороны двойные (т. е. содержат, кроме концов, еще одну целую точку) и значения $M_2 = a(x^2 - 2xy - y^2)$ в вершинах равны $\pm a$, минимуму M_2. У полигона $\mathfrak{p}_3$ в каждом углу чередуются простые и двойные стороны, а также вершины со значениями $M_3 = \pm a$ и $M_3 = \pm \frac{7}{5} a$, где a — минимум формы $M_3 = a\left(x^2 - \frac{11}{5} xy - y^2\right)$; двойная сторона соответствует (по правилу 2) вершине со значением $M_3 = \mp a$.

§ 2. Пусть дана в трехмерном пространстве плоскость $BCDA$ (фиг. 2), проходящая через три целые точки, не лежащие на одной прямой, и не проходящая через начало O. Все целые точки лежат в плоскостях, параллельных $ABCD$ и отстоящих на одинаковом расстоянии друг от друга. Пространство между соседними плоскостями (не содержащее целых точек) будем называть слоем; если уравнение $ABCD$ написано в виде $px + qy + rz = \varkappa$ (p, q, r — целые числа без общего делителя, $\varkappa > 0$ целое), то между O и $ABCD$ имеется $\varkappa$ таких слоев, и плоскость $ABCD$ будем называть $\varkappa$-слойной.

ЛЕММА. *Если имеется выпуклая четырехгранная пирамида $OABCD$* (фиг. 2) *с вершинами в целых точках и не содержащая других целых точек, то плоскость $ABCD$ однослойна.*

Предположим противное и пусть для плоскости $ABCD$ $\varkappa \geqslant 2$. Целые точки, лежащие на $ABCD$, образуют решетку и выпуклый четырехугольник $ABCD$, не содержащий, кроме вершин, точек этой решетки, должен быть ее основным параллелограмом. Дополним данную пирамиду до параллелепипеда $OA'D'C'BADC$, проведем все плоскости, параллельные $ABCD$ и содержащие целые точки, и обозначим их (0), (1), ..., ($\varkappa$), начиная от $OA'D'C'$ (0) и кончая $ABCD$ ($\varkappa$). На плоскости ($\varkappa - 1$) имеем



Фиг. 2

такую же решетку целых точек, как на ($\varkappa$), и параллелограм $abcd$ равен основному параллелограму этой решетки и одинаково с ним ориентирован. Поэтому $abcd$ должен содержать целые точки (либо одну внутри, либо две на противоположных сторонах, либо четыре в вершинах). При этом параллелограм $befg$, представляющий сечение нашей пирамиды плоскостью ($\varkappa - 1$), не содержит целых точек. Имеем $ae = \frac{OA'}{\varkappa}$; $cg = \frac{OC'}{\varkappa}$. Взяв оси координат x, y, как указано на фиг. 2, приходим к заключению, что в параллелограме $abcd$ существует целая точка $M(x, y)$, для которой либо $0 < x < \frac{OC'}{\varkappa}$, либо $0 < y < \frac{OA'}{\varkappa}$. Пусть, например, $0 < y < \frac{OA'}{\varkappa}$. Проведя прямую через точки D, M и продолжая эту прямую вниз, получим в пересечении ее со всеми плоскостями ($\varkappa - 2$), ..., (0) целые точки; при этом точка пересечения с плоскостью (0) будет лежать в полосе между прямыми OC', $A'D'$, что невозможно. Лемма доказана.

§ 3. Пусть f — любая неопределенная тройничная форма определителя $d > 0$ и F — ее союзная. Возьмем одну полость K конуса $f = 0$ и построим в ней полиэдр $\Pi(f)$ (Введение, § 3). Пусть L — соответствующая* полость конуса $F = 0$; в ней имеем аналогичный многогранник $\Pi(F)$.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $px + qy + rz = \sum px = 1$ — *однослойная эллиптическая грань полиэдра* $\Pi(f)$, *то* $M(p, q, r)$ — *вершина* $\Pi(F)$.

Так как грань однослойна (§ 2), то p, q, r — целые числа и M — целая точка внутри L. Пусть (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, ... все вершины $\Pi(f)$, лежащие на данной грани, и (A, B, C) — среднее арифметическое этих точек. Рассмотрим плоскость $\varphi = \sum Ax = 1$, эллиптическую для $F = 0$. Для

* По поводу терминологии, применяемой в этом параграфе, см. [5] §§ 1 – 5.

точки M, $\varphi=1$; пусть $N(p', q', r')$ — любая целая точка внутри L. Плоскость $\sum p'x=0$ эллиптическая для $f=0$; значит, $\sum p'\alpha \geqslant 1$, $\sum p'\alpha' \geqslant 1, \ldots$, т. е. для N $\varphi \geqslant 1$. При этом равенство $\varphi=1$ имеет место лишь при $\sum p'\alpha=1$, $\sum p'\alpha'=1, \ldots$, т. е. когда $N=M$. Значит, M — вершина $\Pi(F)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $\sum px=1$ *и* $\sum p'x=1$ — *соседние однослойные эллиптические грани полиэдра* $\Pi(f)$, *то* $M(p, q, r)$ *и* $M'(p', q', r')$ — *соседние вершины* $\Pi(F)$.

Пусть (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ — концы ребра $\Pi(f)$, на котором сходятся две данные грани. Тогда (p, q, r), (p', q', r') будут двумя независимыми решениями линейного уравнения $\sum(\alpha'-\alpha)x=0$. Рассмотрим эллиптическую для $F=0$ плоскость $\varphi=\sum \frac{\alpha+\alpha'}{2}x=1$, на которой лежат точки M и M'. Для любой целой точки $M''(p'', q'', r'')$ внутри L имеем $\sum p''\alpha \geqslant 1$, $\sum p''\alpha' \geqslant 1$, $\varphi \geqslant 1$, причем равенство $\varphi=1$ имеет место лишь в случае

$$\sum p''\alpha=1, \quad \sum p''(\alpha'-\alpha)=0, \quad M''=tM+(1-t)M',$$

т. е. когда M'' лежит на прямой MM'. Итак, отрезок MM' — ребро многогранника $\Pi(F)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Если вершина* (α, β, γ) *полиэдра* $\Pi(f)$ *такова, что все проходящие через нее грани однослойные и эллиптические, то ей соответствует однослойная эллиптическая грань* $\sum \alpha x=1$ *полиэдра* $\Pi(F)$; *соседним вершинам такого рода отвечают соседние грани.*

Как известно [(5), теорема 7], через каждую вершину $\Pi(f)$ проходит конечное число граней; пусть $\sum px=1$, $\sum p'x=1, \ldots$ все грани $\Pi(f)$, проходящие через (α, β, γ) в порядке их следования друг за другом. На основании теорем 2 и 3, точки

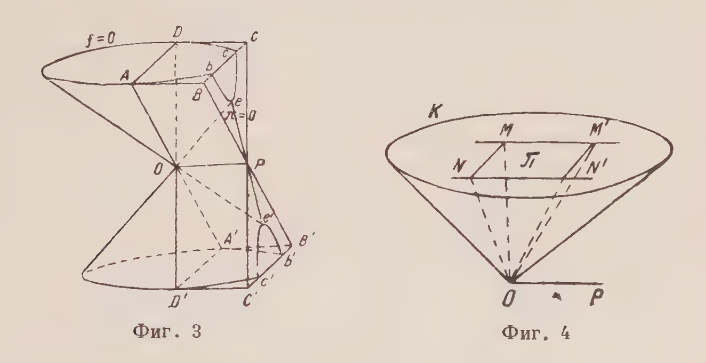
$$(p, q, r),\ (p', q', r'), \ldots \tag{2}$$

будут вершинами $\Pi(F)$, лежащими на плоскости $\sum \alpha x=1$, и каждые две рядом стоящие точки будут соседними вершинами. Поэтому $\sum \alpha x=1$ есть грань $\Pi(F)$ и точки (2) суть все вершины $\Pi(F)$, лежащие на этой грани. Теорема доказана.

Следствие. *Если все грани* $\Pi(f)$ *однослойные и эллиптические, то то же справедливо и для* $\Pi(F)$, *причем элементы многогранников* $\Pi(f)$ *и* $\Pi(F)$ *находятся во взаимном соответствии: вершинам одного соответствуют грани другого и ребрам одного — ребра другого; соответствующие ребра взаимно перпендикулярны.*

Пусть m — вершина $\Pi(f)$ и m' пробегает все соседние с m вершины. По теореме 4, m и m' соответствуют однослойные эллиптические грани φ и φ' $\Pi(F)$ и, на основании замеченного при доказательстве теоремы 4, φ' пробегает все грани, соседние с φ. Так как от любой грани $\Pi(F)$, переходя к соседним и опять к соседним, можно дойти до любой другой грани, то, значит, всякая грань $\Pi(F)$ — однослойная, эллиптическая и соответствует некоторой вершине $\Pi(f)$. Следствие доказано.

§ 4. Пусть f и F не представляют нуля и P (фиг. 3) — целая точка вне конуса $f=0$. Точка P называется *внешней вершиной* для конуса $f=0$, если во всякой рациональной, гиперболической для $f=0$ плоскости $\pi=0$, проходящей через вектор OP, P является вершиной плоского полигона, построенного для двух прямых Oe, Oe', получаемых в пересечении $f=0$, $\pi=0$ (прямые BB' и CC' на фиг. 1),



Фиг. 3 Фиг. 4

и для решетки всех целых точек на $\pi=0$. Проведем через OP две плоскости AOP и DOP, касательные к конусу $f=0$. Гиперболические плоскости, проходящие через OP, образуют пучок плоскостей между этими касательными плоскостями в тех углах, где находится конус. Плоскость AOD, проходящая через две линии касания OA и OD. сопряжена с направлением OP. Проведем через P плоскость BPC, параллельную AOD. Эта плоскость пересекает конус по гиперболе $becb'e'c'$ с центром P, а касательные плоскости — по прямым BP, CP, асимптотам этой гиперболы. Согласно § 1, точка P будет вершиной плоского полигона на $\pi=0$ тогда и только тогда, когда треугольник Oee' ($eP=e'P$) не содержит целых точек, кроме O и P. Итак, для того чтобы P была внешней вершиной, необходимо и достаточно, чтобы кусок T пространства, определяемый ниже, не содержал целых точек, кроме O и P. При этом T есть множество точек, лежащих: 1) между касательными плоскостями к конусу из OP в тех (симметричных относительно начала) углах, где лежит конус, 2) вне конуса, 3) между двумя параллельными, сопряженными с OP плоскостями, проходящими через O и P (все граничные точки включаются в T).

Пусть P — внешняя вершина (фиг. 4). Возьмем эллиптическую плоскость π, параллельную вектору OP, пересекающую полость K и весьма близкую к началу O. Будем непрерывно удалять π от O, передвигая ее параллельно самой себе до тех пор, пока на нее в первый раз не попадет целая точка M внутри K. Плоскость MOP гиперболическая и на ней P будет вершиной полигона. Согласно § 1, 2), прямая MM', параллельная OP, должна быть ближайшей к OP прямой, содержащей целые точки, и на MM' должна быть еще хоть одна целая точка M' внутри K. Если на π нет других целых точек внутри K, кроме лежащих на прямой MM', то будем вращать π вокруг MM'

до тех пор, пока на нее не попадет новая целая точка N; это при некотором положении эллиптической плоскости непременно случится, так как F, по условию, не представляет нуля [(6), теорема 4]. В новом положении плоскость π уже будет гранью $\Pi(f)$; на прямой NN', параллельной OP, будет еще одна целая точка N' внутри K. Можно считать, что $MM'N'N$ есть основной параллелограм решетки целых точек на π; применяя к пирамиде $OMM'N'N$ лемму § 2, находим, что грань π однослойна. Взяв крайнюю прямую MM' на грани, содержащую целые точки, и вращая плоскость π вокруг этой прямой, получим соседнюю, также однослойную эллиптическую грань. Такое действие можно продолжать до бесконечности в обе стороны и получим бесконечную зону $\mathfrak{Z}$ граней $\Pi(f)$, параллельных OP.

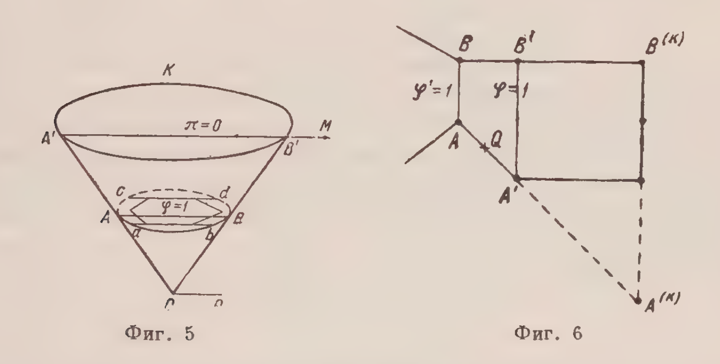
Итак, *если P — внешняя вершина для конуса $f=0$, то в полиэдре* $\Pi(f)$ *существует бесконечная в обе стороны зона $\mathfrak{Z}$ однослойных эллиптических граней, параллельных направлению OP; две рядом стоящие грани зоны $\mathfrak{Z}$ представляют собою соседние грани* $\Pi(f)$.

§ 5. Легко доказать и обратное предложение: *Пусть P — примитивная целая точка вне конуса и в* $\Pi(f)$ *существует бесконечная в обе стороны зона $\mathfrak{Z}$ однослойных эллиптических граней, параллельных OP, причем каждые две рядом стоящие грани — соседние, т. е. пересекаются по ребру* $\Pi(f)$, *параллельному OP. Пусть еще грани $\mathfrak{Z}$ обладают свойством: на каждой прямой, параллельной OP, содержащей целые точки и проходящей на грани $\varphi=1$* (фиг. 5) *между ее ребрами cd и ab, лежит не менее двух целых точек внутри K. Тогда P — внешняя вершина.*

Нужно доказать (§ 1, 2), что на каждой рациональной гиперболической плоскости $\pi=0$, проходящей через OP, на ближайшей к OP и параллельной OP прямой, содержащей целые точки, лежит не менее двух целых точек внутри K. Так как зона $\mathfrak{Z}$ в обе стороны бесконечна, то легко видеть, что плоскость $\pi=0$ либо проходит через ребро зоны, либо пересекает какую-нибудь грань зоны $\varphi=1$ между ее ребрами. Если $\pi=0$ проходит через ребро, или вообще через какую-нибудь прямую на $\varphi=1$, содержащую целые точки, наше утверждение вытекает из предположения. Поэтому можно считать, что прямая AB пересечения $\pi=0$ и $\varphi=1$ не содержит целых точек. Продолжим ребра грани $\varphi=1$, параллельные OP, до пересечения с конусом; полученные отрезки ab и cd больше OP, а так как эллипс — фигура выпуклая, то и $AB>OP$. Проведем на плоскости $\pi=0$ ближайшую к OP и параллельную ей прямую $A'B'$, содержащую целые точки, например, точку M. Так как $\varphi=1$ однослойная плоскость и M не лежит на ней, то для M $\varphi\geqslant 2$, откуда $A'B'\geqslant 2BA>2OP$, т. е. отрезок $A'B'$ содержит не менее двух целых точек. Теорема доказана.

§ 6. Пусть $P(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ — внешняя вершина и $\mathfrak{Z}$ — соответствующая ей зона граней $\Pi(f)$. По § 3 (теоремы 2 и 3), всякой грани $\varphi=\sum px=1$ зоны $\mathfrak{Z}$ соответствует вершина $M(p,\ q,\ r)$ полиэдра $\Pi(F)$ и соседним граням $\varphi=1$, $\varphi'=1$ отвечают соседние вершины M, M'. Все эти вершины M, M', ... лежат в плоскости $\pi=\sum\xi x=0$, перпендикулярной к вектору OP; плоскость $\pi=0$ гиперболическая для конуса $F=0$

и пересекает его по двум прямым. Многоугольник с вершинами $M, M', \ldots$ будет плоским полигоном, построенным на плоскости $\pi = 0$, в углу $F > 0$. Таким образом, этот полигон — прямое пересечение полиэдра $\Pi(F)$ с плоскостью $\pi = 0$, т. е. вершины и стороны полигона будут вершинами и ребрами полиэдра $\Pi(F)$. Легко характеризовать полигон также в углу $F < 0$. Пусть $\varphi = 1$ и $\varphi' = \sum p'x = 1$ — соседние грани, AB (фиг. 6) — общее им ребро, $A(\alpha, \beta, \gamma)$ — целая точка на этом ребре, $tx + uy + vz = 0$ — уравнение плоскости OAB (t, u, v без общего делителя и $\sum tx \geqslant 0$ для грани $\varphi = 1$). Числа t, u, v определяются уравне-



Фиг. 5

Фиг. 6

ниями $\sum t\alpha = 0, \sum t\xi = 0$ и так как разности $p' - p$, $q' - q$, $r' - r$ также удовлетворяют этим уравнениям, то $p' - p = \mu t$, $q' - q = \mu u$, $r' - r = \mu v$, μ — целое. Таким образом, точка $N(t, u, v)$ представляет собою вершину полигона в углу $F < 0$, соответствующую стороне MM' по правилу 2 § 1. Пусть $AB, A'B', \ldots, A^{(k)}B^{(k)}$ все прямые на грани $\varphi = 1$, параллельные OP и содержащие целые точки, в порядке их следования друг за другом (так что ребра лежат на AB и $A^{(k)}B^{(k)}$), $A'(\alpha', \beta', \gamma')$ — целая точка на соседней с AB прямой. Так как грань $\varphi = 1$ однослойна, то

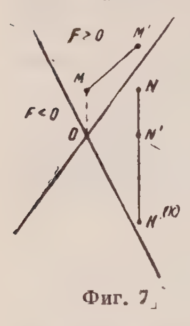
$$\begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = \varepsilon = \pm 1.$$

Пусть точка $Q(x, y, z)$ пробегает прямую AA' (эта прямая пересекает $A''B'', \ldots, A^{(k)}B^{(k)}$ в целых точках $A'', \ldots, A^{(k)}$); определим точку $R(T, U, V)$ с координатами

$$T = \varepsilon(\zeta y - \eta z), \quad U = \varepsilon(\xi z - \zeta x), \quad V = \varepsilon(\eta x - \xi y).$$

Для всякого положения Q прямая OR есть нормаль к плоскости QOP. Легко видеть, что при $Q = A$ точка R совпадает с $N(t, u, v)$, а при $Q = A'$ — с точкой $N'(t - p, u - q, v - r)$. При передвижении Q от A до A' точка R передвигается по прямой от N до N', и так как отрезок NN' (фиг. 7) равен и параллелен отрезку OM, то на NN' целых точек, кроме концов, нет. При дальнейшем передвижении Q от A' до

$A^{(k)}$ точка R будет передвигаться по той же прямой NN' до $N^{(k)}$ и целые точки встретятся только при $Q = A''$, ..., $Q = A^{(k)}$. Отрезок $NN^{(k)}$ есть сторона полигона в углу $F < 0$, соответствующая его вершине M.



Фиг. 7

Соединяя все сказанное в этом параграфе, получаем теорему:

Зона З граней, соответствующая внешней вершине P конуса $f = 0$, полностью определяет полигон формы F на плоскости, проходящей через начало перпендикулярно вектору OP. Именно, вершины полигона в углу $F > 0$ определяются нормалями к граням З, вершины в углу $F < 0$ — нормалями к плоскостям, проходящим через O и ребра зоны З. При этом если $\varphi = 1$ — грань З и AB, $A'B'$, ..., $A^{(k)}B^{(k)}$ — все прямые на этой грани, параллельные OP и содержащие целые точки (AB и $A^{(k)}B^{(k)}$ — ребра), то нормали к плоскостям OAB, $OA^{(k)}B^{(k)}$, проведенные в одном направлении, определяют две соседние вершины N, $N^{(k)}$ полигона в углу $F < 0$ и на стороне $NN^{(k)}$ полигона лежат те и только те целые точки, которые определяются нормалями к плоскостям $OA'B'$, ..., $OA^{(k)}B^{(k)}$.

§ 7. ТЕОРЕМА 5. *Для внешней вершины P*

$$|f(P)| \leqslant 4\sqrt[3]{d}. \tag{3}$$

Пусть $\pi = 0$ — плоскость, перпендикулярная OP, и OA, OB — два основных вектора решетки целых точек на этой плоскости; определитель бинарной формы

$$F(Ax + By) = F(A)x^2 + 2F(A, B)xy + F(B)y^2$$

равен

$$F(A, B)^2 - F(A)F(B) = -df(P) > 0 \quad \text{[Введение, (7)].}$$

Если $M(p, q, r)$ — вершина полигона формы F на плоскости $\pi = 0$ в углу $F < 0$, то на основании (1)

$$|F(M)| \leqslant 2\sqrt{d\,|f(P)|}. \tag{4}$$

Плоскость $\sum px = 0$, перпендикулярная к вектору OM, проходит через OP и является гиперболической для конуса $f = 0$. Если OP и OQ — основные векторы решетки целых точек на этой плоскости, то определитель бинарной формы $f(Px + Qy)$ равен

$$f(P, Q)^2 - f(P)f(Q) = -F(M) > 0 \quad \text{[Введение, (6)];}$$

так как P — вершина полигона f на этой плоскости, то на основании (1)

$$|f(P)| \leqslant 2\sqrt{|F(M)|}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) и вытекает (3). Теорема доказана.

§ 8. Предположим, что значения $|f(x, y, z)|$ данной формы для целых $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ограничены снизу положительным пределом. Этот предел можно считать равным 1.

ТЕОРЕМА 6. *Если $|f(Q)| \geqslant 1$ для всякой целой точки $Q \neq 0$, то целая точка P, для которой $1 \leqslant |f(P)| < 2$, есть вершина конуса $f = 0$ (внутренняя или внешняя, смотря по тому $f(P) > 0$ или $f(P) < 0$).*

Пусть $\pi=0$ — рациональная гиперболическая плоскость; докажем, что для всякой целой точки M на этой плоскости, не совпадающей с вершиной полигона, $|f(M)|\geqslant 2$. Без ограничения общности можно предполагать, что $f(M)>0$. Пусть сначала M лежит на границе полигона, именно на стороне AB (A и B — вершины), соответствующей вершине N. Положим $A=M-kN$, $B=M+lN$, k, l целые >0. Имеем

$$f(A)\geqslant 1, \quad f(B)\geqslant 1, \quad f(N)\leqslant -1;$$

если $f(M, N)\geqslant 0$, то неравенство $f(A)\geqslant 1$ дает

$$f(M-kN)=f(M)-2kf(M, N)+k^2f(N)\geqslant 1, \quad f(M)\geqslant 2.$$

Если $f(M, N)<0$, то то же получим из неравенства $f(B)\geqslant 1$. Если точка M лежит внутри полигона, то можно предполагать, что вектор OM пересекает одну из сторон полигона между двумя последовательными целыми точками A, B на этой стороне и тогда $M=kA+lB$, k, l — целые >0. Замечая, что для двух точек A, B, лежащих в одном (положительном) углу, $f(A, B)>0$, получим $f(M)>k^2f(A)+l^2f(B)\geqslant 2$. Пусть теперь $1\leqslant|f(P)|<2$; из сказанного вытекает, что P — вершина полигона на каждой рациональной гиперболической плоскости, проходящей через OP. Если $f(P)<0$, то, по определению (§ 4), P — внешняя вершина. Если $f(P)>0$, то из критерия § 1 вытекает, что множество точек $Q(x, y, z)$, определяемое неравенствами $0\leqslant f(Q, P)\leqslant f(P)$, $f(Q)\geqslant 0$, не содержит целых точек, кроме O и P, поэтому, по определению [(5), § 4], P — вершина $\Pi(f)$. Теорема доказана.

§ 9. Все экстремальные формы, получаемые при решении проблемы Маркова, имеют рациональные коэффициенты; поэтому для таких форм нужно иметь простое средство определять их минимум при целых аргументах. В этом параграфе будем предполагать, что f имеет рациональные коэффициенты и не представляет нуля (откуда вытекает, что и F не представляет нуля). Линейную подстановку

$$\begin{aligned} x&=\alpha x'+\beta y'+\gamma z',\\ y&=\alpha' x'+\beta' y'+\gamma' z',\\ z&=\alpha'' x'+\beta'' y'+\gamma'' z', \end{aligned}$$

с целыми коэффициентами и определителем ± 1, переводящую f в себя, будем называть *автоморфизмом* f; две точки пространства (x, y, z) и (x', y', z'), связанные такой подстановкой, будем называть *эквивалентными*. Обозначим через $+m$ и $-m'$ положительный и отрицательный минимумы f для целых аргументов; из критерия § 1 вытекает, что всякая целая точка P, для которой $f(P)=+m$ или $f(P)=-m'$, будет внутренней или внешней вершиной конуса $f=0$ (отсюда, между прочим, следует, что внешние вершины в случае рациональных коэффициентов f всегда существуют). По доказанному в моей работе [(5), теоремы 3,12] существует лишь конечное число неэквивалентных внутренних вершин; поэтому в полиэдре $\Pi(f)$ существует конечное число неэквивалентных зон 3 указанного в § 4 вида, т. е. конечное число

неэквивалентных внешних вершин. Для определения положительного минимума $+m$ вычисляем полиэдр $\Pi(f)$; вычисление считается законченным, когда имеем полную систему неэквивалентных вершин, ребер и граней $\Pi(f)$. Чтобы узнать, когда нужно остановить вычисление, можно пользоваться следующим, легко доказуемым, принципом Эрмита — Вороного: вычисляем одну вершину и все с нею соседние и из этих вершин выбираем неэквивалентные, после чего получится комплекс вершин π_1. К π_1 присоединяем все вершины, соседние со всеми вершинами π_1, и из этих вершин выбираем неэквивалентные, после чего получается комплекс π_2, и т. д. Очевидно, что в первый же раз, как только вновь вычисленный комплекс не даст новых вершин ($\pi_{k+1}=\pi_k$), π_k будет содержать полную систему неэквивалентных вершин. Вычислив $\Pi(f)$, найдем все неэквивалентные зоны $\mathfrak{Z}$, т. е. все неэквивалентные внешние вершины, а следовательно, найдем и отрицательный минимум $-m'$. Пример такого вычисления (для формы ψ_8) изложен в следующем параграфе.

§ 10. Вычислим положительный и отрицательный минимум формы

$$\psi_8 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & 1 & \frac{9}{10} \\ 1 & -\frac{11}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$$

На основании известных критериев (или непосредственно) легко убедиться, что ψ_8 не представляет 0. Вычислим полиэдр $\Pi(\psi_8)$ (на фиг. 8 изображена проекция этого многогранника на эллиптическую плоскость $z=0$). Вычисляем 4 грани, проходящие через вершину $P(0, 0, 1)$:

$$2x-y+z=1, \quad x-y+z=1, \quad z=1, \quad y+z=1.$$

Замечая, что отражение в плоскости $x+y=0$ по сопряженному направлению (на точку $(1, 1, -1)$) представляет собою автоморфизм, при помощи соответствующей подстановки

$$x'=-y, \quad y'=-x, \quad z'=x+y+z \tag{6}$$

вычисляем остальные две грани через P: $2x+z=1$ и $x+y+z=1$. Таким образом, получаем 6 вершин, соседних с P:

$$\begin{gathered} A(0, -1, 2), \quad B(1, 0, 1), \quad C(1, 1, 1), \quad D(0, 2, 3) \\ E(-2, 0, 5), \quad F(-1, -1, 3), \end{gathered} \tag{7}$$

Автоморфизм

$$\left.\begin{aligned} x &= -x' \\ y &= x'+8y'+5z' \\ z &= 3x'+11y'+7z' \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

переводит грани $x-y+z=1$, $2x-y+z=1$ в грани $x'+3y'+2z'=1$; $3y'+2z'=1$ и точку $D(x=0,\ y=2,\ z=3)$ в точку $A(x'=0,\ y'=-1,\ z'=2)$. Таким образом, получаем все грани вокруг вершины A:

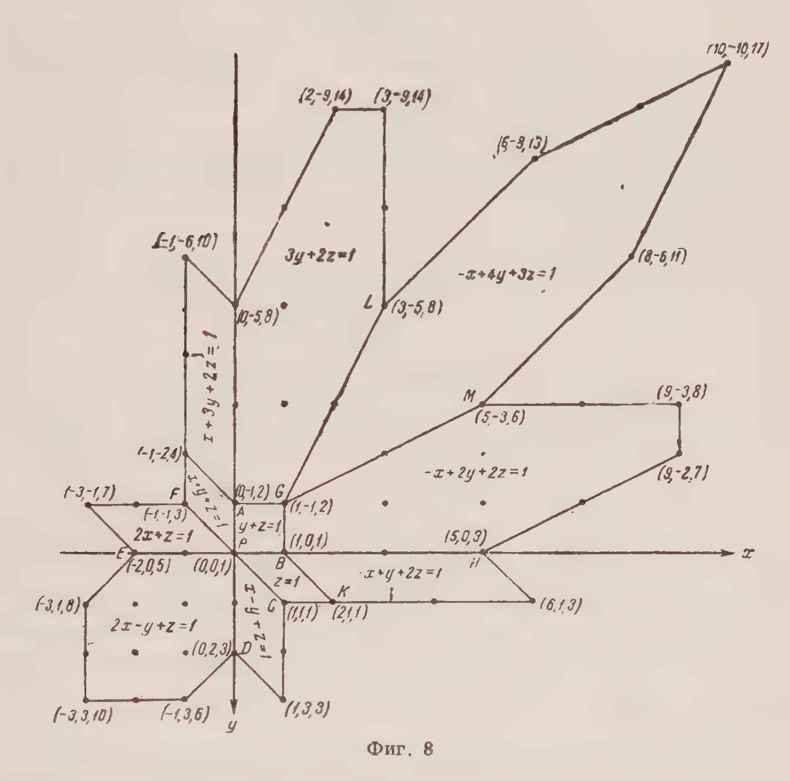
$$y+z=1,\quad 3y+2z=1,\quad x+3y+2z=1,\quad x+y+z=1.$$

Отсюда при помощи подстановки (6) найдем все грани вокруг вершины B:

$$y+z=-1,\quad -x+2y+2z=1,\quad -x+y+2z=1,\quad z=1$$

и четыре соседние с B вершины:

$$P\,(0,\,0,\,1),\quad K\,(2,\,1,\,1),\quad H\,(5,\,0,\,3),\quad G\,(1,\,-1,\,2). \tag{9}$$



Фиг. 8

Далее, вычисляем грань $-x+4y+3z=1$ и получаем все грани вокруг G:

$$y+z=1,\quad -x+2y+2z=1,\quad -x+4y+3z=1,\quad 3y+2z=1$$

и четыре соседние с G вершины:

$$A\,(0,\,-1,\,2),\quad B\,(1,\,0,\,1),\quad M\,(5,\,-3,\,6),\quad L\,(3,\,-5,\,8). \tag{10}$$

Рассмотрим вершины (7), соседние с P. Мы уже видели, что $B\sim A$, $C\sim F$, $D\sim E$ (подстановка (6)), $D\sim A$ (подстановка (8)). Далее, автоморфизм

$$\left.\begin{aligned} x' &= 2x+3y+2z \\ y' &= 2x+y+z \\ z' &= x+y+z \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

дает $x'=1$, $y'=1$, $z'=1$ при $x=0$, $y=-1$, $z=2$, т. е. $C\sim A$. Таким образом, все вершины (7) эквивалентны одной из них B, которая не

эквивалентна P, так как $\psi_8(P)=1$, $\psi_8(B)=\frac{7}{5}$. Из соседних с B вершин (9) $H\sim(0, -5, 8)\sim P$ (подстановки (6) и (8)), $K\sim P$ (подстановка (11)), так что остается одна G. Из соседних с G вершин (10) $M\sim L$ (подстановка (6)); автоморфизм

$$\left.\begin{aligned} x' &= -3x+14y+10z \\ y' &= 3x-22y-15z \\ z' &= -5x+35y+24z \end{aligned}\right\} \qquad (11')$$

при $x=1$, $y=-1$, $z=2$ дает $x'=3$, $y'=-5$, $z'=8$, т. е. $L\sim G$. Итак, все вершины $\Pi(\psi_8)$ эквивалентны P, B, G; значения формы в этих вершинах суть $\psi_8(P)=1$, $\psi_8(B)=\frac{7}{5}$, $\psi_8(G)=\frac{8}{5}$, откуда видим, что положительный минимум ψ_8 равен $+1$. Все грани $\Pi(\psi_8)$ эквивалентны четырем следующим:

$$2x-y+z=1, \quad x-y+z=1, \quad z=1, \quad y+z=1,$$

откуда легко видеть, что все внешние вершины эквивалентны $Q(0, 1, 1)$, R $(1, 1, 0)$, S $(1, 0, 0)$ со значениями $\psi_8(Q)=-1$, $\psi_8(R)=-\frac{8}{5}$, $\psi_8(S)=-\frac{7}{5}$. Поэтому отрицательный минимум ψ_8 равен -1.

Производя такое же вычисление для 11 форм $\psi_1, \ldots, \psi_{11}$ (см. теорему 1), убедимся, что для всех них минимум $|\psi_k(x, y, z)|$ равен 1.

Глава II. Формы с положительным минимумом

§ 11. Приступаем к доказательству теоремы 1 (Введение, § 3). Теорема эта очевидна, если данная форма $f(x, y, z)$ принимает сколь угодно малые значения при целых x, y, z. Поэтому можно считать, что точная нижняя грань множества $|f(x, y, z)|$ ((x, y, z) — целая точка $\neq(0, 0, 0)$) есть некоторое положительное число, которое можем принять равным 1. Теорема 1 равносильна такому утверждению: *если* $d\leqslant\frac{9}{2}$, *то* f *эквивалентна одной из форм* $\psi_1, \ldots, \psi_{11}$. Итак, нам дано, что $d\leqslant\frac{9}{2}$.

Пусть $\pi=px+qy+rz=0$ — рациональная гиперболическая плоскость для конуса $f=0$ (p, q, r — целые без общего делителя). Взяв два основных вектора (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$ решетки целых точек на плоскости $\pi=0$, рассмотрим бинарную форму

$$\bar{f}=f(\alpha t+\alpha' u, \quad \beta t+\beta' u, \quad \gamma t+\gamma' u)=At^2+2Btu+Cu^2$$

определителя $B^2-AC=-F(p, q, r)$. Если $\bar{f}$ — форма Маркова с номером k (см. Введение), то эту форму $\bar{f}$, а также плоскость $\pi=0$, будем называть **марковским сечением** M_k формы f.

Так как 1 есть точная нижняя грань множества $|f(x, y, z)|$, то может быть одно из двух: 1) либо f принимает значения, сколь угодно близкие к $+1$, 2) либо f принимает значения, сколь угодно близкие к -1. В этой главе мы будем иметь дело с первым предположением. Итак, мы предполагаем, что как бы ни было мало число $\varepsilon>0$, найдутся целые числа ξ, η, ζ, для которых $1\leqslant f(\xi, \eta, \zeta)\leqslant 1+\varepsilon$. Точка $(\xi, \eta, \zeta)=P$ лежит внутри конуса (так что можно считать ее лежащей

в полости K) и, по теореме 6, она должна быть вершиной $\Pi(f)$ (при $\varepsilon < 1$). Пусть (p, q, r) и (p', q', r') — два основных вектора на плоскости $\sum \xi x = 0$; бинарная форма

$$\varphi_P = F(pt + p'u,\ qt + q'u,\ rt + r'u) = At^2 + 2Btu + Cu^2 \tag{12}$$

существенно отрицательная определителя $B^2 - AC = -df(P)$. Беря вместо (p), (p') другую пару основных векторов на плоскости $\sum \xi x = 0$, мы перейдем к эквивалентной φ_P форме; поэтому, можно считать, что φ_P приведена по Лагранжу, т. е. что $|2B| \leqslant |A| \leqslant |C|$. Тогда $A = F(p)$ будет первый (т. е. абсолютный), а $C = F(p')$ — второй минимум формы φ_P при целых t, u, не равных одновременно 0. Плоскости $\sum px = 0$, $\sum p'x = 0$, проходящие через прямую OP, будем называть плоскостями I и II минимума. Возьмем одну из этих плоскостей, например $\sum px = 0$, и рассмотрим ближайшую к OP и параллельную OP прямую на этой плоскости, содержащую целые точки; пусть на указанной прямой содержится k целых точек вне конуса $f = 0$. Если l — такое же число для второй плоскости $\sum p'x = 0$, то пару чисел $[k, l]$ будем называть характеристикой вершины $P(\xi, \eta, \zeta)$ полиэдра $\Pi(f)$.

§ 12. Так как P — вершина $\Pi(f)$, то $k \geqslant 2$, $l \geqslant 2$ (§ 1). Из условия $d \leqslant \frac{9}{2}$ легко получить верхние пределы для чисел k, l. Пусть QR — ближайшая к OP и параллельная OP прямая, содержащая целые точки, на плоскости $\sum px = 0$, причем Q и R — точки пересечения этой прямой с конусом $[f(Q) = f(R) = 0]$. Легко видеть, что $\frac{QR}{OP} = \frac{2\sqrt{|F(p)|}}{m}$, где

$$m = f(P) = f(\xi, \eta, \zeta), \quad 1 \leqslant m \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Из формулы (12) и соотношений

$$AC - B^2 = dm, \quad |2B| \leqslant |A| \leqslant |C|$$

вытекает

$$|A| = |F(p)| \leqslant \sqrt{\frac{4}{3} dm}, \quad k - 1 < \frac{QR}{OP} = \frac{2\sqrt{|A|}}{m} < \sqrt[4]{\frac{64}{3}\frac{d}{m^3}} \leqslant \sqrt[4]{96},$$

т. е. $k \leqslant 4$. Если $Q'R'$ — отрезок на плоскости $\sum p'x = 0$, аналогичный QR, то $l - 1 < \frac{Q'R'}{OP} = \frac{2\sqrt{|C|}}{m}$.

Рассмотрим сечение (§ 11) формы f плоскостью I минимума $\sum px = 0$, т. е. бинарную форму $\bar{f}$ определителя $-F(p) = |A|$. По свойству бинарных форм Маркова (Введение, § 1) форма $\bar{f}$ совпадает либо с M_1, либо с M_2, либо же при некоторых целых t, u имеем $\frac{\bar{f}(t, u)^2}{|A|} \leqslant \frac{100}{221}$ и так как всегда $|\bar{f}(t, u)| \geqslant 1$, то $|A| \geqslant 2{,}21$. Если $\bar{f} = M_1$, то, так как P — одна из вершин полигона M_1 на плоскости $\sum px = 0$,

$$\frac{m^2}{|A|} = \frac{4}{5}, \quad |A| = \frac{5}{4} m^2, \quad |B| \leqslant \frac{5}{8} m^2, \quad \frac{5}{4} m^2 |C| \leqslant \frac{25}{64} m^4 + \frac{9}{2} m,$$

$$|C| \leqslant \frac{5}{16} m^2 + \frac{18}{5},$$

$$l-1<\sqrt{\frac{5}{4}+\frac{72}{5}}=\sqrt{15,65}, \quad l\leqslant 4.$$

Если $\bar{f}=M_2$, то аналогично

$|A|=2m^2, \quad 2m^2|C|\leqslant m^4+\frac{9}{2}m, \quad |C|\leqslant\frac{1}{2}m^2+\frac{9}{4}, \; l-1<\sqrt{11}, \; l\leqslant 4.$

Наконец, при $|A|\geqslant 2{,}21$ полученное выше неравенство $|A|\leqslant\sqrt{\frac{4}{3}dm}$ дает

$$|B|\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}m}, \quad 2{,}21|C|\leqslant 6m, \quad l-1<\sqrt{11}, \quad l\leqslant 4.$$

Итак, во всех случаях $k\leqslant 4$, $l\leqslant 4$, так что нам нужно рассмотреть характеристики $[k, l]$ $(k=2, 3, 4;\ l=2, 3, 4)$.

Пусть (λ, μ, ν), (λ', μ', ν') — целые точки соответственно на прямых QR, $Q'R'$. Матрица, союзная с

$$\begin{pmatrix} \xi & \lambda & \lambda' \\ \eta & \mu & \mu' \\ \zeta & \nu & \nu' \end{pmatrix}, \tag{13}$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} p'' & \varepsilon' p' & \varepsilon p \\ q'' & \varepsilon' q' & \varepsilon q \\ r'' & \varepsilon' r' & \varepsilon r \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon=\pm 1$, $\varepsilon'=\pm 1$, p'', q'', r'' — целые числа. Поэтому определитель матрицы (13) делит числа

$$qr'-rq', \quad rp'-pr', \quad pq'-qp';$$

но эти числа не имеют общего делителя, так как (p, q, r), (p', q', r') — пара основных векторов на плоскости $\sum \xi x=0$. Итак, определитель матрицы (13) равен ± 1.

§ 13. Замечание. Пусть $P(\xi, \eta, \zeta)$ — вершина $\Pi(f)$, $1\leqslant m= f(P)<1{,}19$ и $\pi=0$ — рациональная плоскость, проходящая через вектор OP. Если на ближайшей к OP прямой, содержащей целые точки (на плоскости $\pi=0$), имеются 2 точки вне конуса $f=0$, то плоскость $\pi=0$ есть сечение M_1 формы f и может быть принята за плоскость I минимума для вершины P.

Возьмем на плоскости $\pi=0$ целую точку (λ), как указано на фиг. 9, и положим $f(\lambda)=-m'$ $(m'\geqslant 1)$, $f(\xi, \lambda)=\bar{\eta}$. При замене (λ) на $(\xi-\lambda)$ число $\bar{\eta}$ заменится на $m-\bar{\eta}$, так что можно считать $\bar{\eta}\leqslant\frac{m}{2}$. Далее, $f(\lambda+\xi)=m+2\bar{\eta}-m'\geqslant 1$, откуда $m'\leqslant 2m-1$. Плоскость $\pi=0$ дает в сечении с f форму $\bar{f}=mt^2+2\bar{\eta}tu-m'u^2$ определителя $\Delta=mm'+ +\bar{\eta}^2\leqslant\frac{9}{4}m^2-m<2$ (так как $m<1{,}19$). Поэтому при целых $(t, u)\neq(0, 0)$

отношение $\frac{\bar{f}(t, u)^2}{\Delta} \geqslant \frac{1}{\Delta} > \frac{1}{2}$, т. е. $\bar{f} = M_1$, $\frac{m^2}{\Delta} = \frac{4}{5}$. Если бы $\pi = 0$ не была плоскостью I минимума, то на плоскости $\sum \xi x = 0$ нашлась бы целая точка (p'), для которой $|F(p')| < \Delta$. Для сечения φ формы f плоскостью $\sum p'x = 0$ имеем

$$\frac{\varphi(t, u)^2}{|F(p')|} \geqslant \frac{1}{|F(p')|} > \frac{1}{\Delta} > \frac{1}{2}, \quad \varphi = M_1, \ \frac{m^2}{|F(p')|} = \frac{4}{5}, \quad |F(p')| = \Delta,$$

что противоречит неравенству $|F(p')| < \Delta$. Утверждение замечания доказано.

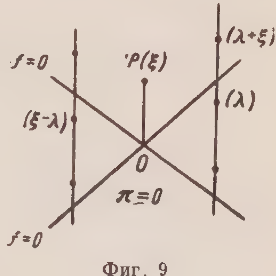
ТЕОРЕМА 7. *Если в вершине $P(\xi)$ имеем характеристику* $[2, 2]$ *и* $m = f(P) < 1{,}04$, *то* $f \sim \psi_1$.

По предыдущему замечанию, плоскости I и II минимума в вершине P суть сечения M_1 формы f. Взяв на этих плоскостях целые точки (λ') и (λ) (фиг. 9), по свойству полигона M_1 имеем

$$f(\lambda) = f(\lambda') = -m,$$

$$f(\xi, \lambda) = f(\xi, \lambda') = \frac{m}{2}.$$

Положим $f(\lambda, \lambda') = \omega$. При выбранной точке (λ') можно заменить (λ) на $(\xi - \lambda)$, так что можно считать $\omega \leqslant \frac{m}{4}$. Форма f подстановкой



Фиг. 9

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \xi \\ \mu & \mu' & \eta \\ \nu & \nu' & \zeta \end{pmatrix} \tag{14}$$

переходит в форму

$$f_1 = \begin{pmatrix} -m & \omega & \frac{m}{2} \\ & \omega - m & \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} & \frac{m}{2} & m \end{pmatrix}$$

Так как определитель подстановки равен ± 1 (конец § 12), то $f \sim f_1$. Если точка $(-2, 2, 3)$ (в новых координатах) лежит вне конуса, то $f_1(-2, 2, 3) = m - 8\omega \leqslant -1$, $\omega \geqslant \frac{m+1}{8}$. Неравенства $\frac{m+1}{8} \leqslant \omega \leqslant \frac{m}{4}$ дают $|f_1(-1, 2, 2)| = |m - 4\omega| < 0{,}02$, что невозможно. Значит, точка $(-2, 2, 3)$ лежит внутри и $\omega \leqslant \frac{m-1}{8}$.

Так как $x = 0$ и $y = 0$ — плоскости I и II минимума для вершины $P(0, 0, 1)$, то форма

$$F_1(t, u, 0) = -\frac{5}{4} m^2 t^2 + \left(\frac{m^2}{2} - 2\omega m\right) tu - \frac{5}{4} m^2 u^2$$

должна быть приведена по Лагранжу (§ 11), т. е. $\frac{m^2}{2} - 2\omega m \leqslant \frac{5}{4} m^2$; $\omega \geqslant -\frac{3}{8} m$. Отсюда вытекает, что точка $(-1, 1, 1)$ лежит вне конуса. Возьмем плоскость $x + y = 0$; эта плоскость гиперболическая, так как она про-

ходит через точку $P(0, 0, 1)$ внутри конуса; далее, $|F_1(1, 1, 0)| = 2m^2 + 2\omega m \leqslant 2m^2 + \frac{m(m-1)}{4} < 2{,}21$, так как $m < 1{,}04$. Значит, $x+y=0$ дает сечение M_1 или M_2 формы f_1. По доказанному выше, точки $A(-2, 2, 3)$ и $P(0, 0, 1)$ лежат внутри, а точка $(-1, 1, 1) = \frac{A-P}{2}$ вне конуса; поэтому двойной отрезок AP есть сторона (или часть стороны) полигона на плоскости $x+y=0$. Значит, эта плоскость не может быть сечением M_1, а должна быть M_2, откуда $f_1(A) = f_1(P)$, $\omega = 0$. Форма $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ подстановкой $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ переходит в $\psi_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Следовательно, $f \sim m\psi_1$. Но так как 1 есть точная нижняя грань значений $|f(x, y, z)|$, то $m=1$, $f \sim \psi_1$. Теорема доказана.

§ 14. ТЕОРЕМА 8. *При характеристике* $[2, 3]$ *и* $m = f(P) < 1{,}0001$ *форма* $f \sim \psi_2, \psi_4, \psi_6$ *или* ψ_7.

На плоскости I минимума (сечение M_1) выбираем точку (λ') (фиг. 9) и аналогично берем точку (λ) на плоскости II минимума. Полагаем

$$f(\lambda) = -m' \ (m' \geqslant 1), \quad f(\lambda, \lambda') = \omega, \quad f(\xi, \lambda) = \eta;$$

можно считать $\eta \leqslant m$ (замена (λ) на $(2\xi - \lambda)$), $\omega \geqslant \frac{\eta}{2}$ (замена (λ') на $(\xi - \lambda')$). Подстановка (14) переводит f в форму

$$f_1 = \begin{pmatrix} -m' & \omega & \eta \\ \omega & -m & \frac{m}{2} \\ \eta & \frac{m}{2} & m \end{pmatrix}.$$

Точка (λ) была выбрана так, чтобы $(\lambda + \xi)$ лежала внутри, а $(\lambda - 2\xi)$ вне конуса; это приводит к неравенствам

$$2\eta \geqslant m' - m + 1, \tag{15}$$

$$4\eta \geqslant 4m - m' + 1. \tag{16}$$

В союзной форме

$$F_1 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4}m^2 & \frac{m}{2}\eta - m\omega & \frac{m}{2}\omega + m\eta \\ & -mm' - \eta^2 & \omega\eta + \frac{mm'}{2} \\ & & mm' - \omega^2 \end{pmatrix}$$

$F_1(x, y, 0)$ приведена по Лагранжу, откуда $\omega \leqslant \frac{\eta}{2} + \frac{5}{8}m$.

Если точка (1, 1, 0) лежит внутри, то

$$m' \leqslant 2\omega - m - 1 \leqslant \eta + \frac{5}{4} m - m - 1 \leqslant \frac{5}{4} m - 1 < 1,$$

что противоречит неравенству $m' \geqslant 1$; следовательно, точка (1, 1, 0) лежит вне и

$$2\omega \leqslant m + m' - 1. \tag{17}$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Точка (2, 0, 1) лежит внутри конуса, т. е. $1 + 4m' \leqslant m + 4\eta$, откуда $m' \leqslant \frac{5m-1}{4}$, $mm' + \eta^2 \leqslant \frac{9m^2 - m}{4} < 2{,}21$. Следовательно, плоскость $y = 0$ есть сечение M_1 или M_2; но так как отрезок между точками (0, 0, 1) и (2, 0, 1), лежащими внутри конуса, двойной, то $y = 0$ есть M_2 и $f_1(0, 0, 1) = f_1(2, 0, 1) = -f_1(1, 0, 0)$, т. е. $m = m' = \eta$. Далее, легко доказать, что плоскость $x - y + z = 0$, проходящая через точки (0, 1, 1) и (1, 1, 0), дает сечение M_2, откуда $f_1(0, 1, 1) = -f_1(1, 1, 0)$, $\omega = \frac{m}{2}$. Форма $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ подстановкой $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ переходит в $\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Следовательно, $f \sim m\psi_2$, $m = 1$, $f \sim \psi_2$. Теперь можем предполагать, что (2, 0, 1) вне конуса, т. е.

$$m + 4\eta + 1 < 4m'. \tag{18}$$

2. Точка (1, 3, 1) лежит внутри, т. е.

$$m' + 5m + 1 \leqslant 6\omega + 2\eta. \tag{19}$$

Из (19), (17) и неравенства $\eta \leqslant m$ вытекает, что $m' \geqslant 2$; затем из (19): $\omega \geqslant \frac{m+1}{2}$, $\omega - \eta \geqslant \frac{1-m}{2}$. Из (17) и (15) следует $\omega - \eta \leqslant m - 1$; наконец, $3\eta - \omega - m' \leqslant \frac{5m-5}{2}$. Поэтому

$$-F_1(-1, 1, 1) = (\omega - \eta)^2 + m\left(\frac{5}{4} m + 3\eta - \omega - m'\right) \leqslant$$
$$\leqslant (m-1)^2 + \frac{5}{4} m^2 + \leqslant \ + \frac{5}{2} m(m-1) < 2,$$

т. е. плоскость $-x + y + z = 0$ есть сечение M_1. Если (1, −1, 2) вне, то $1 + m + 4\eta \leqslant m' + 2\omega$, что вместе с (17) и (15) дает $m \geqslant 2$. Итак, (1, −1, 2) лежит внутри и $f_1(1, -1, 2) = f_1(1, 0, 1) = -f_1(0, 1, -1)$, т. е. $m' = 2\eta$, $\omega = \eta$. Далее, легко доказать, что $\eta \geqslant 1$, $3x + z = 0$ есть сечение M_1 и что точка (−1, 0, 3) внутри конуса, откуда $f_1(-1, 0, 3) =$

$= -f_1(0, 1, 0)$, $\eta = m$. Форма $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ подстановкой $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

переходит в $\psi_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$. Следовательно, $f \sim \psi_6$.

Теперь можно предположить, что точка (1, 3, 1) лежит вне, т. е.

$$6\omega + 2\eta + 1 \leqslant m' + 5m. \tag{20}$$

Тогда легко доказать, что $E'''(2, 3, 1)$ должна быть вне конуса. В самом деле, в противном случае было бы $4m' + 5m + 1 \leqslant 12\omega + 4\eta$, что вместе с (20) дает $2m' + 3 \leqslant 5m$. Из (16) и (18) получаем $m' \geqslant m + 0{,}4 \geqslant 1{,}4$ и из $2m' + 3 \leqslant 5m$ вытекает $5m \geqslant 5{,}8$, что противоречит неравенству $m < 1{,}0001$. Итак, точки $E(2, 0, 1)$ и $E'''(2, 3, 1)$ лежат вне конуса. Рассмотрим прямую EE''', параллельную отрезку OA, где $A = (0, 1, 0)$. На прямой EE''' между E и E''' лежат две целые точки $E'(2, 1, 1)$ и $E''(2, 2, 1)$. Так как $f_1(A) = -m$; $m < 1{,}0001$, то A — внешняя вершина (теорема 6). Могут быть два случая: либо плоскость OEE''' эллиптическая и тогда E', E'' лежат вне конуса; либо эта плоскость гиперболическая и тогда, по свойству внешних вершин (§ 4), обе точки E', E'' должны быть внутри конуса. Рассмотрим оба случая отдельно.

3. Точки E', E'' лежат вне конуса; неравенство $f_1(E') \leqslant -1$ дает

$$m + 4\eta + 4\omega + 1 \leqslant 4m'. \tag{21}$$

Если (4, 0, 3) лежит вне, то $24\eta + 9m + 1 \leqslant 16m'$, что с (15) дает $13 \leqslant 4m' + 3m$; пользуясь еще неравенством $m' \leqslant 3m - 1$, выводимым из (15), получим $m \geqslant \frac{17}{15}$, что невозможно. Итак, точка (4, 0, 3) лежит внутри. Если точка (6,1,4) лежит вне, то $12\omega + 48\eta + 19m + 1 \leqslant 36m'$. Применяя последовательно неравенства $\omega \geqslant \frac{\eta}{2}$, (15) и $m' \leqslant 3m - 1$, получим $m \geqslant \frac{37}{35}$, что невозможно. Итак, (6, 1, 4) лежит внутри. Замечая, что плоскость $-3x + 2y + 4z = 0$ проходит через точки (4, 0, 3), (6, 1, 4), можем написать

$$-F_1(-3, 2, 4) = \left(\frac{27}{2}m + 34\eta + 4\omega - 24m'\right)^2 - $$
$$- (24\eta + 9m - 16m')(12\omega + 48\eta + 19m - 36m'). \tag{22}$$

Пользуясь сначала (21), затем неравенством $6\eta \leqslant 4m' - m - 1$, выводимым из (21), получим

$$\frac{27}{2}m + 34\eta + 4\omega - 24m' \leqslant \frac{25}{2}m + 30\eta - 20m' - 1 \leqslant \frac{15}{2}m - 6.$$

Левая часть этого неравенства положительна, так как для двух точек в одной полости конуса $f(A, B) > 0$. Теперь из (22) вытекает, что $-F_1(-3, 2, 4) \leqslant \left(\frac{15}{2}m-6\right)^2 - 1 < 2$, т. е. что плоскость $-3x+2y+4z=0$ есть сечение M_1. Замечая, что точки $(4, 0, 3)$, $(6, 1, 4)$ лежат внутри, а точка $(2, 1, 1) = E'$ лежит вне конуса, получим $f_1(4, 0, 3) = f_1(6, 1, 4) = -f_1(E')$, откуда $\eta = 2\omega$, $m + 3\eta = 2m'$. Далее, легко доказать, что точка $(-2, 1, 5)$ лежит вне, а $(-4, 0, 11)$ — внутри и плоскость $11x+2y+4z=0$, проходящая через эти точки, есть сечение M_1; следовательно, $f_1(-4, 0, 11) = -f_1(-2, 1, 5)$, т. е. $m = \eta$.

Форма $\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ подстановкой $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ -2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ переходит в форму

$\psi_7 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, откуда $f \sim \psi_7$.

4. Точки E', E'' лежат внутри, т. е.

$$1 + 4m' \leqslant 4\omega + 4\eta + m, \tag{23}$$

$$1 + m + 4m' \leqslant 8\omega + 4\eta. \tag{24}$$

Имеем

$$-F_1(1, 0, -2) = \left(\frac{m}{2} + 6\omega + 4\eta - 4m'\right)^2 - f_1(E')\,f_1(E''). \tag{25}$$

Выше доказано, что точка $(2, 3, 1)$ лежит вне конуса, т. е. $12\omega + 4\eta + 1 \leqslant 4m' + 5m$, что вместе с (23) дает $\omega \leqslant \frac{3m-1}{4}$; применяя это неравенство и (18), получим

$$0 < \frac{m}{2} + 6\omega + 4\eta - 4m' \leqslant \frac{m}{2} + \frac{9}{2}m - \frac{3}{2} - m - 1 = 4m - \frac{5}{2};$$

после чего (25) дает $-F_1(1, 0, -2) \leqslant \left(4m - \frac{5}{2}\right)^2 - 1 < 2$, т. е. $x - 2z = 0$ есть M_1, $f_1(E') = f_1(E'') = -f_1(0, 1, 0)$, т. е. $\omega = \frac{m}{2}$, $m' = \frac{m}{2} + \eta$. Далее доказываем, что точки $(2, -1, 2)$ и $(2, -2, 3)$ лежат внутри и плоскость $-x+2y+2z=0$ есть сечение M_1, откуда $f_1(2, -1, 2) = f_1(2, -2, 3)$, $\eta = m$. Форма $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ подстановкой $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

переходит в форму $\psi_4=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$. Следовательно, $f\sim\psi_4$. Теорема доказана.

§ 15. ТЕОРЕМА 9. *При характеристике* [2,4] *и* $m=f(P)<1{,}0001$ *имеем* $d>\frac{9}{2}$.

Беря на плоскостях I и II минимума целые точки (λ') и (λ) аналогично тому, как на фиг. 9, положим $f(\lambda)=-m'$ $(m'\geqslant 1)$, $f(\lambda,\lambda')=\omega$, $f(\xi,\lambda)=\eta$; можно считать $\eta\leqslant\frac{3}{2}m$. Так как $(\lambda+\xi)$ лежит внутри, а $(\lambda-3\xi)$ — вне конуса, то

$$2\eta\geqslant m'-m+1, \tag{26}$$

$$6\eta\geqslant 9m-m'+1, \tag{27}$$

откуда $\eta>m+\frac{1}{4}$. Форма $f\sim f_1$ (см. предыдущую теорему); кроме того, можем считать $\frac{\eta}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{\eta}{2}+\frac{5m}{8}$. Далее,

$$d=m\left(\frac{5}{4}mm'+\eta^2+\omega\eta-\omega^2\right). \tag{28}$$

Из неравенства $\omega\leqslant\frac{\eta}{2}+\frac{5m}{8}\leqslant\frac{11}{8}m$ выводим, что точка (1, 1, 0) вне конуса, т. е.

$$2\omega\leqslant m+m'-1. \tag{29}$$

Неравенства $\omega\leqslant\frac{\eta}{2}+\frac{5m}{8}$, $\eta\geqslant m+\frac{1}{4}$ дают

$$\eta-\omega\geqslant\frac{\eta}{2}-\frac{5}{8}m\geqslant\frac{1-m}{8}>-0{,}01;\quad \eta-\omega\leqslant\frac{\eta}{2}\leqslant\frac{3}{4}m<0{,}76. \tag{30}$$

Поэтому $F_1(0,1,1)=mm'-(\eta-\omega)^2>0$, т. е. плоскость $y+z=1$ есть грань $\Pi(f_1)$. Пользуясь (27), получаем

$$F_1(3,0,1)=-\frac{45}{4}m^2+3m\omega+6m\eta+mm'-\omega^2\geqslant m-\frac{9}{4}m^2+3m\omega-\omega^2. \tag{31}$$

Функция вида $A\omega-\omega^2$ при изменении ω в любом интервале принимает наименьшее значение на границах интервала. Подставляя в (31) значения $\omega=\frac{5}{8}$ и $\omega=\frac{11}{8}m$, убедимся, что $F_1(3,0\ 1)>0$, т. е. $3x+z=1$ есть грань $P(f_1)$. Далее, из (29) вытекает $\omega\leqslant\frac{1}{2}mm'$; если бы $F_1(0,0,1)=mm'-\omega^2\leqslant 0$, то $mm'\geqslant 4$, между тем как из (26) следует, что $m'\leqslant 4m-1<3{,}04$, $mm'<3{,}05$. Следовательно, $z=1$ — также грань $\Pi(f_1)$. Если точка $(-1,-1,4)$ внутри конуса, то $m'+8\eta+1\leqslant 2\omega+11m$; применяя (29) и (27), получим $m'\geqslant\frac{5}{2}$. Из (30) и (28) находим

$d \geqslant \frac{25}{8} + \frac{25}{16} - \frac{11}{8} m \cdot 0{,}01 > 4{,}5$. Поэтому можно предполагать, что точка $(-1, -1, 4)$ лежит вне, т. е.

$$2\omega + 11m + 1 \leqslant m' + 8\eta. \tag{32}$$

На основании этого неравенства можно написать

$$F_1(3, 1, 1) = -\frac{45}{4} m^2 - \eta^2 - \omega^2 + 9m\eta - 3m\omega + 2\omega\eta + mm' \geqslant m - \\ - \frac{m^2}{4} + m(\eta - \omega) - (\eta - \omega)^2,$$

после чего из (30) находим, что $F_1\ (3, 1, 1) > 0$, т. е. что $3x + y + z = 1$ есть грань. Итак, в вершине $P(0, 0, 1)$ сходятся четыре однослойные эллиптические грани полиэдра $\Pi(f_1)$, пересекающиеся на плоскостях $x = 0$, $y = 0$ (фиг. 10). Если точка $(2, 0, 1)$ лежит внутри, то $m' \leqslant \eta + \frac{m-1}{4}$; подставляя это и неравенство $\omega \geqslant \frac{\eta}{2}$ в неравенство (32), получим $\eta \geqslant \frac{43}{32} m + \frac{5}{32} \geqslant \frac{3}{2}$. То же неравенство (19) при помощи соотношений $\omega \geqslant \frac{\eta}{2}$, $\eta \leqslant \frac{3}{2} m$ дает $m' \geqslant \frac{3}{2}$. Наконец, $2\omega \leqslant m' + m - 1 \leqslant$ $\leqslant \eta + \frac{5}{4}(m-1)$, откуда $\eta - \omega \geqslant \frac{\eta}{2} - \frac{5}{8}(m-1) > 0{,}74$; подставляя $m' \geqslant \frac{3}{2}$, $\eta \geqslant \frac{3}{2}$, $\omega \geqslant \frac{3}{4}$ в формулу (28), получим $d > 4{,}5$. Поэтому можно считать, что точка $(2, 0, 1)$ лежит вне, т. е.

Фиг. 10

$$m' \geqslant \eta + \frac{m+1}{4}. \tag{33}$$

Если точка $(1, -2, 3)$ лежит вне, то $6\eta + 1 \leqslant m' + m + 4\omega$; комбинируя это неравенство сначала с $\omega \leqslant \frac{\eta}{2} + \frac{5}{8} m$ и (26), потом с (32) и (26), получим $2\eta + 2 \leqslant \frac{9}{2} m$ и $\eta \geqslant \frac{9m+3}{8} \geqslant \frac{3}{2}$, откуда $m \geqslant \frac{10}{9}$, что невозможно. Следовательно, точка $(1, -2, 3)$ лежит внутри, т. е.

$$m' + 4\omega + m + 1 \leqslant 6\eta. \tag{34}$$

Если точка $(1, -3, 4)$ лежит внутри, то $m' + 6\omega + 5m + 1 \leqslant 8\eta$, что вместе с $\omega \geqslant \frac{\eta}{2}$ и (33) дает $\frac{13}{8} \leqslant \eta \leqslant \frac{3}{2} m$, $m \geqslant \frac{13}{12}$, а это невозможно; итак, точка $(1, -3, 4)$ лежит вне, т. е.

$$8\eta + 1 \leqslant m' + 6\omega + 5m. \tag{35}$$

Если точка $(2, -3, 4)$ лежит внутри конуса, то $4m' + 12\omega + 5m + 1 \leqslant 16\eta$, что вместе с (35) дает $2m' + 3 \leqslant 5m$. Но из (33) и неравенства $\eta \geqslant m + \frac{1}{4}$ вытекает $m' \geqslant \frac{7}{4}$; следовательно, $5m \geqslant \frac{13}{2}$, что невозможно. Итак, точка $(2, -3, 4)$ лежит вне.

На прямой AB (фиг. 10) только две целые точки A и B могут лежать внутри конуса. По свойству внешних вершин либо обе точки A, B лежат внутри, либо обе вне. В первом случае обычным способом докажем, что плоскость OAB есть сечение M_1, откуда $f_1(A) = f_1(B) = -f_1(0, -1, 1)$, т. е. $\omega = \eta - \frac{m}{2}$, $m' = \eta + \frac{m}{2}$. При этих значениях из (32) выводим $\eta \geqslant \frac{3}{2}$ и из (33): $m' \geqslant 2$, после чего (28) дает $d > \frac{9}{2}$. Во втором случае, когда точки A и B лежат вне конуса, из неравенства $f_1(B) \leqslant -1$ получаем

$$8\eta + m + 1 \leqslant 4m' + 4\omega. \tag{36}$$

Поэтому грань $y + z = 1$ полиэдра $\Pi(f_1)$ имеет форму трапеции, изображенной на фиг. 10; следовательно, линия $P'C$ является ребром полиэдра $\Pi(f_1)$. Рассмотрим вершину $P'(0, -1, 2)$ полигона M_1 на плоскости $x = 0$, соседнюю с вершиной P, и пусть $[2, l]$ — характеристика P'. Если $l > 4$, то $d > \frac{9}{2}$; если $l < 4$, то, по предыдущим теоремам, f эквивалентна ψ_1, ψ_2, ψ_4, ψ_6 или ψ_7, что невозможно, так как вычисление полиэдров этих форм показывает, что они не имеют вершин с характеристикой $[2,4]$ (каковою является P). Поэтому в P' имеем $[2,4]$, т. е. в P' сходятся опять 4 грани полиэдра $\Pi(f_1)$, пересекающиеся на плоскостях $x = 0$ и $x + 2y + z = 0$ (так как $P'C$ — ребро $\Pi(f_1)$).

Плоскость $x + 2y + z = 0$ пересекает прямую DE в точке $(-1, -3, 7)$, так что $(-1, -4, 8)$ должна быть вне конуса, т. е. $8\omega + 16m + 1 \leqslant m' + 16\eta$, что вместе с (36) дает $m' \geqslant \frac{7}{3}$. Из (29) и (34) находим $\eta - \omega \geqslant \frac{1}{3}$. Полученные неравенства и неравенства $\eta \geqslant \frac{5}{4}$, $\omega \geqslant \frac{5}{8}$ дают, наконец, $d > 4{,}5$.

Теорема доказана.

§ 16. На основании предыдущих теорем можно предполагать, что данная форма f не имеет сечений M_1 с достаточно близким к ± 1 значением f в вершинах полигона M_1, так что в характеристике $[k, l]$ данной вершины $P(\xi)$ внутри конуса считаем $k > 2$, $l > 2$. Предположим теперь, что f имеет сечение M_2, плоскость которого проходит через вектор OP; тогда легко видеть что при $m^2 < \frac{2{,}21}{2}(m = f(P))$ плоскость I минимума для P будет также сечением M_2, так что (§ 12) нам нужно разобрать случаи $l = 3$, $l = 4$.

ТЕОРЕМА 10. *При характеристике* $[M_2, 3]$ *и* $m = f(P) < 1{,}001$ *форма* $f \sim \psi_3$, ψ_7 *либо* $d > \frac{9}{2}$.

Выбирая, как обычно, координатные оси, находим, что f эквивалентна форме

$$f_1 = \begin{pmatrix} -m' & \omega & \eta \\ \omega & -m & m \\ \eta & m & m \end{pmatrix},$$

$m' \geqslant 1,\ \eta < m,\ \omega \leqslant \eta,\ 2\eta \geqslant m' - m + 1,\ 4\eta \geqslant 4m - m' + 1,\ \eta \geqslant \frac{m}{2} + \frac{1}{3} \geqslant \frac{5}{6}.$

Союзная форма имеет вид

$$F_1 = \begin{pmatrix} -2m^2 & m\eta - m\omega & m\omega + m\eta \\ & -mm' - \eta^2 & \omega\eta + mm' \\ & & mm' - \omega^2 \end{pmatrix},$$

$$\eta - \omega \leqslant m, \quad d = m(2mm' + \eta^2 + 2\omega\eta - \omega^2).$$

Предположим сначала, что точка (2, 0, 1) лежит внутри конуса, т. е. $m' \leqslant \eta + \frac{m-1}{4}$. Отсюда $m' \leqslant \frac{5m-1}{4}$, $mm' + \eta^2 \leqslant \frac{9m^2 - m}{4} < 2{,}21$, т. е. плоскость $y = 0$ есть сечение M_2, $m' = \eta = m$. Имеем $f_1(2, -2, 3) = m - 8\omega$; если точка (2, −2, 3) находится внутри конуса, то

$$\omega \leqslant \frac{m-1}{8}, -F_1(1, 1, 0) = 2m^2 + 2m\omega \leqslant \frac{9m^2 - m}{4} < 2{,}21,$$

$x + y = 0$ есть M_2, $\omega = 0$. Форма $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ подстановкой $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ переходит в форму $\psi_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Следовательно, $f \sim \psi_3$.

Если точка (2, −2, 3) лежит вне конуса, то $\omega \geqslant \frac{m+1}{8}$; легко видеть что точка (1, −1, 2) лежит внутри, а точка (3, −1, 2) — вне конуса, откуда

$$\omega \geqslant \frac{m}{3} + \frac{1}{6}, \quad -F_1(0, 2, 1) = 3m^2 + \omega^2 - 4m\omega \leqslant \frac{16}{9}m^2 - \frac{5}{9}m + \frac{1}{36} < 2,$$

$2y + z = 0$ есть M_1, $f_1(1, -1, 2) = m$, $\omega = \frac{m}{2}$. Форма $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ подстановкой $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ переходит в форму $\psi_7 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Следовательно, $f \sim \psi_7$.

Теперь предположим, что точка (2, 0, 1) лежит вне конуса, т. е.

$$m + 4\eta + 1 \leqslant 4m'. \tag{37}$$

Это неравенство вместе с неравенством $4\eta \geqslant 4m - m' + 1$ дает

$$m' \geqslant m + 0{,}4 \geqslant 1{,}4. \tag{38}$$

Если точка $(-1, 1, 2)$ лежит вне, то $7m + 1 \leqslant m' + 2\omega + 4\eta$; отсюда (пользуясь неравенством $\omega \leqslant \eta \leqslant m$) $m' \geqslant 2$; (пользуясь неравенством, $m' \leqslant 3m - 1$, $\eta \leqslant m$) $\omega \geqslant 1$; $\eta \geqslant \omega \geqslant 1$ и затем $d \geqslant 6$. Следовательно, точка $(-1, 1, 2)$ лежит внутри конуса, т. е.

$$m' + 2\omega + 4\eta + 1 \leqslant 7m. \tag{39}$$

Если точка $(1, -1, 2)$ лежит вне, то $4\eta + 1 \leqslant m' + 2\omega + m$, что с (39) дает $\eta + \frac{1}{4} \leqslant m$, $m \geqslant \frac{5}{6} + \frac{1}{4} = 1{,}08\ldots$ что противоречит $m < 1{,}001$; итак, точка $(1, -1, 2)$ находится внутри конуса, т. е.

$$m' + 2\omega + m + 1 \leqslant 4\eta. \tag{40}$$

Если точка $(2, -1, 2)$ лежит вне, то

$$8\eta + 1 \leqslant 4m' + 4\omega + m, \tag{41}$$

что с (40) дает $m + 3 \leqslant 2m'$, $m' \geqslant 2$. Далее, из (41) и неравенства $m' \leqslant 2\eta + m - 1$ вытекает $\omega \geqslant \frac{5(1-m)}{4}$. Подставляя в (40) неравенства $m' \geqslant \frac{m+3}{2}$, $\eta \leqslant m$, получим $\omega \leqslant \frac{5(m-1)}{4}$, откуда $|\omega| \leqslant 0{,}01$. Так как $\eta \geqslant \frac{5}{6}$, то формула для d дает $d \geqslant 4 + \frac{25}{36} - 0{,}02 - 0{,}01 > 4{,}5$. Поэтому точка $(2, -1, 2)$ находится внутри конуса, т. е.

$$4m' + 4\omega + m + 1 \leqslant 8\eta. \tag{42}$$

Из этого неравенства и (37) следует, что $\omega \leqslant \eta - \frac{m+1}{2}$, а из (42) и неравенства $\omega \geqslant \eta - m$ вытекает, что $m' \leqslant \eta + \frac{3m-1}{4}$. Итак,

$$\eta - m \leqslant \omega \leqslant \eta - \frac{m+1}{2}, \quad \eta + \frac{m+1}{4} \leqslant m' \leqslant \eta + \frac{3m-1}{4}. \tag{43}$$

Если точка $(-2, 2, 3)$ лежит вне, то $17m + 1 \leqslant 4m' + 8\omega + 12\eta$, что вместе с (43) дает $18m + 6 < 24\eta$, $\eta \geqslant 1$. Применяя неравенства $1 \leqslant \eta \leqslant m$ и (43), получим

$$f_1(2, 1, 1) = -4m' + 4\omega + 4\eta + 2m \leqslant 4\eta - m - 3 \leqslant 3m - 3 < 0{,}003,$$
$$f_1(2, 1, 1) \geqslant 4\eta + 1 - 5m \geqslant 5 - 5m > -0{,}005,$$

что невозможно. Поэтому точка $(-2, 2, 3)$ лежит внутри конуса, т. е.

$$4m' + 8\omega + 12\eta + 1 \leqslant 17m, \tag{44}$$

что вместе с (43) дает $\eta \leqslant m - \frac{1}{12}$ и, далее, $m' \leqslant \frac{7}{4}m - \frac{1}{3}$, $\omega \leqslant \frac{m}{2} - \frac{7}{12}$. Отсюда

$$f_1(-4, 2, 7) = -16m' - 16\omega - 56\eta + 73m \geqslant 19\tfrac{1}{3} - 19m > 0{,}2. \tag{45}$$

Если точка $(-2, 5, 3)$ лежит вне конуса, то $14m+1 \leqslant 4m'+20\omega+12\eta$, что вместе с (44) дает $\omega \geqslant \frac{1}{6}-\frac{m}{4}$, после чего из (43) получаем $\eta \geqslant \frac{2}{3}+ +\frac{m}{4}$; $m' \geqslant \frac{11}{12}+\frac{m}{2}$. Поэтому $f_1(-4, 2, 7) \leqslant 55m-\frac{164}{3} < 0{,}5$, что несовместимо с (45). Итак, точка $(-2, 5, 3)$ находится внутри конуса, т. е.

$$4m'+20\omega+12\eta+1 \leqslant 14m,$$

что с (43) дает $\eta \leqslant \frac{11}{12}m-\frac{1}{18}$, после чего из (43) выводим $m' \leqslant \frac{5}{3}m- -\frac{11}{36} < 1{,}37$, что противоречит $m' \geqslant 1{,}4$ (см. (38)). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 11. *При характеристике* $[M_2, 4]$ *имеем* $d \geqslant 5$.

Форма f эквивалентна f_1 (см. в предыдущей теореме); при этом можно предполагать $\eta \geqslant \frac{3}{2}m$, $\omega \leqslant \eta$, $\omega \geqslant \eta - m \geqslant \frac{1}{2}$. Поэтому $d \geqslant 2m'+ +\eta^2+\omega\eta \geqslant 2+\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=5$. Теорема доказана.

§ 17. Теперь можем предполагать, что f не имеет сечений M_1, M_2 с достаточно близким к 1 значением f в вершинах полигона M_1 или M_2.

ТЕОРЕМА 12. *Если имеем характеристику* $[3, 3]$, $m=f(P)<1{,}001$ *и если точка* $(1, 1, 0)$ (в новых координатах, см. ниже) *лежит вне конуса, то* $d > \frac{9}{2}$.

Форма f эквивалентна

$$f_1 = \begin{pmatrix} -m'' & \omega & \eta'' \\ \omega & -m' & \eta' \\ \eta'' & \eta' & m \end{pmatrix}, \tag{46}$$

причем можно предполагать

$$\left.\begin{aligned} &\eta' \geqslant m;\ 2\eta' \geqslant m'-m+1,\ 6\eta' \leqslant 9m-m'-1,\ \eta' \leqslant \frac{3}{2}m-\frac{1}{3}, \\ &\eta'' \leqslant m,\ 2\eta'' \geqslant m''-m+1;\ 4\eta'' \geqslant 4m-m''+1;\ \eta'' \geqslant \frac{m}{2}+\frac{1}{3};\ \eta'' \geqslant \frac{5}{6}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Так как $F_1(x, y, 0)$ приведена по Лагранжу, то

$$m\omega \leqslant \eta'\eta''+\frac{mm'+\eta'^2}{2}, \quad m\omega \geqslant \eta'\eta''-\frac{mm'+\eta'^2}{2}, \quad mm'+\eta'^2 \leqslant mm''+\eta''^2. \tag{48}$$

Далее,

$$\left.\begin{aligned} d &= mm'm''+m'\eta''^2+m''\eta'^2+2\omega\eta'\eta''-m\omega^2, \\ md &= (mm'+\eta'^2)(mm''+\eta''^2)-(m\omega-\eta'\eta'')^2. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

По условию, точка $(1, 1, 0)$ находится вне конуса, т. е. $2\omega \leqslant m'+m''-1$. Если точка $(2, 0, 1)$ лежит внутри, то

$$m'' \leqslant \eta''+\frac{m-1}{4} \leqslant \frac{5m-1}{4}, \quad mm''+\eta''^2 \leqslant \frac{9m^2-m}{4} < 2{,}21;$$

т. е. f имеет сечение M_1 или M_2, что невозможно. Значит, точка (2, 0, 1) лежит вне, $m'' \geqslant \eta'' + \frac{m+1}{4}$, откуда, как обычно, выводим, что $m'' \geqslant 1{,}4$. Если точка (0, 2, 1) лежит вне, то $m' \geqslant \eta' + \frac{m+1}{4} \geqslant \frac{3}{2}$, $mm' + \eta'^2 \geqslant \geqslant \frac{5}{2} m$ и (48), (49) дают $md \geqslant \frac{3}{4}(mm' + \eta'^2)^2 \geqslant \frac{75}{16} m^2$, $d > \frac{9}{2}$. Поэтому точка (0, 2, 1) лежит внутри, $m' \leqslant \eta' + \frac{m-1}{4}$, что вместе с $6\eta' \leqslant 9m - m' - 1$ дает $m' \leqslant \frac{3}{2} m - \frac{5}{14}$. Если $(-1, 1, 2)$ вне, то

$$4m + 4\eta' + 1 \leqslant m' + m'' + 2\omega + 4\eta''.$$

Применяя последовательно неравенства $2\omega \leqslant m' + m'' - 1$, $m' \leqslant \eta' + \frac{m-1}{4}$, $m'' \leqslant 3m - 1$, получим $\eta' \leqslant \frac{13m-9}{4} < 1{,}01$, $m' \leqslant \frac{7m-5}{2} < 1{,}01$, $mm' + \eta'^2 < 2{,}1$, что невозможно. Следовательно, точка $(-1, 1, 2)$ находится внутри конуса, т. е.

$$m' + m'' + 2\omega + 4\eta'' + 1 \leqslant 4m + 4\eta', \tag{50}$$

что вместе с неравенством $2\omega + 1 \leqslant m' + m''$ дает

$$\omega \leqslant m + \eta' - \eta'' - \frac{1}{2} \leqslant m + \frac{3}{2} m - \frac{1}{3} - \frac{m}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 2m - \frac{7}{6}; \quad \omega < 0{,}84. \tag{51}$$

Если $(2, -1, 2)$ лежит внутри, т. е. $m' + 4m'' + 4\omega + 4\eta' + 1 \leqslant 4m + 8\eta''$, то при помощи неравенств $m'' \geqslant \eta'' + \frac{m+1}{4}$; $m' \geqslant 1$ находим $\eta'' \geqslant \geqslant \omega + \eta' + \frac{3}{4}(1-m)$. Теперь второе неравенство (48) дает

$$m\omega \geqslant \omega\eta' + \frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{3}{4}(1-m)\eta' - \frac{1}{2} mm' \geqslant$$
$$\geqslant \omega\eta' + \frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{3}{4}(1-m)\eta' - \frac{1}{2} m\eta' - \frac{1}{8} m(m-1)$$

или

$$(\eta' - m)\,\omega \leqslant -\frac{1}{2}\eta'(\eta' - m) + \frac{3}{4}(m-1)\eta' + \frac{1}{8} m(m-1). \tag{52}$$

Если $\eta' \leqslant 1{,}06m$, то $m' \leqslant 1{,}06m + \frac{m-1}{4} < 1{,}063$, $\eta' < 1{,}062$, $mm' + \eta'^2 < 2{,}2$, что невозможно. Поэтому неравенства $\eta' > 1{,}06m$ и (52) дают

$$\omega \leqslant -\frac{1}{2}\eta' + \frac{(m-1)(6\eta' + m)}{0{,}48}.$$

Отсюда, так как $\eta' \leqslant \frac{3}{2} m - \frac{1}{3} < 1{,}17$, получаем $\omega < -0{,}51$. С другой

стороны, то же второе неравенство (48) непосредственно дает $\omega \geqslant \frac{5}{6} - \frac{m'}{2} - \frac{\eta'^2}{2}$, откуда при помощи неравенств $m' \leqslant \frac{3}{2}m - \frac{5}{14} < 1,16$, $\eta' < 1,17$ найдем, что $\omega > -0,44$. Полученное противоречие показывает, что $(2, -1, 2)$ должна лежать вне конуса, т. е.

$$4m + 8\eta'' + 1 \leqslant m' + 4m'' + 4\omega + 4\eta'. \tag{53}$$

Если точка $(1, -1, 2)$ лежит внутри, то

$$m' + m'' + 2\omega + 4\eta' + 1 \leqslant 4m + 4\eta'',$$

что с (53) дает $m' + 4\eta' + 3 \leqslant 4m + 2m''$. Так как $m'' \leqslant 3m - 1$, то отсюда получаем

$$m' \leqslant 6m - 5 < 1,01 \qquad \eta' \leqslant \frac{5}{2}m - \frac{3}{2} < 1,01, \qquad mm' + \eta'^2 < 2,1,$$

что невозможно. Итак, $(1, -1, 2)$ лежит вне конуса, т. е.

$$4m + 4\eta'' + 1 \leqslant m' + m'' + 2\omega + 4\eta'. \tag{54}$$

Это неравенство вместе с (50) дает $\eta' \geqslant \eta'' + \frac{1}{4} \geqslant \frac{13}{12}$. Далее, из (54) и неравенств

$$4\eta'' \geqslant 4m - m\eta'' + 1, \quad m' \leqslant \frac{3}{2}m - \frac{5}{14}, \quad \eta' \leqslant \frac{3}{2}m - \frac{1}{3}$$

вытекает

$$m'' + \omega \geqslant \frac{m}{4} + \frac{155}{84}. \tag{55}$$

Наконец, (54) вместе с $m'' \leqslant 2\eta'' + m - 1$ дает $\omega \geqslant \frac{61}{28} - \frac{7}{4}m > 0,42$. Итак [см. (51)], $0,42 < \omega < 0,84$. Полагая $\varphi(\omega) = 2\eta'\eta''\omega - m\omega^2$, из условий $\eta'' \geqslant \frac{5}{6}$, $\eta' \geqslant \frac{13}{12}$ находим $\varphi(0,42) < \varphi(0,84)$. Замечая еще, что $mm' + \eta'^2 \geqslant 2,21$ (так как f не имеет сечений M_1, M_2), из формулы (49) получаем

$$d \geqslant 2,21m'' + \eta''^2 + 0,84\eta'\eta'' - 0,1764m \geqslant 2,21m'' + 1,27.$$

Если $m'' \geqslant 1,47$, то последнее неравенство дает $d > 4,5$. Поэтому можно считать $m'' < 1,47$ и тогда из (55) следует $\omega > 0,62$. Теперь $0,62 < \omega < 0,84$ и опять $\varphi(0,62) < \varphi(0,84)$. Припоминая, что $m'' \geqslant 1,4$, получаем окончательно

$$d \geqslant 2,21m'' + \eta''^2 + 1,24\eta'\eta'' - 0,3844m > 4,5.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 13. *Если имеем характеристику* $[3, 3]$, $m = f(P) < 1,001$ *и если точка* $(1, 1, 0)$ (*в новых координатах*) *лежит внутри конуса, то* $f \sim \psi_8$, *либо* $d > \frac{9}{2}$.

Форма f эквивалентна f_1 [см. (46)] и опять имеем неравенства (47) и (48). Далее, так же, как и в предыдущей теореме, докажем, что

$(2, 0, 1)$ лежит вне, а $(0, 2, 1)$ внутри конуса, т. е.

$$m'' \geqslant \eta'' + \frac{m+1}{4}, \quad m'' \geqslant m + 0{,}4, \quad m' \leqslant \eta' + \frac{m-1}{4}, \quad m' \leqslant \frac{3}{2}m - \frac{5}{14}. \tag{56}$$

Точка $(1, 1, 0)$, по условию, лежит внутри, т. е.

$$m' + m'' + 1 \leqslant 2\omega. \tag{57}$$

Если $(-1, -1, 4)$ лежит вне, то $16m + 2\omega + 1 \leqslant m' + m'' + 8\eta' + 8\eta''$, что вместе с (57) и $\eta'' \leqslant m$ дает $m + \frac{1}{4} \leqslant \eta'$, $m + \frac{1}{4} \leqslant \frac{3}{2}m - \frac{1}{3}$, $m \geqslant \frac{7}{6}$, а это невозможно. Значит, $(-1, -1, 4)$ находится внутри конуса, т. е.

$$m' + m'' + 8\eta' + 8\eta'' + 1 \leqslant 16m + 2\omega. \tag{58}$$

Если $(-1, -2, 6)$ лежит вне, то $36m + 4\omega + 1 \leqslant m'' + 4m' + 12\eta'' + 24\eta'$, что вместе с (58) дает $4m + m'' + 3\eta'' + 3 \leqslant 2m' + 8\eta'$, откуда на основании неравенств $m'' + 4\eta'' \geqslant 4m + 1$, $m' \leqslant \eta' + \frac{m-1}{4}$ получим $\frac{3m}{4} + \frac{9}{20} \leqslant$ $\leqslant \eta' \leqslant \frac{3}{2}m - \frac{1}{3}$, $m \geqslant \frac{47}{45}$, что невозможно. Значит, $(-1, -2, 6)$ лежит внутри,

$$m'' + 4m' + 12\eta'' + 24\eta' + 1 \leqslant 36m + 4\omega. \tag{59}$$

Если $(2, 1, 0)$ лежит вне, то

$$4\omega + 1 \leqslant m' + 4m''. \tag{60}$$

Это неравенство вместе с (57) дает $m' + 3 \leqslant 2m''$; отсюда, пользуясь неравенством $m'' \leqslant 3m - 1$, получаем $m' \leqslant 6m - 5 < 1{,}01$; пользуясь неравенством $m'' \leqslant 2\eta'' + m - 1$, получаем $\eta'' \geqslant \frac{3-m}{2}$. Далее, из (60) и (58) находим $m' + 16\eta' + 16\eta'' + 3 \leqslant 2m'' + 32m$, откуда

$$4 + 16\eta' + 24 - 8m \leqslant 6m - 2 + 32m, \quad \eta' \leqslant \frac{23m - 15}{8} < 1{,}01, \quad mm' + \eta'^2 < 2{,}1,$$

что невозможно. Итак, $(2, 1, 0)$ лежит внутри конуса,

$$4m'' + m' + 1 \leqslant 4\omega. \tag{61}$$

Если $(1, 3, 0)$ находится вне конуса, то $6\omega + 1 \leqslant m'' + 9m'$. Из этого неравенства и (61) находим

$$2m'' + 1 \leqslant 3m', \quad 2m + 1{,}8 \leqslant \frac{9}{2}m - \frac{15}{14}, \quad m > \frac{28}{25},$$

а это невозможно. Значит, $(1, 3, 0)$ лежит внутри, т. е.

$$m'' + 9m' + 1 \leqslant 6\omega. \tag{62}$$

Из неравенств $\eta' \leqslant \frac{3}{2}m - \frac{1}{3}$, $m' \leqslant \frac{3}{2}m - \frac{5}{14}$ получаем $\eta' < 1{,}169$, $m' < 1{,}146$, после чего первое неравенство (48) дает

$$\omega \leqslant \eta' + \frac{m'}{2} + \frac{\eta'^2}{2} < 2{,}426. \tag{63}$$

Докажем теперь, что точка $(2, 2, -1)$ лежит вне конуса. Если $(2, 2, -1)$ внутри, то $m' + m'' + \eta' + \eta'' + \frac{1}{4} \leqslant 2\omega + \frac{m}{4}$, что вместе с пер-

вым неравенством (48) и первым (56) дает $(\eta'-m)\eta''\geqslant\frac{\eta'}{2}(m-\eta')+\frac{m}{4}$. Отсюда видно, что не может быть $\eta'=m$; следовательно, $\eta'>m$ и

$$\eta''\geqslant\frac{m}{4(\eta'-m)}-\frac{\eta'}{2}. \tag{64}$$

Если $\eta'<1{,}157m$, то (64) дает $\eta''\geqslant\frac{1}{0{,}628}-0{,}579m>1{,}01$, а это противоречит неравенству $\eta''\leqslant m<1{,}001$; поэтому $\eta'\geqslant 1{,}157m$. Если $(-2,0,5)$ лежит вне, то

$$\frac{25}{4}m+\frac{1}{4}\leqslant m''+5\eta''. \tag{65}$$

Это неравенство вместе с неравенством $m''\leqslant 2\eta''+m-1$ дает $\eta''\geqslant\geqslant\frac{3}{4}m+\frac{5}{28}$. Пользуясь формулами (65) $\eta''\geqslant\frac{3}{4}m+\frac{5}{28}$, $\eta'\geqslant 1{,}157m$, получаем из неравенства (59):

$$\frac{25}{4}m+\frac{1}{4}+4+\frac{21}{4}m+\frac{5}{4}+27{,}768m+1\leqslant 36m+4\omega,$$

откуда $\omega\geqslant 2{,}44$, что противоречит (63). Если $(-2,0,5)$ лежит внутри, то $m''+5\eta''+\frac{1}{4}\leqslant\frac{25}{4}m$, что вместе с первым неравенством (56) дает

$$\eta''\leqslant m-\frac{1}{12}. \tag{66}$$

Пользуясь этим неравенством и $\eta'<1{,}169$, из первого (48) получаем

$$2\omega\leqslant\frac{2\eta'\eta''}{m}+m'+\frac{\eta'^2}{m}\leqslant 2{,}338\cdot 0{,}917+m'+1{,}367,\quad 2\omega\leqslant m'+3{,}511. \tag{67}$$

Если $\eta'\leqslant 1{,}165$, то из (64) и (66) следует $m-\frac{1}{12}\geqslant\frac{1}{0{,}66}-0{,}583$, $m\geqslant\geqslant 1{,}015$, что невозможно. Значит, $\eta'>1{,}165$. Так как $\eta'<1{,}169$, $\eta'-m<0{,}169$, то (64) дает $\eta''>0{,}894$. Подставляя $m''\geqslant\eta''+\frac{1}{2}$, $\eta''>0{,}894$, $\eta'>1{,}165$ и (67) в неравенство (59), получим $2m'<1{,}976$, что невозможно. Итак, мы доказали, что точка $(2,2,-1)$ находится вне конуса, т. е.

$$m+8\omega+1\leqslant 4m'+4m''+4\eta'+4\eta''. \tag{68}$$

Если $(2,3,-1)$ лежит внутри, то $4m''+9m'+4\eta''+6\eta'+1\leqslant m+12\omega$, что с (68) дает $3m'+\frac{m}{2}+\frac{5}{2}\leqslant 2m''+2\eta''$, $3\leqslant m''+\eta''$. Так как $\eta''\leqslant m<<1{,}001$, то $m''>1{,}999$ и (61) дает $\omega\geqslant 2{,}499$, что противоречит (63). Значит, $(2,3,-1)$ лежит вне, т. е.

$$m+12\omega+1\leqslant 4m''+9m'+4\eta''+6\eta'. \tag{69}$$

Умножая неравенства

$$\begin{array}{r|l} 4\eta''+m+1\leqslant 4m'' & 5\\ 4m''+m'+1\leqslant 4\omega & 9\\ m''+9m'+1\leqslant 6\omega & 4\\ 12\omega+m+1\leqslant 4m''+9m'+4\eta''+6\eta' & 5 \end{array}$$

на приписанные сбоку множители и складывая. получим

$$10m+23 \leqslant 30\eta'. \tag{70}$$

Точно так же неравенства

$$\begin{array}{c|c} 4m''+m'+1 \leqslant 4\omega & 17 \\ m''+9m'+1 \leqslant 6\omega & 42 \\ 12\omega+m+1 \leqslant 4m''+9m'+4\eta''+6\eta' & 30 \\ m''+4m'+12\eta''+24\eta'+1 \leqslant 36m+4\omega & 10 \end{array}$$

дают

$$165m'+60\eta'+99 \leqslant 330m. \tag{71}$$

Из (70) и (71) вытекает $m' \leqslant \frac{62m-29}{33} < 1{,}002$, из (71) $\eta' \leqslant \frac{11}{2}m - \frac{22}{5} < 1{,}11$ и $mm'+\eta'^2 < 2{,}237$. Как известно [см. Марков (2)], для бинарной формы M_4 при минимуме ± 1 определитель равен $\frac{1517}{676} = 2{,}244\ldots$; так как f не имеет сечений M_1, M_2, то приходим к заключению, что $x=0$ есть сечение M_3 формы f_1. Положим $(0, 0, 1) = P$, $(0, 1, 0) = Q$, $(0, 1, -2) = R$. Так как $f_1(P) = m > 0$, $f_1(Q) < 0$, $f_1(R) < 0$, то QR — двойная сторона полигона M_3, соответствующая вершине P, так что, по свойству M_3 (§ 1), $|f_1(Q)|$ и $|f_1(R)|$ должны, независимо от порядка, равняться m и $\frac{7}{5}m$. Так как $|f_1(Q)| = m' \leqslant |f_1(R)| = m'+4\eta'-4m$, то $|f_1(Q)| = m$, $|f_1(R)| = \frac{7}{5}m$, т. е. $m'=m$, $\eta'=1{,}1m$. Принимая это во внимание и исключая из (69), (61) и первого неравенства (56) числа ω и η'', получим $m'' \leqslant 2{,}65m - 1{,}25 < 1{,}403$, затем $\eta'' \leqslant m'' - \frac{1}{2} < 0{,}903$, $mm'' + \eta''^2 < 2{,}221$, т. е. $y=0$ есть также сечение M_3. Отсюда аналогично предыдущему получим $m'' = 1{,}4m$, $\eta' = 0{,}9m$. Точно так же, наконец, докажем, что $z=0$ — также сечение M_3. Как известно, $f_1(1, 1, 0) > 0$, $f_1(1, 3, 0) > 0$, $f_1(0, 1, 0) = -m < 0$; уравнения $f_1(1, 1, 0) = m$, $f_1(1, 3, 0) = \frac{7}{5}m$ дают разные значения для ω; поэтому полагаем $f_1(1, 1, 0) = \frac{7}{5}m$, $f_1(1, 3, 0) = m$, откуда $\omega = 1{,}9m$. Итак,

$$f_1 = m\begin{pmatrix} -1{,}4 & 1{,}9 & 0{,}9 \\ 1{,}9 & -1 & 1{,}1 \\ 0{,}9 & 1{,}1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Форма $\begin{pmatrix} -1{,}4 & 1{,}4 & 0{,}9 \\ 1{,}9 & -1 & 1{,}1 \\ 0{,}9 & 1{,}1 & 1 \end{pmatrix}$ подстановкой $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ переходит в форму $\psi_8 = \begin{pmatrix} -1{,}4 & 1 & 0{,}9 \\ 1 & -2{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $m=1$; $f \sim \psi_8$.

Теорема доказана.

§ 18. ТЕОРЕМА 14. *При характеристиках* [3, 4], [4, 3], [4, 4] *и* $m = f(P) < 1{,}01$ *имеем* $d < \frac{9}{2}$.

Форма f эквивалентна (46). При характеристиках [4, 3], [4, 4] можно считать $\eta' \geqslant \frac{3}{2}m$, $mm' + \eta'^2 \geqslant \frac{13}{4}m^2$ и формула (49) дает $d \geqslant \geqslant \frac{3}{4} \cdot \frac{169}{16} > 7$. При характеристике [3, 4] положим $\alpha = mm' + \eta'^2$; при $\alpha \geqslant \frac{5}{2}$ $d \geqslant \frac{3}{4{,}04} \cdot \frac{25}{4} > 4{,}6$. Поэтому $2{,}21 \leqslant \alpha < 2{,}5$. Можно считать $\eta'' \geqslant \frac{3}{2}m$, поэтому $mm'' + \eta''^2 \geqslant \frac{13}{4}$, $d \geqslant \frac{13\alpha - \alpha^2}{4{,}04}$. Последнее выражение на границах интервала $2{,}21 \leqslant \alpha < 2{,}5$ делается > 5, поэтому и $d > 5$. Теорема доказана.

Из изложенного в §§ 11—18 вытекает справедливость теоремы 1 для форм, принимающих сколь угодно близкие значения к своему минимуму с положительной стороны. Заметим, что теоремы 7 и 8 дают примеры *законченных* характеристик ([2, 2], [2, 3]), так как доказательства этих теорем не связаны с нашим основным предположением $d \leqslant \frac{9}{2}$ (§ 11). При дальнейшем продолжении ряда экстремальных тройничных форм по нашему методу законченные характеристики уже не пересматриваются.

Глава III. Формы с отрицательным минимумом

§ 19. На основании доказанного в предыдущей главе можно предполагать, что данная форма f не принимает положительных значений, сколь угодно близких к 1. Но так как 1 есть точная нижняя грань значений $|f(x, y, z)|$ (§ 11), то для всякого $\varepsilon > 0$ существует целая точка $P(\lambda, \mu, \nu)$, для которой $f(P) = -m$, $1 \leqslant m < 1 + \varepsilon$. Чтобы иметь определенную базу для оценок, мы будем предполагать $m < 1{,}001$ (иногда $m < 1{,}0001$). По теореме 6, точка P — внешняя вершина и, следовательно, существует зона З однослойных эллиптических граней $\Pi(f)$ с ребрами, параллельными вектору OP. Пусть $\pi = \sum \lambda x = 0$ плоскость, перпендикулярная вектору OP, и $\mathfrak{p}$ — полигон формы F на плоскости $\pi = 0$. Зона З и полигон $\mathfrak{p}$ находятся в соответствии, описанном в теореме § 6; согласно этой теореме, грани $\varphi = 1$ зоны З отвечает сторона AB полигона $\mathfrak{p}$ в углу $F < 0$. Все целые точки, лежащие на грани $\varphi = 1$, располагаются на прямых $l_0, l_1, \ldots, l_k$, (l_0, l_k — ребра); сторона AB содержит $k+1$ целых точек, так что $k = \alpha_{2s+1}$ есть звено непрерывной дроби полигона $\mathfrak{p}$ в углу $F < 0$. Звенья $\mathfrak{p}$ в углу $F > 0$ обозначим α_{2s}. Каждая из прямых $l_0, \ldots, l_k$ содержит не менее двух целых точек внутри конуса; если какая-нибудь прямая l_i содержит только две точки, то (§ 13, Замечание) при m, достаточно близком к 1, плоскость через 0 и l_i будет сечением M_1 формы f и этот случай можно отбросить. Итак, можно предполагать, что все ребра зоны З содержат не менее трех целых точек. Пусть (p, q, r) — примитивная целая точка; построим соответствующую бинарную форму (§ 11) $f = f(\alpha t + \alpha' u) = At^2 + 2Btu + Cu^2$ определителя $B^2 - AC = -F(p)$; все

значения $|\bar{f}| \geqslant 1$ и, при $F(p) > 0$, по теореме Коркина (см. Введение) найдется значение $|\bar{f}| \leqslant \sqrt{\frac{4}{3} F(p)}$, откуда $F(p) \geqslant \frac{3}{4}$. Итак, все положительные значения $F \geqslant \frac{3}{4}$. Далее, можно предполагать, что все отрицательные значения F на плоскости $\pi = 0$ будут $\leqslant -\frac{9}{4}$. Действительно, если найдется значение $|F(p)| < \frac{9}{4}$, то для всех значений f имеем $\frac{\bar{f}^2}{|F(p)|} \geqslant \frac{1}{|F(p)|} > \frac{4}{9}$, т. е. f — форма Маркова (см. Введение) с минимумом $\pm\mu$; так как $\bar{f}$ принимает значение $-m$, то $1 \leqslant \mu \leqslant m$, а так как $\bar{f}$ принимает значение μ, то выходит, что f может принимать значения, достаточно близкие к $+1$, что исключено. Пусть (p, q, r) — вершина полигона $\mathfrak{p}$; применяя тождество Маркова, получим

$$\frac{2\sqrt{dm}}{|F(p)|} = \alpha_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1} + \ddots} + \cfrac{1}{\alpha_{k-1} + \ddots} \tag{72}$$

При $F(p) < 0$, по замеченному, $|F(p)| \geqslant \frac{9}{4}$; кроме того, $d \leqslant \frac{9}{2}$, $m < 1{,}001$, так что (72) дает $\alpha_{2s} < \frac{8}{9}\sqrt{\frac{9}{2} m} < 2$, $\alpha_{2s} = 1$. При $F(p) > 0$ (72) дает $\alpha_{2s+1} < \frac{8}{3}\sqrt{\frac{9}{2} m} < 6$, $\alpha_{2s+1} \leqslant 5$. Если $\alpha_{2s+1} = 5$, то, так как $\alpha_{2s} = \alpha_{2s+2} = 1$, из (72) получаем $6 > 5 + \cfrac{1}{1 + \ddots} + \cfrac{1}{1 + \ddots} > 6$, что невозможно. Поэтому $\alpha_{2s+1} \leqslant 4$. Итак, каждая сторона полигона $\mathfrak{p}$ в углу $F > 0$ простая, каждая сторона в углу $F < 0$ содержит не более пяти целых точек. Возвращаясь еще раз к случаю $F(p) < 0$, из (72) получаем $|F(p)| < \frac{2}{1{,}4}\sqrt{\frac{9}{2} m} < \sqrt{10}$; плоскость $\sum px = 0$ пересекает зону 3 по ребру и для числа β целых точек на этом ребре получаем $\beta - 1 < \frac{2\sqrt{|F(p)|}}{m} < 2\sqrt[4]{10} < 4$, $\beta \leqslant 4$. Таким образом, ребра зоны 3 содержат не более 4 целых точек.

Замечание. *Если ребро 3 содержит 4 точки, то* $d > \frac{9}{2}$. В самом деле, пусть $A + kP$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ целые точки на данном ребре. Положим $A + P = P'' = (\lambda'', \mu'', \nu'')$, $f(P'', P) = \eta''$. При замене P'' аналогичной точкой $-A - 2P = -P'' - P$ в противоположной полости конуса η'' меняется на $-\eta'' + m$, так что можно считать $\eta'' \leqslant \frac{m}{2}$. Полагая $f(P'') = m''$ и замечая, что $P'' - 2P$ лежит вне, а $P'' + 2P$ внутри конуса, получим $m'' + 1 \leqslant 4\eta'' + 4m$, $4m + 1 \leqslant m'' + 4\eta''$, откуда $\eta'' \geqslant \frac{1}{4}$, $m'' \geqslant 2m + 1 \geqslant 3$. Через данное ребро проходят две грани 3 с уравнениями $\sum px = 1$ и $\sum p'x = 1$. Возьмем ту из них $\sum px = 1$, для которой $F(p) \leqslant F(p')$ и выберем целую точку $P'(\lambda', \mu', \nu')$ на плоскости $\sum px = 0$ по усло-

виям: 1) OP и OP' основные векторы на плоскости $\sum px = 0$, 2) P' лежит с той же стороны от плоскости OAP, с какой и грань $\sum px = 1$. Векторы OP, OP', OP'' образуют основной параллелепипед и форма f подстановкой

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda' & \lambda'' \\ \mu & \mu' & \mu'' \\ \nu & \nu' & \nu'' \end{pmatrix} \tag{73}$$

переходит в эквивалентную форму

$$f_1 = \begin{pmatrix} -m & \eta' & \eta'' \\ \eta' & -m' & \omega \\ \eta'' & \omega & m'' \end{pmatrix}, \tag{74}$$

причем

$$F_1 = \begin{pmatrix} -m'm'' - \omega^2 & \omega\eta'' - m''\eta' & \omega\eta' + m'\eta'' \\ & -mm'' - \eta''^2 & \eta'\eta'' + m\omega \\ & & mm' - \eta'^2 \end{pmatrix}; \tag{75}$$

$$md = (mm' - \eta'^2)(mm'' + \eta''^2) + (m\omega + \eta'\eta'')^2. \tag{76}$$

В новых координатах плоскость $z' = 1$ есть грань и $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ — вершины полигона $\mathfrak{p}$ в углах $F_1 > 0$, $F_1 < 0$. Так как все стороны $\mathfrak{p}$ в углу $F_1 > 0$ простые, то уравнение второй грани $\mathfrak{Z}$, проходящей через данное ребро, должно быть $\pm y' + z' = 1$ и так как для точки $(x', 1, 1)$ должно быть $\pm y' + z' > 1$, то вторая грань есть $y' + z' = 1$. Условие $F_1(0, 0, 1) \leqslant F_1(0, 1, 1)$ дает

$$m\omega + \eta'\eta'' \geqslant \frac{mm'' + \eta''^2}{2}.$$

По замеченному выше, $mm' - \eta'^2 = F_1(0, 0, 1) \geqslant \frac{3}{4}$, так что (76) дает $md \geqslant \frac{3}{4} \cdot \frac{49}{16} + \left(\frac{49}{32}\right)^2$, $d > 4{,}63$, что и доказывает наше утверждение. Итак, можно предполагать, что все ребра зоны $\mathfrak{Z}$ двойные.

§ 20. Около каждого двойного ребра $\mathfrak{Z}$ преобразуем f к новым координатам, аналогично тому, как это сделано в предыдущем параграфе. Пусть $P'' = (\lambda'', \mu'', \nu'')$ — средняя целая точка ребра, $\eta'' = f(P'', P)$, $m'' = f(P'')$; можно считать $\eta'' \geqslant 0$, заменяя в случае надобности P'' на $-P''$. Так как $P'' - P$ внутри, а $P'' + 2P$ вне конуса, то $m'' \geqslant 2\eta'' + m + 1$, $m'' + 4\eta'' \leqslant 4m - 1$, откуда $\eta'' \leqslant \frac{m}{2} - \frac{1}{3}$. Грань $\sum px = 1$, проходящую через данное ребро $\mathfrak{Z}$, и затем целую точку $P' = (\lambda', \mu', \nu')$ выбираем, как в предыдущем параграфе. Точки P', удовлетворяющие указанным там условиям, лежат на прямой, параллельной OP; полагая $f(P, P') = \eta'$, можем еще предполагать $-\frac{m}{2} < \eta' \leqslant \frac{m}{2}$. Подстановка (73) переводит f в эквивалентную форму (74). Новую форму и новые переменные будем опять обозначать f, x, y, z. Итак, можем предполагать,

что

$$f=\begin{pmatrix} -m & \eta' & \eta'' \\ \eta' & -m' & \omega \\ \eta'' & \omega & m'' \end{pmatrix}; \tag{77}$$

$$F=\begin{pmatrix} -m'm''-\omega^2 & \omega\eta''-m''\eta' & \omega\eta'+m'\eta'' \\ & -mm''-\eta''^2 & m\omega+\eta'\eta'' \\ & & mm'-\eta'^2 \end{pmatrix}, \tag{78}$$

причем

$$m' \geqslant 1,\ |\eta'| \leqslant \frac{m}{2};\quad 0 \leqslant \eta'' \leqslant \frac{m}{2}-\frac{1}{3};$$

$$m'' \geqslant 2\eta''+m+1,\ m''+4\eta'' \leqslant 4m-1. \tag{79}$$

Полагая для сокращения

$$a=mm'-\eta'^2,\quad b=m\omega+\eta'\eta'',\quad c=mm''+\eta''^2, \tag{80}$$

на основании замеченного в § 19 можем написать

$$md=ac+b^2,\quad a \geqslant \frac{3}{4};\quad c \geqslant \frac{9}{4};\quad 2b \geqslant c. \tag{81}$$

Из $m<1{,}001$, $d \leqslant \frac{9}{2}$ и формул (79), (81) получаются следующие оценки:

$$\left.\begin{array}{l} |\eta'|<0{,}501,\ \eta''<0{,}168,\ mm'-\eta'^2<1{,}44,\ m'<1{,}692, \\ \omega+\eta'\eta''<1{,}679,\ 1{,}039<\omega<1{,}764,\ 2{,}218<m''<3{,}004. \end{array}\right\} \tag{82}$$

Рассматриваемая внешняя вершина P в новых координатах будет (1,0, 0); отрезок AB между точками $A(-1, 0, 1)$ и $B(1, 0, 1)$ будет данное ребро зоны 3; две грани, проходящие через это ребро, суть $z=1$ и $y+z=1$.

Замечание 1. *Точки* (0, 2, 1), (0, -1, 2) *лежат внутри, а* (± 3, 1, 1), (± 3, -1, 2) *вне конуса.*

Если (3, -1, 2) внутри, то $9m+m'+6\eta'+4\omega+1 \leqslant 4m''+12\eta''$; так как $\eta' \geqslant -\frac{m}{2}$, $m''+3\eta'' \leqslant 4m-1$, то $4\omega \leqslant 10m-6$, $\omega \leqslant 1,01$, что противоречит (82). Для остальных точек замечание вытекает непосредственно из оценок (82).

Замечание 2. *При m, достаточно близком к* 1, *точки* (± 1, 1, 1), (± 1, -1, 2) *лежат внутри конуса.*

Пусть (1, -1, 2) вне конуса; рассмотрим прямую (x, -1, 2), $-\infty<x<+\infty$, параллельную OP и лежащую на плоскости $y+z=1$. Так как (0, -1, 2) лежит внутри (замечание 1), то, по предыдущему параграфу, на этой прямой должно быть не менее трех точек внутри конуса; но (1, -1, 2) и (-3, -1, 2) лежат вне; следовательно, на этой прямой лежат точно три точки внутри конуса; средняя из которых

$Q=(1, -1, 2)$. Из того, что $Q \pm P$ лежат внутри, а $Q \pm 2P$ вне, выведем $\left(\text{аналогично неравенству } \eta'' \leqslant \frac{m}{2}-\frac{1}{3}\right)$, что $f(Q, P) = m - \eta' + 2\eta'' \leqslant \frac{m}{2} - \frac{1}{3}$, откуда $\eta'' < 0$, что невозможно. Если $(-1, -1, 2)$ лежит вне, то, аналогично предыдущему, найдем

$$f(1, -1, 2; 1, 0, 0) = -m - \eta' + 2\eta'' \geqslant -\frac{m}{2} + \frac{1}{3}, \quad \eta'' \geqslant \frac{1}{6}.$$

Неравенство $m'' + 4\eta'' \leqslant 4m - 1$ дает $m'' \leqslant 4m - \frac{5}{3}$; отсюда $f(1, 0, -1) = -m + m'' - 2\eta'' \leqslant 3m - 2$. Итак, форма f принимает сколь угодно близкое к $+1$ значение, что исключено.

Для остальных точек $(\pm 1, 1, 1)$ утверждение замечания доказывается аналогично.

З а м е ч а н и е 3. *Точки* $(0, 4, 1)$, $(0, -4, 5)$ *лежат вне конуса.*

Если $(0, 4, 1)$ лежит внутри, то $16m' + 1 \leqslant m'' + 8\omega$, что вместе с неравенствами $m'' \leqslant 3{,}1 - 4\eta''$, $\omega < 1{,}7 + 0{,}6\eta''$ (см. (79), (82)) дает $\eta'' > \frac{3}{8}$, что невозможно. Если $(0, -4, 5)$ внутри, то $16m' + 40\omega + 1 \leqslant 25m''$, а это вместе с неравенством $\omega \geqslant \frac{m'' - \eta''}{2}$, выводимым из неравенства $b \geqslant \frac{c}{2}$, дает $17 \leqslant 5m'' + 20\eta'' \leqslant 20m - 5$, $m \geqslant 1{,}1$, что невозможно. Утверждение замечания доказано.

З а м е ч а н и е 4. *Имеет место одно из двух: либо* $m'' \geqslant \frac{5}{2}$, $\eta'' < 0{,}072$, *либо* $m'' < 2{,}432$, $\eta'' \geqslant \frac{1}{12}$.

Из (82) вытекает, что $(3, 0, 2)$ лежит внутри, т. е.

$$9m + 1 \leqslant 4m'' + 12\eta''. \tag{83}$$

Если точка $(-3, 0, 2)$ внутри, то $1 + 9m + 12\eta'' \leqslant 4m''$, что вместе с $m'' + 4\eta'' \leqslant 4m - 1$ дает $28\eta'' \leqslant 7m - 5 < 2{,}007$, $\eta'' < 0{,}072$ и, кроме того, $m'' \geqslant \frac{5}{2}$. Если точка $(-3, 0, 2)$ лежит вне, то

$$4m'' + 1 \leqslant 9m + 12\eta''. \tag{84}$$

Неравенства (83) и (84) дают $\eta'' \geqslant \frac{1}{12}$. Из неравенств (84) и $m'' + 4\eta'' \leqslant 4m - 1$ следует, что $m'' \leqslant 3m - \frac{4}{7} < 2{,}432$. Утверждение замечания доказано.

§ 21. В § 19 для каждой грани 3 мы определили число α_{2s+1} (число пустых полос, на которые разделяется грань прямыми, параллельными OP и содержащими целые точки; вместе с тем α_{2s+1} есть звено непрерывной дроби полигона $\mathfrak{p}$ в углу $F < 0$). Эти числа для граней $z = 1$, $y + z = 1$ обозначим через α_{-1}, α_1 и будем говорить, что в точке $(0, 0, 1)$ (средине ребра AB) имеет место случай $[\alpha_{-1}, \alpha_1]$. По § 19 и § 20 (замечание 1)

$2 \leqslant \alpha_{-1} \leqslant 4$, $1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 4$. В этом параграфе рассмотрим случай $\alpha_{-1} = 2$ и докажем, что в этом случае $d > \frac{9}{2}$.

Замечание. *В случае* $\alpha_{-1} = 2$, $\alpha_1 \neq 2$ *имеем* $d > \frac{9}{2}$.

Так как $(0, 2, 1)$ лежит внутри конуса (§ 20, замечание 1), то плоскость $y - 2z = 0$ гиперболическая, т. е. $F(0, 1, -2) = -c - 4b + 4a \leqslant -\frac{9}{4}$; из условия $\alpha_{-1} = 2$, по свойству внешних вершин (§ 4), вытекает, что плоскость $y - 3z = 0$ эллиптическая, т. е. $F(0, 1, -3) = -c - 6b + 9a \geqslant \frac{3}{4}$. Пусть $\alpha_1 = 1$; тогда $F(0, 3, 2) = -9c + 12b + 4a \geqslant \frac{3}{4}$. Неравенства

$$4a + \frac{9}{4} \leqslant 4b + c,\ 6b + c + \frac{3}{4} \leqslant 9a,\ 9c + \frac{3}{4} \leqslant 4a + 12b,\ \frac{9}{4} \leqslant c$$

определяют область в трехмерном пространстве (a, b, c) с двумя вершинами $\left(\frac{21}{16}, \frac{21}{16}, \frac{9}{4}\right)$ и $\left(\frac{27}{22}, \frac{59}{44}, \frac{9}{4}\right)$ на конечном расстоянии. Легко видеть, что в этой области функция $ac + b^2$ принимает наименьшее значение в вершине $\left(\frac{27}{22}, \frac{59}{44}, \frac{9}{4}\right)$, откуда

$$md = ac + b^2 \geqslant \frac{8827}{1936} > 4{,}55, \quad d > 4{,}54.$$

Если $\alpha_1 \geqslant 3$, то $F(0, 4, 3) = -16c + 24b + 9a \leqslant -\frac{9}{4}$. Это неравенство вместе с неравенством $c + 6b + \frac{3}{4} \leqslant 9a$ дает $2b + 0{,}2 \leqslant c$, что противоречит $2b \geqslant c$. Утверждение замечания доказано.

ТЕОРЕМА 15. *В случае* $[2, 2]$ *имеем* $d > \frac{9}{2}$.

Неравенство $c + 6b + \frac{3}{4} \leqslant 9a$ (см. предыдущее замечание) вместе с $2b \geqslant c$ дает

$$a \geqslant \frac{4}{9}c + \frac{1}{12}. \tag{85}$$

Подставляя это неравенство и $b \geqslant \frac{c}{2}$ в неравенство $ac + b^2 \leqslant \frac{9}{2}m$, получим $c < 2{,}488$, $m'' < 2{,}488$; следовательно (§ 20, замечание 4), $\eta'' \geqslant \frac{1}{12}$. Так как $c \geqslant \frac{9}{4}$, то из (85): $a \geqslant \frac{13}{12}$. Далее, $\frac{9}{4} \cdot \frac{13}{12} + b^2 \leqslant \frac{9}{2}m$, $b < 1{,}438$, а так как $|\eta'\eta''| < 0{,}085$ (см. (82)), то $\omega < 1{,}523$. Так как $\alpha_1 = 2$, то $F(0, 3, 2) \leqslant -\frac{9}{4}$ или

$$4mm' + 12m\omega + \frac{9}{4} \leqslant 9mm'' + (2\eta' - 3\eta'')^2. \tag{86}$$

Если $(0, -2, 3)$ лежит вне, то $9m'' + 1 \leqslant 4m' + 12\omega$, что вместе с (86) дает $\frac{13}{4} \leqslant (2\eta' - 3\eta'')^2$, а это противоречит (82). Поэтому $(0, -2, 3)$ лежит

внутри конуса. Так как $\alpha_{-1}=2$, то на прямой $(x, 2, 1)$ расположено двойное ребро грани $z=1$, параллельное вектору OP; мы знаем, что точка $(0, 2, 1)$ лежит внутри конуса, поэтому срединой этого ребра должна быть одна из трех точек $(0, 2, 1)$, $(\pm 1, 2, 1)$. Рассмотрим три этих случая отдельно.

1. Средина ребра $(0, 2, 1)$. Тогда (§ 20, замечание 2)

$$|f(0, 2, 1; 1, 0, 0)| < 0{,}168,$$

откуда

$$-0{,}084 < \eta' + \eta'' < 0{,}168. \tag{87}$$

Если точки $(\pm 2, 1, 1,)$ лежат внутри, то $4m + m' + 1 \leqslant m'' + 2\omega$, $6 \leqslant m'' + 2\omega$, что противоречит доказанным выше неравенствам $m'' < 2{,}488$, $\omega < 1{,}523$. Если $(\pm 2, 1, 1)$ лежит вне, то $m'' + 2\omega + 1 \leqslant m' + 4m$. Умножая на m и подставляя $2m\omega \geqslant mm'' + \eta''^2 - 2\eta'\eta''$, получим $2mm'' + \eta''^2 + m \leqslant 4m^2 + + mm' + 2\eta'\eta''$. Пользуясь неравенствами $mm'' + \eta''^2 \geqslant \frac{9}{4}$, $mm' - - \eta'^2 < 1{,}44$ (см. (82)), получим

$$\frac{11}{2} < 4{,}009 + 1{,}44 + (\eta' + \eta'')^2, \quad |\eta' + \eta''| > 0{,}225, \tag{88}$$

что противоречит (87). Если точка $(2, 1, 1)$ лежит внутри, а точка $(-2, 1, 1)$ вне, то $\eta' + \eta'' \geqslant \frac{1}{4}$; если же точка $(2, 1, 1)$ лежит вне, а $(-2, 1, 1)$ внутри, то $\eta' + \eta'' \leqslant -\frac{1}{4}$. Оба неравенства противоречат (87).

2. Средина ребра $(1, 2, 1)$. Тогда $-\frac{m}{2} + \frac{1}{3} \leqslant -m + 2\eta' + \eta''$, или

$$\frac{m}{2} + \frac{1}{3} \leqslant 2\eta' + \eta''. \tag{89}$$

Так как $\alpha_1 = 2$, то на прямой $(x, -2, 3)$ лежит двойное ребро грани $y + z = 1$, параллельное OP. Если $(1, -2, 3)$ внутри, то $(-2, -2, 3)$ должна быть вне, откуда $12\eta' + 2 \leqslant 3m + 18\eta''$, что с (89) дает $\eta'' \geqslant \frac{1}{6}$, т. е. f принимает значение, сколь угодно близкое к $+1$ (§ 20, замечание 2). Если $(1, -2, 3)$ вне, то средина ребра на грани $y + z = 1$ есть точка $(-1, -2, 3)$, так как выше доказано, что точка $(0, -2, 3)$ лежит внутри. Поэтому $m - 2\eta' + 3\eta'' < 0{,}168$, что вместе с $\eta' \leqslant \frac{m}{2}$ дает $\eta'' < 0{,}056$, а это противоречит $\eta'' \geqslant \frac{1}{12} = 0{,}08\ldots$

3. Средина ребра $(-1, 2, 1)$. Тогда $m + 2\eta' + \eta'' \leqslant \frac{m}{2} - \frac{1}{3}$, или $\eta' \leqslant -\frac{11}{24}\left(\text{так как } \eta'' \geqslant \frac{1}{12}\right)$. Если точка $(-1, -2, 3)$ внутри, то $(2, -2, 3)$ лежит вне и $18\eta'' + 2 \leqslant 3m + 12\eta' \leqslant 3m - \frac{11}{2}$, $\eta'' < 0$, что невозможно. Если же точка $(-1, -2, 3)$ лежит вне, то средина ребра на

прямой $(x, -2, 3)$ есть $(1, -2, 3)$ и $-m-2\eta'+3\eta'' \geqslant -m+\frac{7}{6}$, т. е. f принимает сколь угодно близкое значение к $+1$. Теорема доказана.

§ 22. Переходим к случаю $\alpha_{-1}=3$. Если $\alpha_1=4$, то приходим к противоречию с $2b \geqslant c$ (ср. доказательство замечания в § 21). Поэтому нужно рассмотреть случаи $\alpha_1=1, 2, 3$. Из условия $\alpha_{-1}=3$ выведем, что точка $(0, 3, 1)$ внутри конуса (аналогично доказательству того, что $(0, -2, 3)$ внутри, в теореме 15).

Начинаем со случая $\alpha_1=1$. Так как точки $(\pm 1, -1, 2)$ лежат внутри конуса (§ 20, замечание 2), то $(0, -1, 2)$ — средина ребра, параллельного OP, на грани $y+z=1$ и

$$|-\eta'+2\eta''| < 0{,}168. \tag{90}$$

Так как $(0, 3, 1)$ лежит внутри, то средина ребра на прямой $(x, 3, 1)$ есть одна из точек $(0, 3, 1)$, $(\pm 1, 3, 1)$. Если средина $(-1, 3, 1)$, то $3\eta'+\eta'' < -0{,}832$, что вместе с (90) дает $\eta''<0$. Если средина $(0, 3, 1)$, то $|3\eta'+\eta''| < 0{,}168$, а это вместе с (90) приводит к двум неравенствам: $|\eta'| < \frac{3}{7}\cdot 0{,}168$, $|\eta'+\eta''| < \frac{5}{7}\cdot 0{,}168$. Исследование расположения точек $(\pm 2, 1, 1)$, сделанное при доказательстве теоремы 15 (случай 1), показывает, что при $|\eta'+\eta''| < 0{,}168$ точки $(\pm 2, 1, 1)$ могут лежать только внутри конуса, откуда

$$4m+m'+1 \leqslant m''+2\omega. \tag{91}$$

Так как $\alpha_1=1$, то $(0, -2, 3)$ лежит вне, $9m''+1 \leqslant 4m'+12\omega$, а отсюда и из неравенства (91) находим $36m+5m'+10 \leqslant 30\omega$, $\omega \geqslant 1{,}7$. Неравенства $|\eta'| < \frac{3}{7}\cdot 0{,}168$, $\eta'' < 0{,}168$ дают $|\eta'\eta''| < 0{,}013$, после чего из $\omega+\eta'\eta'' \leqslant 1{,}679$ (см. (82)) получаем $\omega < 1{,}692$, что противоречит $\omega \geqslant 1{,}7$. Итак, при $\alpha_1=1$ остается одно предположение, что средина ребра на прямой $(x, 3, 1)$ лежит в точке $(1, 3, 1)$.

Рассмотрим этот случай подробно. Из неравенств

$$\frac{m}{2}+\frac{1}{3} \leqslant 3\eta'+\eta'' \leqslant \frac{3m}{2}-\frac{1}{3}, \quad -\frac{m}{2}+\frac{1}{3} \leqslant \eta'-2\eta'' \leqslant \frac{m}{2}-\frac{1}{3} \tag{92}$$

вытекает $\eta' \geqslant \frac{m+2}{14} \geqslant \frac{3}{14}$. Точка $(0, 3, 1)$ лежит внутри,

$$9m'+1 \leqslant m''+6\omega. \tag{93}$$

Если $(-1, 2, 1)$ находится вне конуса, то $m''+4\omega+1 \leqslant m+4m'+4\eta'+2\eta''$, что с (93) дает $m''+6m'+5 \leqslant 3m+12\eta'+6\eta''$; это противоречит (82). Поэтому $(-1, 2, 1)$ лежит внутри, т. е.

$$m+4m'+4\eta'+2\eta''+1 \leqslant m''+4\omega. \tag{94}$$

Точка $(3, 3, 1)$ лежит вне конуса; значит,

$$m''+18\eta'+6\eta''+6\omega+1 \leqslant 9m+9m'. \tag{95}$$

Если (3, 2, 1) лежит внутри, то $9m+4m'+1\leqslant m''+12\eta'+6\eta''+4\omega$, что с (95) дает $9m+5\leqslant 6m'+m''+6\eta''$; пользуясь неравенством $m''+4\eta''\leqslant 4m-1$ (см. (79)), получим $5m+6\leqslant 6m'+2\eta''$, а это противоречит (82). Следовательно, (3, 2, 1) лежит вне, и

$$m''+12\eta'+6\eta''+4\omega+1\leqslant 9m+4m'. \tag{96}$$

Если точка $(-2, 2, 1)$ лежит внутри, то $4m+4m'+8\eta'+4\eta''+1\leqslant \leqslant m''+4\omega$, что с (96) дает $20\eta'+10\eta''+2\leqslant 5m$; это противоречит полученному выше неравенству $\eta'\geqslant \frac{3}{14}$. Если (2, 1, 1) лежит вне, то

$$m''+4\eta'+4\eta''+2\omega+1\leqslant m'+4m,$$

что с (94) дает $m''+12\eta'+10\eta''+2m'+3\leqslant 7m$, $m''+5\leqslant 7m$; это противоречит (82). Следовательно, (2, 1, 1) лежит внутри. Если точка $(-2, 1, 1)$ лежит внутри, то, так же как в начале этого параграфа (при исследовании средины (0, 3, 1)), найдем $\omega\geqslant 1,7$; между тем формула $\omega+\eta'\eta''\leqslant 1,679$ (см. (82)) дает в этом случае $\omega\leqslant 1,679$. Значит, $(-2, 1, 1)$ лежит вне. Из формул (94) и (96) вытекает, что

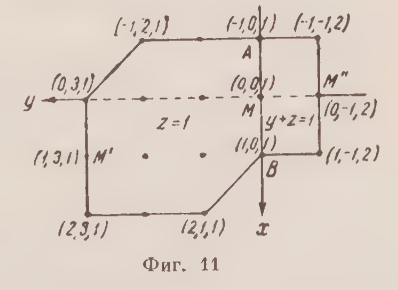
$$2\eta'+\eta''\leqslant m-\frac{1}{4}. \tag{97}$$

Из (92) и (97) получаем $\eta'\leqslant \frac{m}{2}-\frac{1}{6}<0,334$. Точка $(0, -2, 3)$ лежит вне $9m''+1\leqslant 4m''+12\omega$; отсюда и из (93) следует, что $77m''+13\leqslant 132\omega$. Если $m''\geqslant \frac{5}{2}$, то из последнего неравенства выводим $\omega>1,55$ и (так как $\eta'>0$) $b>1,55$ и неравенство $ac+b^2\leqslant \frac{9}{2}m$ дает $a\leqslant 0,842$; выше получено, что $\eta'<0,334$, поэтому $m'<0,954$, что невозможно. Поэтому в данном случае (§ 20, замечание 4) $\eta''\geqslant \frac{1}{12}$. Итак, в рассматриваемом случае [3,1] грани $z=1$ и $y+z=1$ зоны 3 имеют форму, изображенную на фиг. 11. Средины $M\,(0,0,1)$, $M'\,(1, 3, 1)$, $M''\,(0, -1, 2)$ трех соседних ребер зоны 3 связаны соотношением

$$M'+3M''=P+7M, \tag{98}$$

где, как обычно, $P=(1, 0, 0)$. Кроме того, в этом случае,

$$\frac{3}{14}\leqslant \eta'\leqslant \frac{m}{2}-\frac{1}{6},\quad \eta''\geqslant \frac{1}{12}. \tag{99}$$



Фиг. 11

§ 23. Переходим к случаю $\alpha_{-1}=3$, $\alpha_1=2$. В этом случае $F\,(0,1,-3)\leqslant \leqslant -\frac{9}{4}$, $F\,(0, 1,-4)\geqslant \frac{3}{4}$, $F\,(0, 4, 3)\geqslant \frac{3}{4}$, или $9a+\frac{9}{4}\leqslant c+6b$, $c+8b+\frac{3}{4}\leqslant 16a$, $16c+\frac{3}{4}\leqslant 9a+24b$. Первое и третье неравенства дают

$b \geqslant \frac{c}{2} + \frac{1}{10}$, второе и третье: $a \geqslant \frac{c}{3} + \frac{1}{19}$, после чего из $ac + b^2 \leqslant \frac{9}{2} m$ получаем

$$c < 2{,}65. \tag{100}$$

Так как $\alpha_1 = 2$, то $(0, -2, 3)$ лежит внутри (теорема 15).

Относительно положения средины ребра на прямой $(x, 3, 1)$ могут быть три предположения:

1. Средина ребра $(-1, 3, 1)$; $-1{,}169 < 3\eta' + \eta'' < -0{,}832$.
2. Средина ребра $(0, 3, 1)$; $-0{,}168 < 3\eta' + \eta'' < 0{,}168$.
3. Средина ребра $(1, 3, 1)$; $0{,}832 < 3\eta' + \eta'' < 1{,}169$.

Относительно положения средины ребра на прямой $(x, -2, 3)$ могут быть также три предположения:

1'. Средина ребра $(-1, -2, 3)$; $-1{,}169 < -2\eta' + 3\eta'' < -0{,}832$.
2'. Средина ребра $(0, -2, 3)$; $-0{,}168 < -2\eta' + 3\eta'' < 0{,}168$.
3'. Средина ребра $(1, -2, 3)$; $0{,}832 < -2\eta' + 3\eta'' < 1{,}169$.

Комбинируя случаи 1, 2, 3 со случаями 1', 2', 3', видим, что возможны только три комбинации: 1, 3'; 2, 2'; 3, 2'. Рассмотрим их.

Случай 2, 2'. Из условий

$$|3\eta' + \eta''| < 0{,}168, \quad |2\eta' - 3\eta''| < 0{,}168$$

получаем $\eta'' < 0{,}077 < \frac{1}{12}$ (следовательно, по замечанию 4, § 20, $m'' \geqslant \frac{5}{2}$) $|\eta'| < 0{,}062$, $|\eta' + \eta''| < 0{,}139$. Последнее неравенство показывает (теорема 15, случай 1), что точки $(\pm 2, 1, 1)$ могут быть только внутри конуса, т. е. имеем (91). Из неравенств $m'' \geqslant \frac{5}{2}$, $a \geqslant \frac{3}{4}$, $ac - b^2 \leqslant \frac{9}{2} m$ получаем $\omega + \eta'\eta'' \leqslant 1{,}622$, $\omega \leqslant 1{,}627$; так как $m'' < 2{,}65$ (из (100)), то (91) приводит к невозможному результату: $6 \leqslant 5{,}904$. Итак, комбинация 2, 2' отпадает.

Случай 3, 2'. Из условий

$$0{,}832 < 3\eta' + \eta'' < 1{,}169, \quad -0{,}168 < -2\eta' + 3\eta'' < 0{,}168$$

находим

$$0{,}211 \leqslant \eta' \leqslant 0{,}335, \quad \eta'' \geqslant 0{,}105. \tag{101}$$

Если точки $(\pm 2, -1, 2)$ лежат внутри, то $4m + m' + 4\omega + 1 \leqslant 4m''$, $6 + 4\omega \leqslant 4m''$; из (101) вытекает $m'' < \frac{5}{2}$ (§ 20, замечание 4), откуда $\omega < 1$, что противоречит (82). Если $(2, -1, 2)$ лежит внутри, $(-2, -1, 2)$ — вне, то $\eta' + \frac{1}{4} \leqslant 2\eta''$; если $(2, -1, 2)$ находится вне, а $(-2, -1, 2)$ — внутри конуса, то $2\eta'' + \frac{1}{4} \leqslant \eta'$. Оба предположения противоречат (101). Если $(\pm 2, -1, 2)$ лежат вне, то

$$4m'' + 1 \leqslant 4m + m' + 4\omega. \tag{102}$$

В рассматриваемом случае 3, 2' точки $(\pm 1, -2, 3)$ лежат внутри конуса, откуда $m + 4m' + 12\omega + 1 \leqslant 9m''$, что с (102) дает $3m'' + m' + 4 \leqslant$

$\leqslant 11m$, а это противоречит (82). Значит, случай 3, 2′ также отпадает.

Итак, остается только одна комбинация 1, 3′, которую рассмотрим подробно.

Случай 1, 3′. Из условий

$$-1{,}169 < 3\eta' + \eta'' < -0{,}832, \quad 0{,}832 < -2\eta' + 3\eta'' < 1{,}169$$

вытекает $\eta' + \eta'' < -0{,}165$. Если $(-2, 1, 1)$ лежит вне, то

$$m'' + 2\omega + 1 \leqslant m' + 4m + 4\eta' + 4\eta'', \quad m'' + 2\omega + 1{,}66 \leqslant m' + 4m;$$

что противоречит (82). Значит, точка $(-2, 1, 1)$ находится внутри конуса. Так же докажем, что точка $(2, 1, 1)$ лежит вне конуса, откуда

$$\eta' + \eta'' \leqslant -\frac{1}{4}. \tag{103}$$

Отсюда и из неравенства $-2\eta' + 3\eta'' < 1{,}169$ находим

$$\eta'' < 0{,}134. \tag{104}$$

Точка $(-3, 3, 1)$ лежит вне,

$$m'' + 6\omega + 1 \leqslant 9m + 9m' + 18\eta' + 6\eta''. \tag{105}$$

Если $(-3, 2, 1)$ лежит внутри, то $9m + 4m' + 12\eta' + 6\eta'' + 1 \leqslant m'' + 4\omega$, что вместе с (105) дает $9m + 6\eta'' + 5 \leqslant m'' + 6m'$; это противоречит (82). Следовательно, точка $(-3, 2, 1)$ находится вне конуса,

$$m'' + 4\omega + 1 \leqslant 9m + 4m' + 12\eta' + 6\eta''. \tag{106}$$

Если точка $(1, 2, 1)$ вне, то $m'' + 4\eta' + 2\eta'' + 4\omega + 1 \leqslant m + 4m'$, а отсюда и из неравенства (93) (точка $(0, 3, 1)$ внутри) находим $m'' + 6m' + 12\eta' + 6\eta'' + 5 \leqslant 3m$; из последнего неравенства, так как $\eta' \geqslant -\frac{m}{2}$, получаем невозможный результат: $m'' + 6m' + 5 \leqslant 9m$. Значит, $(1, 2, 1)$ лежит внутри, $m + 4m' + 1 \leqslant m'' + 4\eta' + 2\eta'' + 4\omega$; что вместе с (106) дает

$$2\eta' + \eta'' \geqslant \frac{1}{4} - m > -0{,}751. \tag{107}$$

Фиг. 12

Продолжая исследование точек на гранях $z = 1$, $y + z = 1$, легко видеть, что эти грани имеют форму, изображенную на фиг. 12. Окончательно можем сказать, что в рассматриваемом нами случае [3,2] имеем неравенства (100), (103), (104), (107), средины ребер $M'(-1, 3, 1)$, $M(0, 0, 1)$, $M''(1, -2, 3)$ (фиг. 12) связаны соотношением

$$2M' + 3M'' = 11M + P, \quad P = (1, 0, 0). \tag{108}$$

§ 24. Обращаемся к случаю $\alpha_{-1} = 3$, $\alpha_1 = 3$. Из $F(0, 1, -4) \geqslant \frac{3}{4}$ и $2b \geqslant c$

вытекает $a \geqslant \frac{5}{16}c + \frac{3}{64}$. Подставляя это и $b \geqslant \frac{c}{2}$ в неравенство $ac + b^2 \leqslant \leqslant \frac{9}{2}m$, найдем

$$c < 2{,}79. \tag{109}$$

Если обе точки $(\pm 1, -3, 4)$ находятся вне конуса, то

$$16m'' + 2\lambda + 1 \leqslant m + 9m' + 24\omega, \tag{110}$$

где $\lambda = |3\eta' - 4\eta''|$. При $\alpha_1 = 3$ имеем $F(0,4,3) \leqslant -\frac{9}{4}$, или

$$9mm' + 24m\omega + \frac{9}{4} \leqslant 16\,mm'' + \lambda^2. \tag{111}$$

Из соотношений (110) и (111) находим $2m\lambda + \frac{13}{4} \leqslant m^2 + \lambda^2$, $\lambda \geqslant m + \frac{\sqrt{13}}{2} > > 2{,}5$, что противоречит (82). Поэтому, хоть одна из точек $(\pm 1, -3, 4)$ лежит внутри и для средины ребра $(x, -3, 4)$ $|x| \leqslant 2$. Точка $(-2, -3, 4)$ не может быть срединой, так как мы имели бы $2m - 3\eta' + + 4\eta'' < 0{,}168$, $\eta' > 0{,}6$. Таким образом, имеем следующие 4 случая:

1″. Средина ребра $(-1, -3, 4)$; $0{,}832 < 3\eta' - 4\eta'' < 1{,}169$.
2″. Средина ребра $(0, -3, 4)$; $-0{,}168 < 3\eta' - 4\eta'' < 0{,}168$.
3″. Средина ребра $(1, -3, 4)$; $-1{,}169 < 3\eta' - 4\eta'' < -0{,}832$.
4″. Средина ребра $(2, -3, 4)$; $-2{,}17 < 3\eta' - 4\eta'' < -1{,}832$.

Комбинируя случаи 1, 2, 3 (§ 23) со случаями 1″—4″, находим, что возможны 6 комбинаций 1,3″; 1,4″; 2,2″; 2,3″; 3,1″; 3,2″. Рассмотрим их.

Случай 2, 2″. Из условий $|3\eta' + \eta''| < 0{,}168$, $|3\eta' - 4\eta''| < 0{,}168$ вытекает $|\eta'| < 0{,}056$, $\eta'' < 0{,}068$, $|\eta'\eta''| < 0{,}004$, после чего формула $b \geqslant \frac{c}{2}$ дает

$$\omega + 0{,}004 \geqslant \frac{m''}{2}. \tag{112}$$

Если точки $(\pm 2, -1, 2)$ лежат внутри конуса, то $4m + m' + 4\omega + 1 \leqslant 4m''$, что вместе с (112) приводит к неравенству $m'' \geqslant 2{,}992$, противоречащему (109). Далее рассуждаем аналогично тому, как в § 23 (при изучении комбинации 3, 2′), и находим, что комбинация 2, 2″ отпадает.

Случай 2, 3″. Из условий

$$-0{,}168 < 3\eta' + \eta'' < 0{,}168, \quad -1{,}169 < 3\eta' - 4\eta'' < -0{,}832$$

вытекает, что $\eta'' \geqslant 0{,}132$ (следовательно, $m'' < 2{,}432$, по замечанию 4, § 20), $-0{,}123 < \eta' < -0{,}01$, $0{,}009 < \eta' + \eta'' < 0{,}158$; формула $\omega + \eta'\eta'' \leqslant 1{,}679$ (см. (82)) дает $\omega \leqslant 1{,}7$. Точки $(\pm 2, 1, 1)$ должны быть внутри (теорема 15, случай 1), откуда $6 \leqslant m'' + 2\omega < 5{,}832$; значит, комбинация 2, 3″ невозможна.

Случай 3, 2″. Из условий

$$0{,}832 < 3\eta' + \eta'' < 1{,}169, \quad -0{,}168 < 3\eta' - 4\eta'' < 0{,}168$$

вытекает $\eta'' > 0,132$, $m'' < 2,432$, $0,21 < \eta' < 0,323$. Точки $(\pm 1, -3, 4)$ лежат внутри, откуда $m + 9m' + 24\omega + 1 \leqslant 16m''$; подставляя сюда ω из неравенства $b \geqslant \frac{c}{2}$ и пользуясь неравенством $m'' < 2,432$, получим

$$1,262 \leqslant 24\eta'\eta'' - 12\eta''^2. \tag{113}$$

Так как $\eta' > 0,21$, а $\eta'' \leqslant 0,168$, то при постоянном η' правая часть (113) возрастает с возрастанием η'' и туда можно вместо η'' подставить число 0,168. Получаем $\eta' > 0,39$, что противоречит $\eta' < 0,323$. Комбинация 3, 2″ невозможна.

Случай 3, 1″. Из условий

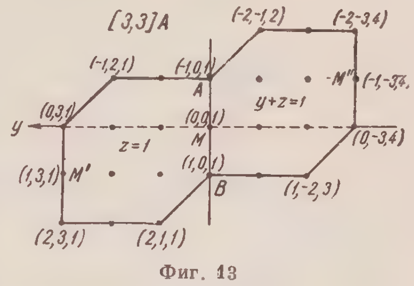
$$0,832 < 3\eta' + \eta'' < 1,169, \quad 0,832 < 3\eta' - 4\eta'' < 1,169$$

вытекает

$$\eta'' < 0,068. \tag{114}$$

Исследуя расположение точек, убеждаемся, что грани $z = 1$ и $y + z = 1$ имеют в этом случае форму, указанную на фиг. 13. Между срединами ребер M' (1, 3, 1), M (0, 0, 1), $M''(-1, -3, 4)$ имеет место соотношение

$$M' + M'' = 5M. \tag{115}$$



Фиг. 13

Итак, в рассматриваемом случае 3, 1″ (в дальнейшем мы будем обозначать его через [3, 3] A), справедливы формулы (109), (114), (115). Случай 1, 3″ (со срединами ребер $(-1, 3, 1)$, $(1, -3, 4)$) в дальнейшем будем обозначать [3, 3] B; формулы (109), (114), (115) остаются для этого случая в силе. Чертеж получается из фиг. 13 зеркальным отображением в плоскости $x = 0$.

§ 25. Остается рассмотреть комбинацию 1, 4″.

ТЕОРЕМА 16. *В случае* 1, 4″ *имеем* $f = \psi_5$.

Из условий

$$-1,169 < 3\eta' + \eta'' < -0,832, \quad 3\eta' - 4\eta'' < -1,832$$

вытекает $\eta' < -0,344$, $\eta'' > 0,132$. Отсюда (замечание 4, § 20)

$$m'' < 2,432, \quad m'' \leqslant 3\eta'' + \frac{9m - 1}{4}. \tag{116}$$

Так как (0, 3, 1) лежит внутри, то (93) дает $\omega > 1,261$. Рассмотрим плоскость $x + y + z = 0$, проходящую через две внутренние точки $A(-1, 0, 1)$ и $C(-1, -1, 2)$. Имеем

$$-F(1, 1, 1) = \beta^2 - \alpha\gamma, \quad \beta = f(A, C) > 0, \quad \alpha = f(A), \quad \gamma = f(C). \tag{117}$$

На основании неравенства (116) и полученных оценок,

$$\beta = 2m'' - 3\eta'' - m + \eta' - \omega \leqslant m'' + \frac{5m-1}{4} + \eta' - \omega < 1{,}829.$$

Точка $(-2, 1, 1) = 3A - C$ лежит внутри, так как в противном случае

$$f(3A - C) = 9\alpha - 6\beta + \gamma \leqslant -1, \quad \beta \geqslant \frac{11}{6} > 1{,}83.$$

Итак,

$$6\beta + 1 \leqslant 9\alpha + \gamma. \tag{118}$$

Если $\beta \leqslant 1{,}79$, то из (117) вытекает $-F(1, 1, 1) \leqslant 2{,}2041$. Если $\beta > 1{,}79$, то из (118) $9\alpha + \gamma > 11{,}74$, $\alpha\gamma > \alpha(11{,}74 - 9\alpha)$. Имеем $1 \leqslant \alpha = -m + m'' - 2\eta'' < 1{,}17$; функция $\alpha(11{,}74 - 9\alpha)$ убывает с возрастанием α, поэтому $\alpha\gamma > 1{,}41$. Припоминая, что $\beta < 1{,}83$, из (117) опять получаем $-F(1, 1, 1) < 1{,}94$. Итак, во всех случаях $-F(1, 1, 1) < 2{,}21$, т. е. $x + y + z = 0$ есть сечение M_1 или M_2. Легко видеть, что AC — простая сторона полигона на плоскости $x + y + z = 0$, так что эта плоскость есть M_1. Из равенств $f(A) = f(C) = -f(C - A)$ находим

$$m'' = 2m + m' + 2\eta' + 2\eta'', \quad \omega = \frac{3}{2} m + \frac{1}{2} m' + 2\eta' + \eta''. \tag{119}$$

Подставляя отсюда m'' в (116) и в формулу $m'' + 4\eta'' \leqslant 4m - 1$, получаем

$$2\eta' \leqslant \eta'' + \frac{m-5}{4}, \quad \eta' + 3\eta'' \leqslant m - 1. \tag{120}$$

Отсюда $\eta' < -0{,}428$. Легко видеть, что точка $D(1, 2, 1)$ лежит внутри, так же, как $E(0, 3, 1)$. Пользуясь (119) и (120), находим

$$f(D, E) = \frac{19}{2} m - \frac{5}{2} m' + 15\eta' + 8\eta'' \leqslant \frac{73}{6} m - \frac{5}{2} m' - \frac{8}{3} + \frac{37}{3} \eta' < 1{,}735.$$

Отсюда легко вывести, что плоскость ODE есть M_1, т. е. $f(D) = f(E) = -f(D - E)$, откуда $m' = m$, $3\eta' + 2\eta'' = -m$; последнее равенство вместе с (120) дает $\eta'' < 0{,}144$. На основании этого, наконец, докажем, что плоскость OGH, где $G = (3, -2, 3)$, $H = (3, -3, 4)$, есть также M_1 и $f(G) = f(H)$ дает $\eta'' = \frac{m}{7}$, так что $\eta' = -\frac{3}{7} m$, $m'' = \frac{17}{7} m$, $\omega = \frac{9}{7} m$ и

$$f = m \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & -1 & \frac{9}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{9}{7} & \frac{17}{7} \end{pmatrix} = m\psi_5, \quad m = 1, \quad f = \psi_5.$$

Теорема доказана.

Итак, в предположении $\alpha_{-1} = 3$, $\alpha_1 = 3$ имеем только два случая [3, 3] A и [3, 3] B, характеризованные в конце § 24.

§ 26. Переходим к последнему предположению $\alpha_{-1} = 4$; при этом может быть $\alpha_1 = 1, 2, 3, 4$. Прежде всего, аналогично тому, как это сделано в начале § 24, докажем, что одна из точек $(\pm 1, 4, 1)$ лежит

внутри, а так как $(0, 4, 1)$ вне (§ 20, замечание 3), то могут быть два случая.

1. Средина ребра $(2, 4, 1)$; $1{,}832 < 4\eta' + \eta''$.

2. Средина ребра $(-2, 4, 1)$; $4\eta' + \eta'' < -1{,}832$.

Предположим, что $\alpha_1 = 1$, так что

$$-0{,}168 < \eta' - 2\eta'' < 0{,}168. \tag{121}$$

Из двух случаев 1, 2 это совместно только со случаем 1, так что $1{,}832 < 4\eta' + \eta''$; это вместе с (121) дает $\eta'' > 0{,}128$. Если $(5, 0, 3)$ лежит вне, то $9m'' + 30\eta'' + 1 \leqslant 25m$; вместе с неравенством $2\eta'' + m + 1 \leqslant m''$ (см. (79)) это дает $\eta'' < 0{,}126$, что противоречит неравенству $\eta'' < 0{,}128$. Значит, $(5, 0, 3)$ лежит внутри, $25m + 1 \leqslant 9m'' + 30\eta''$. В данном случае $m'' \leqslant 3\eta'' + \frac{9m-1}{4}$ (§ 20, замечание 4); из двух последних неравенств получаем $\eta'' \geqslant \frac{8}{57}$. Заметим еще, что при $\alpha_1 = 1$ имеем $f(0, -1, 2;\ 1, 0, 0) = -\eta' + 2\eta'' < 0$, так как из $\eta' \leqslant 2\eta''$, $1{,}8 < 4\eta' + \eta''$ выходило бы $\eta'' > 0{,}2$.

Итак, в рассматриваемом случае [4, 1]

$$0 < \eta' - 2\eta'' < 0{,}168, \quad \eta'' \geqslant \frac{8}{57}. \tag{122}$$

Между срединами ребер $M'(2, 4, 1)$, $M(0, 0, 1)$, $M''(0, -1, 2)$ имеем соотношение

$$M' + 4M'' = 9M + 2P, \quad P = (1, 0, 0). \tag{123}$$

Пусть $\alpha_1 = 2$. Комбинируя случаи 1, 2, написанные выше, со случаями 1′, 2′, 3′ § 23, найдем, что возможны только две комбинации 1, 1′ и 2, 3′. Случай 1, 1′ будем обозначать в дальнейшем [4, 2] A; в этом случае из условия $0{,}832 < 2\eta' - 3\eta''$ вытекает

$$\eta'' < 0{,}057. \tag{124}$$

Фиг. 14

Форма граней дана на фиг. 14; между срединами ребер $M'(2, 4, 1)$, $M(0, 0, 1)$, $M''(-1, -2, 3)$ имеем соотношение

$$M' + 2M'' = 7M. \tag{125}$$

В случае 2, 3′ = [4, 2] B

$$\eta'' < 0{,}073. \tag{126}$$

Чертеж получается отражением фиг. 14 в плоскости $x = 0$; соотношение (125) между срединами ребер $M'(-2, 4, 1)$, $M(0, 0, 1)$, $M''(1, -2, 3)$ остается в силе.

Пусть $\alpha_1 = 3$. Из неравенств $F(0, 1, -4) \leqslant -\frac{9}{4}$, $F(0, 4, 3) \leqslant -\frac{9}{4}$ выводим $c \geqslant 3a + \frac{9}{19} > 2{,}72$, $m'' > 2{,}68$; следовательно (§ 20, замечание 4),

$$\eta'' \leqslant \frac{m}{4} - \frac{5}{28} < 0{,}072. \tag{127}$$

При помощи этого неравенства убеждаемся, что из всех комбинаций случаев 1, 2 со случаями $1''-4''$ § 24 остается только одна 1, $1''$, которую в дальнейшем будем обозначать [4, 3].

Между срединами ребер $M'(2, 4, 1)$, $M(0, 0, 1)$, $M''(-1, -3, 4)$ существует зависимость

$$3M' + 4M'' = 19M + 2P, \quad P = (1, 0, 0). \tag{128}$$

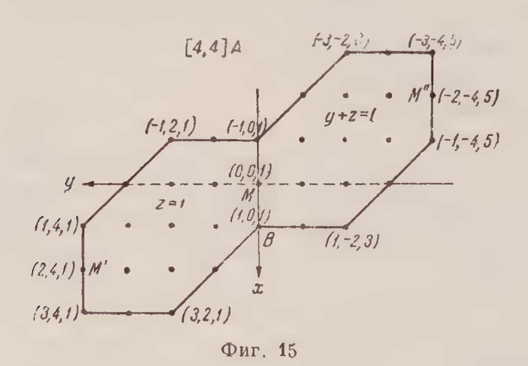
Пусть, наконец, $\alpha_1 = 4$. Из $F(0, 5, 4) \leqslant -\frac{9}{4}$ и $2b \geqslant c$ вытекает $c \geqslant \frac{16}{5}a + \frac{9}{20} \geqslant 2{,}85$, откуда

$$m'' > 2{,}81, \quad \eta'' < 0{,}072. \tag{129}$$

На основании этого докажем (аналогично тому, как в начале § 24), что одна из точек $(\pm 1, -4, 5)$ лежит внутри конуса. А так как $(0, -4, 5)$ лежит вне (§ 20, замечание 3), то могут быть два случая:

$1'$. Средина ребра $(2, -4, 5)$; $-2{,}17 \leqslant 4\eta' - 5\eta'' \leqslant -1{,}832$.

$2'$. Средина ребра $(-2, -4, 5)$; $1{,}832 \leqslant 4\eta' - 5\eta''$.



Фиг. 15

Из комбинаций случаев 1, 2 со случаями $1'$, $2'$ возможны только две: 1, $2'$ и 2, $1'$.

В случае 1, $2' = [4, 4]$ A форма граней изображена на фиг. 15; между срединами ребер $M'(2, 4, 1)$, $M(0, 0, 1)$, $M''(-2, -4, 5)$ имеется соотношение

$$M' + M'' = 6M. \tag{130}$$

В случае 1, $1' = [4, 4]$ B чертеж представляет отражение фиг. 15 в плоскости $x = 0$. Между срединами ребер $M'(-2, 4, 1)$, $M(0, 0, 1)$,

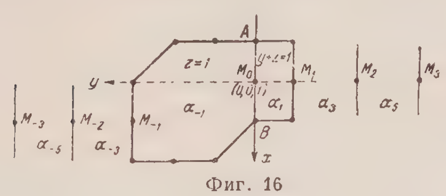
$M''(2, -4, 5)$ имеем то же соотношение (130). В обоих случаях имеет место (129).

§ 27. В предыдущих параграфах мы изучили все возможные $\left(\text{при } d \leqslant \frac{9}{2}\right)$ случаи формы и расположения двух соседних граней зоны $\mathfrak{Z}$ около точки $M(0, 0, 1)$. Таких случаев 10:

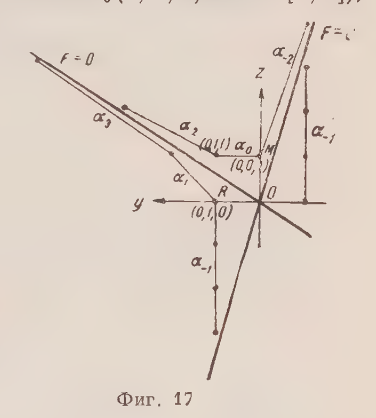
$$[3, 1],\ [3, 2],\ [3, 3]\,\text{A},\ [3, 3]\,\text{B},\ [4, 1],\ [4, 2]\,\text{A},\ [4, 2]\,\text{B},\ [4, 3],$$

$$[4, 4]\,\text{A},\ [4, 4]\,\text{B}.$$

Рассмотрим возможные сцепления этих случаев. На фиг. 16 изображены грани зоны $\mathfrak{Z}$ (для случая, когда в точке $M_0(0, 0, 1)$ имеем [3, 1]); средины ребер этой зоны будем обозначать через M_k $(-\infty < k < +\infty)$. На фиг. 17 показан соответствующий полигон $\mathfrak{p}$ формы F на плоскости $x=0$, т. е. формы $-cy^2+2byz+az^2$. Это — форма приведенная с первым основным вектором OR и вторым OM. Поэтому, обозначая через λ и $-\frac{1}{\lambda'}$ корни уравнения $-cy^2+2by+a=0$, согласно формулам (3) § 1 имеем



Фиг. 16



Фиг. 17

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2b}{c} = \lambda - \frac{1}{\lambda'}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\lambda}{\lambda'}, \\ &\lambda = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots], \quad \lambda' = [\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \alpha_{-3}, \alpha_{-4}, \ldots]. \end{aligned}\right\} \qquad (131)$$

По замеченному в § 19 все $\alpha_{2k} = 1$.

§ 28. ТЕОРЕМА 17. *В случае* [3, 1] *имеем* $d > \frac{9}{2}$.

По условию $\alpha_{-1}=3$, $\alpha_1=1$, $M_{-1}=(1, 3, 1)$, $M_1=(0, -1, 2)$. В точке M_1 имеем либо [3, 1], либо [4, 1]. Если [4, 1], то в этом последнем случае, как известно (см. (122)), $f(M_0, P)$ и $f(M_1, P)$ разных знаков и потому $f(M_1, P) < 0$; на основании (123) $M_2 + 4M_0 = 9M_1 - 2P$, откуда $M_2 = (-2, -9, 14)$. Применяя известные для случая [3, 1] неравенства (99), получим $f(M_2, P) = 2m - 9\eta' + 14\eta'' \geqslant \frac{8}{3} - \frac{5}{2}m$. Отсюда вытекает (§ 20, замечание 2), что f принимает значение, сколь угодно близкое $+1$. Поэтому можно предполагать, что в точке M_1 имеем случай [3, 1], $\alpha_3 = 3$. Если $f(M_1, P) \geqslant 0$, то на основании (98)

$$M_2+3M_0=7M_1+P,\quad M_2=(1,\ -7,\ 11);\quad -0{,}168\leqslant -m-7\eta'+11\eta'';$$
$$\eta'<0{,}15,$$

что противоречит (99). Поэтому

$$f(M_1,\ P)<0,\quad M_2+3M_0=7M_1-P,\quad M_2=(-1,\ -7,\ 11),$$

На основании (99) $|f(M_1,\ P)|=\eta'-2\eta''\geqslant\frac{1}{12}$, что вместе с (97) дает $\eta''\leqslant\frac{m}{5}-\frac{1}{12}<0{,}118$. В точке $M_2(-1,\ -7,\ 11)$ имеем один из случаев [3, 1], [3, 2], [3, 3] A, [3, 3] B, [4, 3]. Принимая во внимание только что доказанное неравенство $\eta''<0{,}118$ для случая [3, 1] и пересматривая верхние пределы для η'' в остальных случаях (формулы (104), (114), (127)), можем написать $|f(M_2,\ P)|\leqslant 0{,}134$, т. е.

$$0{,}866\leqslant 7\eta'-11\eta''\leqslant 1{,}135. \tag{132}$$

По формулам (131)

$$\lambda=[1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ \alpha_5,\ \ldots]>[1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 5]=\frac{81}{52},$$
$$\lambda<[1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 2]=\frac{64}{41}. \tag{133}$$

Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $\alpha_{-3}=1$. Тогда $\alpha_{-5}=3$ и

$$\lambda'=[3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ \alpha_{-7},\ 1,\ \ldots]>[3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 2]=\frac{233}{64},$$
$$\lambda'<[3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 3,\ 1,\ 5]=\frac{295}{81}.$$
$$\frac{2b}{c}=\lambda-\frac{1}{\lambda'}>1{,}283,\quad \frac{2b}{c}<1{,}287,\quad 0{,}427<\frac{a}{c}<0{,}429. \tag{134}$$

В точке M_{-1} имеем случай [3, 1]; на основании (98) $M_0+3M_{-2}=7M_{-1}\pm P$. Так как M_{-2} — целая точка, то должен быть знак $-$, откуда $M_{-2}=(2,\ 7,\ 2)$, $f(M_{-1},\ P)<0$. В начале настоящего доказательства мы видели, что если, например, в точке M_0 имеем [3, 1], то величины $f(M_0,\ P)$ и $f(M_1,\ P)$ разных знаков; так как в M_{-2} опять имеем [3, 1] и $f(M_{-1},\ P)<0$, то $f(M_{-2},\ P)>0$, $M_{-3}+3M_{-1}=7M_{-2}+P$, $M_{-3}=(12,\ 40,\ 11)$. В точке M_{-3} имеем один из случаев $[3,\ k]$ и, подобно тому, как выше для M_2 (ср. (132)), получим

$$11{,}866\leqslant 40\eta'+11\eta''\leqslant 12{,}146. \tag{135}$$

Имеем

$$mf(-5,\ 2,\ 3)=9c-4a+12b-25m^2-10m(2\eta'+3\eta'')-(2\eta'+3\eta'')^2. \tag{136}$$

На основании (132) и (135)

$$2\eta'+3\eta''=\frac{43}{517}(40\eta'+11\eta'')-\frac{98}{517}(7\eta'-11\eta'')<0{,}85.$$

Применяя это неравенство, затем (134), наконец, $c\geqslant\frac{9}{4}$; из (136) получим

$$mf(-5,\ 2,\ 3)>14{,}982c-34{,}283\geqslant -0{,}574,\quad f(-5,\ 2,\ 3)>-0{,}574. \tag{137}$$

Далее, $\eta'' \geqslant \frac{1}{12}$ (см. (99)), (135) и (132) дают

$$2\eta' + 3\eta'' = \frac{1}{20}(40\eta' + 11\eta'') + \frac{49}{20}\eta'' > 0{,}7974, \tag{138}$$

$$\eta'' = \frac{7}{517}(40\eta' + 11\eta'') - \frac{40}{517}(7\eta' - 11\eta'') < 0{,}0975. \tag{139}$$

Предположим, что $m < 1{,}0001$. Формула $m'' \leqslant 3\eta'' + \frac{9m-1}{4}$, имеющая место в нашем случае (§ 20, замечание 4), дает $m'' < 2{,}2928$, откуда $c < 2{,}303$. После этого (136), (134) и (138) дают

$$mf(-5, 2, 3) < 15{,}014c - 33{,}609 < 0{,}969; \quad f(-5, 2, 3) < 0{,}969. \tag{140}$$

Неравенства (137) и (140) показывают, что случай $\alpha_{-3} = 1$ невозможен (при $d \leqslant \frac{9}{2}$).

2. Пусть $\alpha_{-3} = 2$. Тогда $\alpha_{-5} \geqslant 3$ и с помощью (133) получаем

$$\lambda' = [3, 1, 2, 1, \alpha_{-5}, 1, \ldots] > [3, 1, 2, 1, 3, 2] = \frac{127}{34},$$

$$\frac{2b}{c} > 1{,}289, \quad \frac{a}{c} < 0{,}418. \tag{141}$$

В точке M_{-1} имеем [3, 2] и на основании (108) $3M_{-2} + 2M_0 = 11M_{-1} \pm P$; так как M_{-2} — целая точка, то имеет место знак $+$, откуда $M_{-2} = (4, 11, 3)$, $f(M_{-1}, P) = -m + 3\eta' + \eta'' = \varphi \geqslant 0$. В M_{-2} имеем один из случаев [3, 2], [4, 2] A, [4, 2] B, поэтому

$$f(M_{-2}\, P) \geqslant -0{,}134, \quad 11\eta' + 3\eta'' \geqslant 3{,}866. \tag{142}$$

Полагая $f(M_{-1}) = f(1, 3, 1) = f$, имеем тождество $mf + \varphi^2 = -9a + c + 6b$, из которого на основании (141) вытекает $mf + \varphi^2 > 1{,}1c$ и так как $c \geqslant \frac{9}{4}$, $\varphi < 0{,}168$, то $f > 2{,}443$. Рассматривая замечание 4 § 20, видим, что средину ребра (0, 0, 1) можно заменить srediной любого другого ребра, например M_{-1}, и тогда m'', η'' заменятся на f, φ; но, так как $f > 2{,}443$, то должно быть $\varphi \leqslant 0{,}072$, откуда

$$3\eta' + \eta'' \leqslant 1{,}073. \tag{143}$$

Из неравенств (142) и (143) вытекает

$$7\eta' - 11\eta'' = 20(11\eta' + 3\eta'') - 71(3\eta' + \eta'') \geqslant 1{,}137,$$

что противоречит (132). Поэтому случай $\alpha_{-3} = 2$ также невозможен.

3. Пусть $\alpha_{-3} = 3$. Имеем

$$\lambda' = [3, 1, 3, 1, \alpha_{-5}, 1, \ldots] > [3, 1, 3, 1, 1, 2] = \frac{87}{23},$$

$$\frac{2b}{c} > 1{,}2933, \quad \frac{a}{c} < 0{,}4127. \tag{144}$$

В точке M_{-1} имеем [3, 3] A или [3, 3] B и, на основании (115), $M_{-2} + M_0 = 5M_{-1}$, $M_{-2} = (5, 15, 4)$,

$$15\eta' + 4\eta'' \geqslant 4{,}866. \tag{145}$$

На основании (145) и (132)

$$2\eta' + \eta'' = \frac{29}{193}(15\eta' + 4\eta'') - \frac{7}{193}(7\eta' - 11\eta'') < 0,6899. \qquad (146)$$

В рассматриваемом случае [3,1] точка (3, 2, 1) лежит вне; переписывая неравенство (96) в виде

$$c + 4b \leqslant 4a + 9m^2 - m - 6m(2\eta' + \eta'') + (2\eta' + \eta'')^2,$$

замечая, что $9m^2 < 9,0181$ и функция $x^2 - 6\,mx$ убывает с возрастанием $x < 3$, получим на основании (144) и (146) $1,9858\,c < 4,3547$, $c < 2,2496$, что противоречит неравенству $c \geqslant \frac{9}{4}$. Случай $\alpha_{-3} = 3$ также невозможен.

4. Пусть, наконец, $\alpha_{-3} = 4$. В точке M_{-1} имеем [4, 3] и на основании (127) и (128) получим

$$3\eta' + \eta'' \leqslant 1,073, \quad 3M_{-2} + 4M_0 = 19M_{-1} \pm 2P, \quad M_{-2} = (7, 19, 5),$$
$$19\eta' + 5\eta'' \geqslant 6,832.$$

Отсюда

$$7\eta' - 11\eta'' = 10(19\eta' + 5\eta'') - 61(3\eta' + \eta'') \geqslant 2,867,$$

что противоречит (132). Случай $\alpha_{-3} = 4$ также невозможен. Теорема доказана.

§ 29. ТЕОРЕМА 18. *В случае* [4,1] $(\alpha_{-1} = 4, \ \alpha_1 = 1)$ *при* $\alpha_{-3} \neq 2$ *имеем* $d > \frac{9}{2}$.

Нам дано $M_{-1} = (2, 4, 1)$, $M_1 = (0, -1, 2)$. На основании предыдущей теоремы можно предполагать, что $\alpha_3 = 4$, откуда

$$\lambda = [1, 1, 1, 4, 1, \alpha_5, 1, \ldots] < [1, 1, 1, 4, 1, 1, 2] = \frac{79}{51},$$
$$\lambda > [1, 1, 1, 4, 1, 5] = \frac{99}{64}. \qquad (147)$$

1°. Пусть $\alpha_{-3} = 1$; тогда $\alpha_{-5} = 4$ и

$$\lambda' = [4, 1, 1, 1, 4, 1, \alpha_{-7}, 1, \ldots] > [4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 2] = \frac{367}{79},$$
$$c > 2,999\,a, \ b > 0,665\,c. \qquad (148)$$

Если $f(M_{-1}, P) \geqslant 0$, то на основании (123)

$$M_0 + 4M_{-2} = 9M_{-1} + 2P, \quad M_{-2} = (5, 9, 2), -\frac{m}{2} + \frac{1}{3} \leqslant -5m + 9\eta' + 2\eta'',$$

откуда, так как $\eta' \leqslant \frac{m}{2}$, получаем $\eta'' \geqslant \frac{1}{6}$, так что этот случай можно отбросить. Если $f(M_{-1}, P) < 0$, то $M_{-2} = (4, 9, 2)$, $9\eta' + 2\eta'' < 4,172$, что вместе с $\eta'' \geqslant \frac{8}{57}$ (см. (122)) дает $\eta' < 0,433$, $a = mm' - \eta'^2 > 0,812$; после этого из (148) вытекает, что $c > 2,435$, $b > 1,619$, $d > 4,598$.

2°. Пусть $\alpha_{-3} = 3$. Тогда $\alpha_{-5} \geqslant 2$ и

$$\lambda' = [4, 1, 3, 1, \alpha_{-5}, 1, \alpha_{-7}, 1, \ldots] > [4, 1, 3, 1, 2, 1, 1, 2] = \frac{407}{85},$$

$$c > 3,0911\,a. \tag{149}$$

Если $f(M_{-1}, P) = -2m + 4\eta' + \eta'' \geqslant 0$, то на основании (127)

$$4\eta' + \eta'' \leqslant 2,074. \tag{150}$$

Кроме того, $4M_{-2} + 3M_0 = 19M_{-1} + 2P$, $M_{-2} = (10, 19, 4)$; пользуясь (150), получаем $-0,168 \leqslant -10m + 19\eta' + 4\eta'' \leqslant 3\eta' - 1,704 \leqslant -0,201$, что невозможно. Если $f(M_{-1}, P) < 0$, то $M_{-2} = (9, 19, 4)$ и, так как в этой точке имеем один из случаев [3, 2], [3, 3], [4, 3], то $19\eta' + 4\eta'' \leqslant 9,143$; пользуясь этим неравенством и (122), получаем

$$\eta' = \frac{2}{21}(\eta' - 2\eta'') + \frac{1}{21}(19\eta' + 4\eta'') < 0,4514,$$

откуда $a > 0,7962$ и из (149) $c > 2,461$, $m'' > 2,43$. Пусть $m < 1,0001$. Так как в рассматриваемом случае [4, 1] имеем неравенство $m'' \leqslant 3m - \frac{4}{7}$ (§ 20, замечание 4), то $m'' < 2,429$, что противоречит $m'' > 2,43$. Случай $\alpha_{-3} = 3$ невозможен.

3°. Пусть $\alpha_{-3} = 4$. Если $\alpha_{-5} \geqslant 2$, то

$$\lambda' = [4, 1, 4, 1, \alpha_{-5}, 1, \ldots] > [4, 1, 4, 1, 2].$$

Если $\alpha_{-5} = 1$, то $\alpha_{-7} = 4$ и

$$\lambda' = [4, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, \alpha_{-9}, 1, \ldots] > [4, 1, 4, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 2] = \frac{2151}{446}.$$

В обоих случаях можно удержать последнее неравенство, которое дает

$$c > 3,113\,a. \tag{151}$$

Из (122) получаем $a \geqslant 1 - \eta'^2 \geqslant 0,971 - 0,672\,\eta'' - 4\eta''^2$. Подставляя это в (151), получим

$$c \geqslant 3,022 - 2,092\,\eta'' - 12,452\,\eta''^2. \tag{152}$$

Неравенство $m'' + 4\eta'' \leqslant 4m - 1$ можно переписать так: $c + 4\eta'' \leqslant \eta''^2 + 3,008$, что вместе с (152) дает

$$13,452\,\eta''^2 - 1,908\,\eta'' - 0,014 \geqslant 0, \text{ откуда } \eta'' > 0,148. \tag{153}$$

Если точка $(-7, 0, 5)$ лежит внутри, то $49m + 70\eta'' + 1 \leqslant 25m''$; из этого и $m'' + 4\eta'' \leqslant 4m - 1$ получаем $170\eta'' + 26 \leqslant 51m$, откуда $\eta'' < 0,1474$, что противоречит (153). Поэтому $(-7, 0, 5)$ лежит вне конуса, $25m'' + 1 \leqslant 49m + 70\eta''$, что вместе с неравенством $m'' + 4\eta'' \leqslant 4m - 1$ дает

$$85m'' + 37 \leqslant 238m, \quad m'' < 2,368. \tag{154}$$

В случае $\alpha_{-3} = 4$ на основании (130) имеем

$$M_{-2} + M_0 = 6M_{-1}, \; M_{-2} = (12, 24, 5), \quad 24\eta' + 5\eta'' \leqslant 12,18,$$

откуда на основании (153) и (151)

$$\eta' < 0,4767, \quad a > 0,7727, \quad c > 2,4054, \quad m'' > 2,37,$$

а это противоречит (154). Итак, случай $\alpha_{-3} = 4$ также невозможен. Теорема доказана.

§ 30. ТЕОРЕМА 19. *В случае* [3, 2] *имеем* $d > \frac{9}{2}$.

Нам дано $\alpha_{-1} = 3$, $\alpha_1 = 2$, $M_{-1} = (-1, 3, 1)$, $M_1 = (1, -2, 3)$. Число α_3 может быть равно 3 или 4. Рассмотрим сначала случай $\alpha_3 = 3$. Тогда

$$\lambda = [1, 2, 1, 3, 1, \alpha_5, 1, \ldots] > [1, 2, 1, 3, 1, 5] = \frac{110}{81}, \ \lambda < [1, 2, 1, 3, 1, 2, 2] = \frac{125}{92}, \tag{155}$$

Имеем случаи $\alpha_{-3} = 2, 3, 4$.

1°. Пусть $\alpha_{-3} = 2$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\lambda' = [3, 1, 2, 1, \alpha_{-5}, 1, \ldots] > [3, 1, 2, 1, 3, 2] = \frac{127}{34}, \\ &\lambda' < [3, 1, 2, 1, 5] = \frac{86}{23}, \\ &a > 0,363\,c, \ c > 2,749\,a, \ b > 0,545\,c. \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

Предположим сначала, что $f(M_1, P) \geqslant 0$; на основании (108)

$$2M_2 + 3M_0 = 11M_1 + P, \ M_2 = (6, -11, 15), \ |f(M_2, P)| \leqslant 0,134,$$

откуда

$$5,866 \leqslant -11\eta' + 15\eta'' \leqslant 6,14. \tag{157}$$

Как известно (§ 20, замечание 2), точка $(-1, -1, 2)$ лежит внутри конуса, откуда

$$a + 4b + (-\eta' + 2\eta'' + m)^2 + m \leqslant 4c. \tag{158}$$

Пользуясь неравенствами (107) и (157), получим

$$-\eta' + 2\eta'' = \frac{5}{41}(-11\eta' + 15\eta'') + \frac{7}{41}(2\eta' + \eta'') > 0,587.$$

Подставляя это и (156) в (158), находим

$$c > 2,414. \tag{159}$$

Далее, (157), (103) и (107) дают

$$\left.\begin{aligned} &\eta'' = \frac{2}{41}(-11\eta' + 15\eta'') + \frac{11}{41}(2\eta' + \eta'') > 0,08, \\ &\eta'' = \frac{1}{26}(-11\eta' + 15\eta'') + \frac{11}{26}(\eta' + \eta'') < 0,1304. \end{aligned}\right\} \tag{160}$$

Неравенство $\eta'' > 0,08$ показывает, что в данном случае (§ 20, замечание 4)

$$m'' \leqslant 3\eta'' + \frac{9m-1}{4} < 0,3912 + 2,0023 = 2,3935, \quad c < 2,413,$$

что противоречит (159). Пусть теперь $f(M_1, P) < 0$; тогда $M_2 = (5, -11, 15)$.

$$4,866 \leqslant -11\eta' + 15\eta'' \leqslant 5,139 \tag{161}$$

и тождества (160) дают $0,035 < \eta'' < 0,092$. Пусть сначала точка $(-3, 0, 2)$ находится внутри конуса, т. е

$$m'' \geqslant 3\eta'' + \frac{9m+1}{4}. \tag{162}$$

Если (5, 0, 3) лежит вне, т. е. $9m''+30\eta''+1 \leqslant 25m$, то при помощи (162) получаем $\eta'' \leqslant \frac{m}{12}-\frac{13}{228}<0{,}027$, что противоречит неравенству $0{,}035<\eta''$. Если точка (5, 0, 3) находится внутри конуса, $25m+1 \leqslant \leqslant 30\eta''+9m''$, то опять вместе с (162) получаем $m'' \geqslant \frac{51}{19}=2{,}68\ \ldots$, что противоречит неравенству $c<2{,}65$, имеющему место в рассматриваемом случае [3, 2] (см. (100)). Пусть теперь $(-3, 0, 2)$ лежит вне,

$$m'' \leqslant 3\eta''+\frac{9m-1}{4}<2{,}279 \tag{163}$$

(так как выше доказано, что $\eta''<0{,}092$). В этом случае $\eta'' \geqslant \frac{1}{12}$ и (161) дает $|\eta'|<0{,}354$, $a>0{,}874$, откуда с помощью второго неравенства (156) получаем $c>2{,}402$, $m''>2{,}3$, что противоречит (163). Итак, случай $\alpha_{-3}=2$ невозможен.

2°. Пусть $\alpha_{-3}=3$. Имеем

$$\lambda'=[3, 1, 3, 1, \alpha_{-5}, 1, \ldots]>[3, 1, 3, 1, 2, 2]=\frac{125}{33}, \quad c>2{,}787a. \tag{164}$$

В данном случае $M_{-2}+M_0=5M_{-1}$, $M_{-2}=(-5, 15, 4)$, откуда

$$-5{,}139 \leqslant 15\eta'+4\eta'' \leqslant -4{,}866. \tag{165}$$

На основании (165) и (103)

$$\left.\begin{aligned} \eta''&=\frac{15}{11}(\eta'+\eta'')-\frac{1}{11}(15\eta'+4\eta'')<0{,}127,\\ \eta'&=\frac{1}{11}(15\eta'+4\eta'')-\frac{4}{11}(\eta'+\eta'')>-0{,}377. \end{aligned}\right\} \tag{166}$$

Отсюда $|\eta'|<0{,}377$, $a>0{,}857$ и из (164) $c>2{,}388$; таким образом,

$$m''>2{,}368. \tag{167}$$

Пусть $f(M_1, P) \geqslant 0$; тогда имеет место неравенство (160): $\eta''>0{,}08$, откуда

$$m'' \leqslant 3\eta''+\frac{9m-1}{4}. \tag{168}$$

Если $9m''+30\eta''+1 \leqslant 25m$, то на основании (168)

$$m'' \leqslant \frac{5}{2}m-\frac{7}{38}<2{,}33,$$

что противоречит (167). Если $25m+1 \leqslant 30\eta''+9m''$, то, пользуясь опять (168), получим $\eta'' \geqslant \frac{8}{57}=0{,}14\ldots$, что противоречит (166). Пусть теперь $f(M_1, P)<0$. При исследовании этого случая в предыдущем пункте 1° ($\alpha_{-3}=2$) мы разбирали предположения (162) и (163). Доказательство невозможности (162) справедливо дословно и теперь, неравенство же (163) противоречит (167). Итак, случай $\alpha_{-3}=3$ также невозможен.

3°. Пусть $\alpha_{-3}=4$. На основании теоремы 18 можно предполагать $\alpha_{-5} \geqslant 2$, так что

$$\lambda'=[3, 1, 4, 1, \alpha_{-5}, 1, \ldots]>[3, 1, 4, 1, 2, 2]=\frac{153}{40}, \quad c>2{,}815a. \tag{169}$$

В данном случае $3M_{-2}+4M_0=19M_{-1}\pm 2P$, откуда $M_{-2}=(-7, 19, 5)$; в в этой точке M_{-2} имеем один из случаев [4, 2], [4, 3], [4, 4], поэтому $19\eta'+5\eta''\leqslant -6{,}927$. Далее, на основании (127)

$$3\eta'+\eta''\geqslant -1{,}073. \tag{170}$$

Поэтому

$$-11\eta'+15\eta''=85(3\eta'+\eta'')-14(19\eta'+5\eta'')\geqslant 5{,}773.$$

Так как это неравенство противоречит (161), то из двух предположений $f(M_1, P)>0$ и $f(M_1, P)<0$, разбиравшихся при исследовании случая $\alpha_{-3}=2$, возможно только первое, так что имеем (157) и (160). С помощью (157) и (170) получаем

$$\eta'=\frac{15}{56}(3\eta'+\eta'')-\frac{1}{56}(-11\eta'+15\eta'')>-0{,}398, \quad a>0{,}841$$

и далее, из (169) и (160) $c>2{,}367$, $m''>2{,}346$. Полученное неравенство находится в противоречии с (160), в чем убедимся совершенно так же, как в пункте 2° ($\alpha_{-3}=3$) (формула (168) и следующие за ней рассуждения). Итак, случай $\alpha_{-3}=4$ также невозможен.

Переходим к рассмотрению случая $\alpha_{-3}=4$. Имеем

$$\lambda=[1, 2, 1, 4, 1, \alpha_5, 1, \ldots]<[1, 2, 1, 4, 1, 1, 2]=\frac{107}{79}. \tag{171}$$

В данном случае

$$M_2+2M_0=7M_1,\ M_2=(7, -14, 19), \quad 6{,}832\leqslant -14\eta'+19\eta''\leqslant 7{,}175. \tag{172}$$

В точке M_{-1} имеет место один из случаев [3, 2], [3, 3], [4, 3], поэтому $3\eta'+\eta''\geqslant -1{,}135$; отсюда

$$\eta''=\frac{3}{71}(-14\eta'+19\eta'')+\frac{14}{71}(3\eta'+\eta'')>0{,}064. \tag{173}$$

Если $m''\geqslant 3\eta''+\frac{9m+1}{4}$, то, пользуясь неравенством $m''<2{,}65$ (см. (100)), получаем $\eta''\leqslant 0{,}05$, что противоречит (173); следовательно,

$$m''\leqslant 3\eta''+\frac{9m-1}{4}. \tag{174}$$

Пусть $\alpha_{-3}\geqslant 3$; на основании (103) и (172)

$$\eta'=\frac{1}{33}(-14\eta'+19\eta'')+\frac{14}{33}(\eta'+\eta'')<0{,}112. \tag{175}$$

В точке M_{-1} имеем теперь один из случаев [3, 3], [4, 3], поэтому $3\eta'+\eta''\geqslant -1{,}073$, откуда

$$\eta'=\frac{19}{71}(3\eta'+\eta'')-\frac{1}{71}(-14\eta'+19\eta'')>-0{,}389, \quad a>0{,}848. \tag{176}$$

Далее, на основании (171), (176), (175)

$$\lambda' = [3, 1, \alpha_{-3}, 1, \alpha_{-5}, 1, \ldots] > [3, 1, 3, 1, 1, 2] = \frac{87}{23}, \quad c > 2{,}792a, \quad c > 2{,}367, \quad m'' > 2{,}35.$$

Между тем (174) и (175) дают $m'' < 2{,}34$, так что случай $\alpha_{-3} \geqslant 3$ невозможен.

Пусть, наконец, $\alpha_{-3} = 2$. Имеем

$$3M_{-2} + 2M_0 = 11M_{-1} \pm P, \quad M_{-2} = (-4, 11, 3), \quad -4{,}138 < 11\eta' + 3\eta'' < -3{,}866,$$

откуда при помощи (172) находим

$$\eta'' = \frac{11}{251}(-14\eta' + 19\eta'') + \frac{14}{251}(11\eta' + 3\eta'') < 0{,}099, \tag{177}$$

так что (174) дает

$$m'' < 2{,}3. \tag{178}$$

Из (174) вытекает $\eta'' \geqslant \frac{1}{12}$, после чего (172) дает $|\eta'| < 0{,}4$, $a > 0{,}84$. Далее, на основании (171), (177)

$$\lambda' = [3, 1, 2, 1, \alpha_{-5}, 1, \ldots] > [3, 1, 2, 1, 3, 2] = \frac{127}{34}, \quad c > 2{,}757a,$$

$$c > 2{,}315, \quad m'' > 2{,}3,$$

что противоречит (178). Итак, предположение $\alpha_{-3} = 2$ (и вместе с тем случай $\alpha_3 = 4$) невозможно. Теорема доказана.

§ 31. З а м е ч а н и е. *В случае* [4, 3] *имеем* $d > \frac{9}{2}$.

Нам дано $\alpha_{-1} = 4$, $\alpha_1 = 3$, $M_{-1} = (2, 4, 1)$, $M_1 = (-1, -3, 4)$ (§ 26); на основании предыдущих теорем $\alpha_{-3} \geqslant 2$, $\alpha_3 \geqslant 3$, откуда

$$4\eta' + \eta'' \geqslant 1{,}927, \quad 3\eta' - 4\eta'' < 1{,}073.$$

С помощью этих неравенств получаем

$$\eta'' = \frac{3}{19}(4\eta' + \eta'') - \frac{4}{19}(3\eta' - 4\eta'') > 0{,}078,$$

что противоречит неравенству (127): $\eta'' < 0{,}072$. Утверждение замечания доказано.

ТЕОРЕМА 20. *В случаях* [3, 3] A *и* [3, 3] B *имеем соответственно*

$$f = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \psi_9, \quad f = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \sim \psi_9,$$

либо $d > \frac{9}{2}$.

Рассмотрим случай [3, 3] A (§ 24). Нам дано $\alpha_{-1}=\alpha_1=3$, $M_{-1}=(1, 3, 1)$, $M_1=(-1, -3, 4)$. На основании предыдущих теорем можно предполагать $\alpha_{\pm 3}=\alpha_{\pm 5}= \ldots =3$, откуда

$$\lambda=[1, 3, 1, 3, \ldots]=\frac{3+\sqrt{21}}{6}, \quad \lambda'=[3, 1, 3, 1, \ldots]=\frac{3+\sqrt{21}}{2},$$

$$b=\frac{1}{2}c, \quad a=\frac{1}{3}c. \tag{179}$$

Положим $M_k=(p_k; q_k, r_k)\ (-\infty<k<+\infty)$. Из соотношений $M_k+M_{k-2}=5M_{k-1}\ (-\infty<k<+\infty)$ вытекает: 1) при всяком k, $p_k=\frac{1}{3}q_k$, 2) при $k>0$, $\frac{q_{-k}}{r_{-k}}$ есть $(2k-1)$-ая подходящая к дроби $[3, 1, 3, 1, \ldots]$, 3) при $k>0$ $\frac{r_k}{-q_k}$ есть $2k$-ая подходящая к дроби $[1, 3, 1, 3, \ldots]$. Разделяя неравенство $|f(M_k, P)|=|-mp_k+\eta' q_k+\eta'' r_k|<0{,}168$ на r_k и переходя к пределу при $k\to\pm\infty$, получим два соотношения

$$-\frac{1}{3}m\bar\lambda'+\eta'\bar\lambda'+\eta''=0, \quad -\frac{1}{3}m\lambda'+\eta'\lambda'+\eta''=0 \quad \left(\bar\lambda'=\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right),$$

из которых вытекает $\eta'=\frac{1}{3}m$, $\eta''=0$. Эти равенства вместе с (179) дают $m''=3m'-\frac{m}{3}$. Если $25m+1\leqslant 30\eta''+9m''$; то $m''\geqslant\frac{26}{9}=2{,}8\ldots$, что противоречит неравенству (109): $c<2{,}79$, имеющему место в рассматриваемом случае [3, 3] A. Поэтому $9m''+30\eta''+1\leqslant 25m$, откуда $m'\leqslant\frac{28m-1}{27}$. Это показывает, что при m, достаточно близком к 1, число $m'=-f(0, 1, 0)$ также сколь угодно близко к 1. Поэтому точка $P'(0, 1, 0)$ также будет внешней вершиной конуса $f=0$ и ей соответствует зона $\mathfrak{Z}'$ однослойных граней $\Pi(f)$, параллельных OP'. Обозначим через β_{2k-1} числа для граней $\mathfrak{Z}'$, соответствующие числам α_{2k-1} зоны $\mathfrak{Z}$. Одна из граней зоны $\mathfrak{Z}'$ (именно $z=1$) изображена на фиг. 13 и для нее $\beta_1=3$; применяя к зоне $\mathfrak{Z}'$ ряд доказанных выше теорем, можем считать, что и все остальные $\beta_{2k-1}=3$, что дает еще одно соотношение между коэффициентами f. Рассматривая полигон на плоскости $y=0$, соответствующий бинарной форме

$$F(x, 0, z)=-hx^2+2gxz+az^2,\ h=m'm''+\omega^2,\ g=\omega\eta'+m'\eta''\ [\text{см. } (78)], \tag{180}$$

можем получить это соотношение, например, в форме $h=2g+4a$, откуда $m'=m$, $m''=\frac{8}{3}m$, $\omega=\frac{4}{3}m$, $f=m\psi_9$, $m=1$, $f=\psi_9$. Аналогично рассуждаем и в случае [3, 3] B. Теорема доказана.

Из доказанных до сих пор теорем вытекает, что можно отбросить все случаи $[\alpha_{-1}; \alpha_1]$, в которых одно из чисел α_{-1}, α_1 равно 3; итак, из десяти случаев § 27 остаются пять: [4, 1], [4, 2] A, [4, 2] B, [4, 4] A, [4, 4] B.

§ 32. ТЕОРЕМА 21. *В случаях* [4, 2] A *и* [4, 2] B ($\alpha_{-1}=4$, $\alpha_1=2$) *при* $\alpha_{-3}=4$ *имеем* $d>\frac{9}{2}$.

Из предыдущих теорем вытекает, что можно предполагать $\alpha_3 = 4$, $\alpha_{-5} \geqslant 2$, поэтому

$$\lambda = [1, 2, 1, 4, 1, \alpha_5, 1, \ldots] < [1, 2, 1, 4, 1, 1, 2] = \frac{107}{79},$$

$$\lambda > [1, 2, 1, 4, 1, 5] = \frac{134}{99},$$

$$\lambda' = [4, 1, 4, 1, \alpha_{-5}, 1, \ldots] < [4, 1, 4, 1, 5] = \frac{169}{35},$$

$$\lambda' > [4, 1, 4, 1, 2, 2] = \frac{193}{40}.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $a \geqslant \frac{3}{4}$, выводим

$$c > 3{,}562\, a \geqslant 2{,}671, \quad b > 0{,}573\, c, \quad a > 0{,}28\, c; \; d > 0{,}607\, c^2. \qquad (181)$$

Рассмотрим случай [4, 2] A. Имеем

$$M_1 = (-1, -2, 3),\ M_2 + 2M_0 = 7M_1,\ M_2 = (-7, -14, 19),$$

$$7m - 14\eta' + 19\eta'' < 0{,}168, \qquad (182)$$

откуда, так как $\eta' \leqslant \frac{m}{2}$,

$$\eta'' < 0{,}01. \qquad (183)$$

Если $25m + 1 \leqslant 30\eta'' + 9m''$, то с помощью (183) и (181) находим

$$m'' > 2{,}83, \quad c > 2{,}83, \quad c^2 > 8, \quad d > 4{,}856.$$

Если $9m'' + 30\eta'' + 1 \leqslant 25m$, то, предполагая $m < 1{,}0001$ и пользуясь (183), находим $m'' < 2{,}667$, $c < 2{,}669$, что противоречит $c > 2{,}671$ (см. (181)).

Рассмотрим случай [4, 2] B. Имеем

$$M_2 = (7, -14, 19),\ M_{-1} = (-2, 4, 1),\ M_{-2} + M_0 = 6M_{-1},\ M_{-2} = (-12, 24, 5),$$

$$f(M_2, P) \leqslant 0{,}168, \quad f(M_{-2}, P) \leqslant 0{,}073,$$

откуда (считая $m < 1{,}0001$)

$$-14\eta' + 19\eta'' < 7{,}169, \quad 24\eta' + 5\eta'' < -11{,}927.$$

Поэтому

$$\eta'' = \frac{12}{263}(-14\eta' + 19\eta'') + \frac{7}{263}(24\eta' + 5\eta'') < 0{,}01.$$

Дальше рассуждения те же, что и в предыдущем случае [4, 2] A. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 22. *В случаях* [4, 2] A *и* [4,2] B ($\alpha_{-1} = 4$, $\alpha_1 = 2$) *при* $\alpha_{-3} = 1$ *имеем* $d > \frac{9}{2}$.

Рассмотрим случай [4, 2] A. Для этого случая в предыдущей теореме уже доказаны неравенства (182), (183), из которых (182) дает

$$6{,}832 + 19\eta'' < 14\eta'. \qquad (184)$$

При $\alpha_{-3}=1$ в точке $M_{-1}=(2, 4, 1)$ имеем случай [4, 1], так что на основании (122)

$$|f(M_{-1}, P)|=|-2m+4\eta'+\eta''|\geqslant\frac{8}{57}>0,14.$$

Поэтому либо $4\eta'+\eta''>2,14$, что вместе с (183) приводит к невозможному результату $4\eta'>2,13, \eta'>\frac{m}{2}$, либо $4\eta'+\eta''<1,862$, что вместе с (184) также приводит к невозможному результату: $45\eta''+0,63<0, \eta''<0$.

Рассмотрим случай [4, 2] B. В предыдущей теореме уже замечено, что в этом случае $M_2=(7, -14, 19)$ и

$$-14\eta'+19\eta''<7,169 \quad (m<1,0001). \tag{185}$$

Далее, так как при $\alpha_{-3}=1$ имеем $\alpha_{-5}=4$,

$$\lambda'=[4, 1, 1, 1, 4, 1, \ldots]<[4, 1, 1, 1, 5]=\frac{79}{17},$$

$$\lambda'>[4, 1, 1, 1, 4, 2]=\frac{144}{31}, \tag{186}$$

$$\frac{134}{99}<\lambda<\frac{107}{79},\ a>0,29c,\ b>0,568c,\ d>0,61c^2,\ c>3,429a.$$

В точке M_{-1} $(-2, 4, 1)$ имеем случай [4, 1]; если $f(M_{-1}, P)=$ $=2m+4\eta'+\eta''\leqslant 0$, то $\left(\text{вследствие того, что } \eta'\geqslant-\frac{m}{2}\right)$ $\eta'=-\frac{m}{2}, \eta''=0$, $f(M_{-1}, P)=0$, что невозможно, так как на основании (122) должно быть $|f(M_{-1}, P)|\geqslant\frac{8}{57}$. Поэтому $f(M_{-1}, P)>0$, $4M_{-2}+M_0=9M_{-1}+2P$, $M_{-2}=(-4, 9, 2)$. По замеченному выше для случая [4, 1] (§ 26) числа $f(M_{-1}, P)$ и $f(M_{-2}, P)$ разных знаков, т. е. $f(M_{-2}, P)<0$ и, так как в M_{-2} имеем опять [4, 1], то $M_{-3}+4M_{-1}=9M_{-2}-2P$, $M_{-3}=(-30, 65, 14)$. Далее, на основании предыдущих теорем $\alpha_{-7}=2$, поэтому $|f(M_{-3}, P)|\leqslant 0,073$, или

$$-30,076\leqslant 65\eta'+14\eta''\leqslant-29,927. \tag{187}$$

Из неравенств (185) и (187) вытекает

$$\left.\begin{aligned}\eta''&=\frac{14}{1431}(65\eta'+14\eta'')+\frac{65}{1431}(-14\eta'+19\eta'')<0,04,\\ \eta'&=\frac{19}{1431}(65\eta'+14\eta'')-\frac{14}{1431}(-14\eta'+19\eta'')<-0,47.\end{aligned}\right\} \tag{188}$$

Отсюда с помощью (186) и (188) получаем

$$a>0,779, \quad c>2,671, \quad m''>2,668. \tag{189}$$

Если $25m+1\leqslant 9m''+30\eta''$, то, пользуясь (188) и (186), получаем $m''>2,75$, $d>4,61$. Если $9m''+30\eta''+1\leqslant 25m$, то $m''<2,667$, что противоречит (189). Теорема доказана.

Следствие. *В случае* [4, 1] *имеем* $d>\frac{9}{2}$.

Вытекает из теорем 18 и 22.

§ 33. ТЕОРЕМА 23. *В случаях* [4, 4] A *и* [4, 4] B *либо* $d > \frac{9}{2}$, *либо имеем соответственно*

$$f = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Обе эти формы эквиваленты ψ_{11}. Форма $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$ подстановкой $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ переходит в $\psi_{11} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Рассмотрим случай [4,4] A, так что $\alpha_{-1} = \alpha_1 = 4$, $M_{-1} = (2, 4, 1)$, $M_1 = (-2, -4, 5)$. Из предыдущих теорем вытекает, что все $\alpha_{2k-1} = 4$, откуда

$$\lambda = [1, 4, 1, 4, \ldots] = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda' = [4, 1, 4, 1, \ldots] = 2 + 2\sqrt{2},$$

$$b = \frac{1}{2} c, \quad a = \frac{1}{4} c. \tag{190}$$

Для точек $M_k(p_k, q_k, r_k)$ имеем соотношения

$$M_k + M_{k-2} = 6M_{k-1} \quad (-\infty < k < +\infty),$$

из которых вытекает: 1) $p_k = \frac{1}{2} q_k$ при всяком k, 2) при $k \to +\infty$

$$\frac{q_{-k}}{r_{-k}} \to \lambda', \quad \frac{q_k}{r_k} \to -\frac{1}{\lambda} = \bar{\lambda}' = 2 - 2\sqrt{2}.$$

Формула $-mp_k + \eta' q_k + \eta'' r_k = O(1)$ при $k \to \pm\infty$ дает

$$-\frac{m}{2}\lambda' + \eta'\lambda' + \eta'' = 0, \qquad -\frac{m}{2}\bar{\lambda}' + \eta'\bar{\lambda}' + \eta'' = 0,$$

откуда $\eta' = \frac{m}{2}$, $\eta'' = 0$. Подставляя это в (190), получим $m'' = 4n' - m$; формула $m'' + 4\eta'' \leqslant 4m - 1$ дает $m' \leqslant \frac{5m-1}{4}$, так что m' можно предполагать сколь угодно близким к 1. Обозначим через 3′ зону граней для внешней вершины (0, 1, 0) и через β_{2k-1}—соответствующие этим граням числа (ср. доказательство теоремы 20). Одна из граней зоны 3′, именно $z = 1$, изображена на фиг. 15 и для нее $\beta_1 = 4$. Применяя к зоне 3′ ряд доказанных выше теорем, видим, что относительно ряда чисел β_{2k-1} можно сделать только два предположения: 1) либо он

состоит только из четверок, 2) либо из четверок попеременно с двойками. Второе предположение дает для бинарной формы (180) соотношение $h=2g+\frac{9}{2}a$, из которого получаем $m'=\frac{15}{16}m<1$, что невозможно. Первое предположение дает $h=2g+5a$, $m'=m$, $m''=3m$, $\omega=\frac{3}{2}m$.

Аналогично рассматривается случай [4,4] B. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 24. *В случаях* [4,2] A *и* [4,2] B *либо* $d>\frac{9}{2}$, *либо имеем соответственно*

$$f=\begin{Vmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{21}{8} \end{Vmatrix}=\psi_{10} \text{ и } f=\begin{Vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{21}{8} \end{Vmatrix}\sim\psi_{10}.$$

Рассмотрим случай [4,2] A, так что $\alpha_{-1}=4$, $\alpha_1=2$, $M_{-1}=(2, 4, 1)$. Из предыдущих теорем вытекает, что $\alpha_3=4$, $\alpha_5=2, \ldots$, $\alpha_{-3}=2$, $\alpha_{-5}=4, \ldots$, откуда

$$\lambda=[1, 2, 1, 4, \ldots]=\frac{4+\sqrt{30}}{7}, \quad \lambda'=[4, 1, 2, 1, \ldots]=\frac{4-\sqrt{30}}{2},$$

$$b=\frac{4}{7}c, \quad a=\frac{2}{7}c. \tag{191}$$

Для точек M_k имеем соотношения

$$M_k+2M_{k-2}=7M_{k-1} \quad (k \text{ четное}); \qquad 2M_k+M_{k-2}=7M_{k-1} \quad (k \text{ нечетное})$$

$$(-\infty<k<+\infty).$$

Из этих соотношений так же, как и при доказательстве теорем 20 и 23, выведем, что $\eta'=\frac{m}{2}$, $\eta''=0$; подставляя это в (191), получим $\omega=\frac{4}{7}m''$, $m'=\frac{m}{4}+\frac{2}{7}m''$. В случае [4,2] A точка $(-2, 1, 1)$ лежит вне (фиг. 14); следовательно,

$$m''\leqslant\frac{175}{52}m-\frac{7}{13}<2{,}831. \tag{192}$$

Если $25m+1\leqslant 9m''+30\eta''$, то $m''\geqslant\frac{26}{9}=2{,}88\ldots$, что противоречит (192). Поэтому $9m''+30\eta''+1\leqslant 25m$, откуда

$$m''<2{,}67. \tag{193}$$

Далее, $f(9, 2, 4)=24m''-64m$; если эта точка лежит внутри, то $m''\geqslant\frac{65}{24}=2{,}7\ldots$, что противоречит (193). Поэтому точка (9, 2, 4) лежит вне, $m''\leqslant\frac{64m-1}{24}$, $m'\leqslant\frac{85m-1}{84}$, т. е. m' сколь угодно близко к 1. Внешней вершине $(0, 1, 0)^*$ соответствует ряд чисел β_{2k-1} ($\beta_1=4$ для грани $z=1$). Для ряда β_{2k-1} возможны те же два предположения, что

и при доказательстве теоремы 23; первое предположение (все $\beta_{2k-1}=4$) дает $m''=\frac{343}{120}m>2{,}8$, что противоречит (193). Второе предположение ($\beta_{4k+1}=4$, $\beta_{4k-1}=2$) дает $m''=\frac{21}{8}m$, $\omega \doteq \frac{3}{2}m$, $m'=m$.

Аналогично рассматриваем случай [4,2] B. Теорема доказана.

Из изложенного в §§ 19—33 вытекает справедливость теоремы 1 для форм, принимающих сколь угодно близкие значения к своему минимуму с отрицательной стороны. Вместе с тем теорема 1 полностью доказана.

Ленинградский государственный университет

Поступило 7. VI. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Золотарев Е. И., Полное собрание сочинений, изд. Физико-математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, вып. II (включающий переписку Е. И. Золотарева с А. Н. Коркиным), Ленинград, 1932.

[2] Марков А. А., О бинарных квадратичных формах положительного определителя, СПб, 1880.

[3] Markoff A. A. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies, Math. Annalen, 56, 1903.

[4] Markoff A., Table des formes quadratiques ternaires indéfinies ne représentantes pas zéro, pour tous les déterminants positifs $d \leqslant 50$, Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg, VIII Sér., vol. XXIII, No. 7, СПб, 1909.

[5] Венков Б. А., Об арифметической группе автоморфизмов неопределенной квадратичной формы, Известия АН, 1 (1937), 139—170.

[6] Dickson L. E., Studies in the theory of numbers, The University of Chicago, Science Series, 1930.

[7] Fujiwara M., Anwendung der Geometrie der Zahlen auf die indefiniten tärneren quadratischen Formen, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität, II. Band, 1929 (unveränderter Neudruck von Teubner, Leipzig und Berlin).

B. A. VENKOV. SUR LE PROBLÈME EXTRÉMALE DE MARKOFF POUR LES FORMES QUADRATIQES TERNAIRES INDÉFINIES

RÉSUMÉ

Le problème des limites précises de minima des formes quadratiques binaires indéfinies a été complètement résolu par A. Markoff [voir (2)]. Markoff a démontré le théorème suivant: *La limite supérieure précise des minima des formes indéfinies* $ax^2+2bxy+cy^2$ *ayant le même déterminant* $\Delta=b^2-ac>0$ (x, y *étant des entiers*, a, b, c — *des nombres réels quelconques) est égale au minimum* $\sqrt{\frac{4}{5}\Delta}$ *des formes équivalentes à* $M_1=\sqrt{\frac{4}{5}\Delta}\,(x^2-xy-y^2)$; *pour les formes non-équivalentes à la forme* M_1 *cette limite est égale au minimum* $\sqrt{\frac{1}{2}\Delta}$ *des formes équivalentes à* $M_2=\sqrt{\frac{1}{2}\Delta}\,(x^2-2xy-y^2)$ *etc.*

La série $M_1, M_2, \ldots$ peut être prolongée infiniment et les formes extrêmes $M_1, M_2, \ldots$ jouissent de plusieurs propriétés remarquables. Dans la note (³) Markoff pose le problème analogue pour les formes ternaires indéfinies, mais il n'obtient que les quatre premiers terms de la série correspondante ($\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$; voir l'Introduction, § 3).

J'établis dans ce mémoire les 11 premiers termes de la série de Markoff pour les formes ternaires. Je démontre la proposition suivante (théorème 1)):

Soit

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2b''xy + 2b'xz + 2byz$$

une forme ternaire indéfinie avec les coefficients réels arbitraires et le déterminant

$$d = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} > 0.$$

Si l'on exclut les formes équivalentes aux formes $a\psi_k$ *(a étant constante,* $k = 1, 2, \ldots, 11$, voir l'Introduction, § 3), *la valeur absolue de chaque autre forme f peut être faite plus petite que* $\sqrt[3]{\frac{2}{9}d}$, *x, y, z étant des nombres entiers et* $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.

Ma méthode est une méthode géométrique fondée sur la considération de la distribution des points entiers (x, y, z) par rapport au cône $f(x, y, z) = 0$. Supposons que la forme donnée f ne représente pas zéro. Soit K une des deux nappes du cône $f = 0$; désignons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble de tous les points entiers intérieurs à K. Considérons un volume convexe le plus petit possible $\Pi(f)$ qui contient tous les points de $\mathfrak{M}$; j'appele les sommets intérieurs par rapport au cône $f = 0$ les sommets de polyèdre $\Pi(f)$. Soit $P(\xi, \eta, \zeta)$ un point entier primitif extérieur au cône $f = 0$; de même, le point P sera dit un sommet extérieur par rapport au cône $f = 0$, si le domaine T déterminé par les inégalités

$$f(P) \leqslant f(P, X) \leqslant -f(P), \quad f(X) \leqslant 0, \quad \varphi \geqslant 0, \quad \varphi' \geqslant 0, \quad X = (x, y, z)$$

ne contient pas des points entiers sauf les points O et $\pm P$. Nous désignons ici par $f(P, X)$ la forme bilinéaire

$$f(P, X) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \xi}x + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \eta}y + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \zeta}z$$

et par $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$ les équations des deux plans tangents au cône $f(X) = 0$ menés par le vecteur OP ($\varphi \geqslant 0$, $\varphi' \geqslant 0$ pour la nappe K). Je traite dans le chapitre I les propriétés diverses des sommets extérieurs; la démonstration du théorème 1 se trouve dans les chapitres II et III.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 495—526 Série mathématique

Л. И. КОПЕЙКИНА

СВОБОДНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе строится теория свободных проективных плоскостей и свободных разложений проективных плоскостей; первые результаты в этом направлении принадлежат Холлу (1). Эта теория оказывается вполне параллельной теории свободных произведений групп.

Введение

Проективной плоскостью называется множество точек и прямых с отношением инцидентности («точка лежит на прямой», «прямая проходит через точку»), причем

1° каждые две различные прямые имеют одну и только одну общую точку;

2° каждые две различные точки содержатся в одной и только одной прямой;

3° существуют по крайней мере четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Будем рассматривать также множества точек и прямых, в которых выполнены условия 1° и 2°, но не выполнено условие 3°, называя их вырожденными плоскостями.

Легко проверить, что все вырожденные плоскости исчерпываются следующими типами:

(1) пустая плоскость,

(2) прямолинейный ряд точек (в частности, прямая),

(3) пучок прямых (в частности, точка),

(4) прямолинейный ряд точек, через одну точку которого проведено несколько прямых,

(5) пучок прямых, пересеченный прямой.

Построение теории проективных плоскостей, параллельное теории свободных групп, начато в работе Холла (1).

Холл вводит следующее определение:

частичной плоскостью называется множество точек и прямых, в котором:

1° существует не более одной точки, общей двум данным различным прямым;

2° существует не более одной прямой, проходящей через две данные различные точки.

Вырожденной частичной плоскостью называется частичная плоскость, в которой нет четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Холл доказывает, что всякая частичная плоскость содержится в некоторой полной. Доказательство состоит в том, что частичная плоскость пополняется точками пересечения прямых, которые в ней не пересекаются, и прямыми, соединяющими точки, в ней не соединенные. Получается новая частичная плоскость, содержащая данную, причем между элементами данной частичной плоскости в ней выполняются те и только те соотношения, которые там уже были. Эта новая частичная плоскость вкладывается тем же способом в следующую и т. д. Объединение всех этих частичных плоскостей будет полной плоскостью, содержащей данную частичную плоскость. Построение, конечно, не однозначно.

Простейшим случаем такого расширения частичной плоскости будет тот, когда каждая присоединяемая точка получается как пересечение ровно двух прямых, а каждая присоединяемая прямая проводится ровно через две точки. Это будет *свободное расширение* частичной плоскости в полную. Такое расширение частичной плоскости в полную однозначно.

Вообще свободным расширением частичной плоскости Π_1 называется вложение ее в другую частичную плоскость Π_2 присоединением точек пересечения некоторых пар прямых, не пересекающихся в Π_1, и прямых, соединяющих некоторые пары точек, не соединенных в Π_1 (причем каждая новая прямая соединяет ровно две старых точки, каждая новая точка служит пересечением ровно двух старых прямых). Свободное сокращение частичной плоскости — выбрасывание из нее некоторых прямых, соединяющих ровно две точки, или точек, в которых пересекаются ровно две прямые.

Частичные плоскости, получающиеся одна из другой конечным числом свободных расширений и свободных сокращений, называются свободно эквивалентными. Плоскости, получающиеся свободным расширением свободно эквивалентных плоскостей, изоморфны (так как такое расширение однозначно).

Пусть конечная частичная плоскость содержит P точек, L прямых и I инциденций между ними. Тогда, как доказывает Холл, число $2(P+L)-I$ инвариантно при свободной эквивалентности. Назовем его рангом соответствующей полной плоскости и будем говорить, что эта плоскость имеет конечный ранг. Плоскость, не являющаяся свободным расширением конечной частичной плоскости, называется плоскостью бесконечного ранга. Условимся в этом случае называть рангом плоскости мощность множества ее точек.

Подплоскость (частичная подплоскость) плоскости Π — множество прямых и точек плоскости Π, само удовлетворяющее определению плоскости (частичной плоскости) при инциденциях, определенных в Π. Пересечение любого множества подплоскостей есть подплоскость.

Холл называет замкнутой конфигурацией такую конечную частичную плоскость, в которой на каждой прямой лежат по крайней мере три точки и в каждой точке пересекаются по крайней мере три прямых. В дальнейшем, говоря о замкнутой конфигурации, мы не будем предполагать ее конечной.

Холл определяет свободную плоскость Π_n ($n \geqslant 4$) как плоскость, полученную свободным расширением частичной плоскости, состоящей из $n-2$ точек на прямой и двух точек вне этой прямой, и доказывает, что свободная плоскость не содержит конечной замкнутой конфигурации и что, обратно, плоскость, не содержащая конечной замкнутой конфигурации и порожденная конечным числом образующих, свободна, откуда следует, что *подплоскость свободной плоскости, порожденная конечным числом образующих, свободна*.

А. Г. Курошем был поставлен вопрос о возможности доказать эту теорему для произвольной подплоскости и о построении для плоскостей теории, аналогичной теории свободных произведений групп.

В настоящей работе теорема о подплоскостях свободной плоскости (теорема типа теоремы Нильсена-Шрейера [2]) доказывается без предположения о конечности числа образующих в подплоскости (§ 2). Благодаря некоторому обобщению введенного Холлом понятия свободного произведения плоскостей (как свободного расширения частичной плоскости, состоящей из объединения данных плоскостей), удается доказать, что два свободных разложения произвольной плоскости обладают изоморфными продолжениями (даже общим продолжением с точностью до свободной плоскости). Поэтому если плоскость обладает разложением с неразложимыми множителями, то такое разложение этой плоскости единственно (теоремы типа теорем Куроша [3] в теории свободных произведений групп).

Неразложима в свободное произведение, например, плоскость, являющаяся свободным расширением конечной топологически связной замкнутой конфигурации; неразложимы также дезарговы плоскости. Точка и прямая оказываются не неразложимыми. Это как бы «двухатомные молекулы», и неразложимы в свободное произведение лишь «атомы» прямой и точки,—определенные в § 1 свободные плоскости ранга 1.

В § 3 строится пример плоскости, не разложимой в свободное произведение неразложимых множителей.

В § 4 изучаются плоскости с конечным числом образующих. Плоскость рассматривается вместе с определенным способом построения ее из системы образующих. При этом в плоскости однозначно выделяется минимальная частичная подплоскость, которая может быть построена из данной системы образующих так, что каждый ее элемент присоединяется тем же способом, что и при рассматриваемом построении плоскости, причем она порождает всю плоскость при свободном расширении. Изучение плоскости сводится к изучению этой частичной плоскости — остова плоскости. Доказывается, что если плоскость обладает конечным числом образующих, и остов ее — замкнутая конфигурация, то этот остов целиком содержится в любой частичной плоскости, порождающей данную плоскость при свободном расширении, в частности,—

в объединении множителей любого разложения. Далее доказывается, что в плоскости с конечной системой образующих, состоящей из n элементов, можно конечным числом шагов заменить систему образующих новой, состоящей не более чем из $2n$ элементов, притом так, что после выделения некоторых элементов этой новой системы образующих свободными множителями ранга 1 остов оставшейся части плоскости будет замкнутой конфигурацией. Отсюда следует теорема типа теоремы Грушко ([4]) (см. также Neumann ([5])) в теории свободных произведений групп: плоскость с системой образующих, состоящей из n элементов, есть свободное произведение не более чем $2n$ неразложимых множителей, каждый из которых обладает конечной системой образующих.

В § 5 строится пример плоскости, которая не является свободной, но каждая порожденная конечным числом образующих подплоскость которой свободна.

§ 1

Определение. Вполне свободной плоскостью называется плоскость, полученная свободным расширением частичной плоскости $\mathfrak{M}$, состоящей из точек и прямых без каких-либо инциденций между ними.

ЛЕММА 1. *В невырожденной вполне свободной плоскости S с системой образующих $\mathfrak{M}$ можно выбрать новую систему свободных образующих — частичную плоскость, свободно эквивалентную $\mathfrak{M}$ и состоящую только из точек.*

Если $\mathfrak{M}$ — конечна и состоит из m точек и n прямых, то, так как S невырожденная, либо $m \geqslant 3$, либо $n \geqslant 3$. Разбиваем множество прямых на непересекающиеся тройки и каждую тройку заменяем тройкой точек попарных пересечений этих прямых. Если еще остаются прямые, пусть l будет одна из них. Берем три точки A, B, C, присоединяем прямые AC и BC и точки пересечения их с прямой l, затем выбрасываем прямую l, точку C и прямые AC и BC.

В бесконечном случае разбиваем множество прямых на непересекающиеся тройки и каждую тройку заменяем тройкой точек.

Подплоскость вполне свободной плоскости может и не быть вполне свободной.

Пример. Пусть S — вполне свободная плоскость, порожденная четырьмя точками A, B, C, D, и O — точка пересечения прямых AD и BC.

Рассмотрим подплоскость S', порожденную частичной подплоскостью, состоящей из точек B, A, O, D и прямой, на которой лежат три последние точки. Ясно, что S' есть свободное расширение этой частичной плоскости, а потому для нее имеет смысл данное во Введении определение ранга:

$$R = 2(P + L) - I.$$

Здесь $P = 4$, $L = 1$, $I = 3$; $R = 2(4 + 1) - 3 = 7$.

В S' нельзя, следовательно, выбрать конечной системы свободных образующих, так как для такой системы $I = 0$ и R четно. Но в S' не может быть и бесконечной системы свободных образующих, потому что

каждая из точек B, A, O, D содержится в подплоскости, порожденной уже конечным числом образующих.

Определение. Свободной плоскостью называется плоскость, полученная свободным расширением частичной плоскости, состоящей из множества точек, расположенных на прямой, и двух точек вне этой прямой, а также каждая вырожденная плоскость.

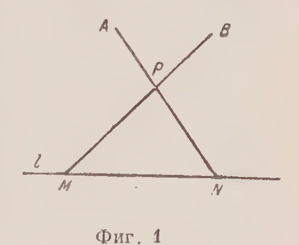
Всякая вполне свободная плоскость свободна.

Действительно, если эта плоскость вырожденная, то она свободна, по определению. Если же дана вполне свободная невырожденная плоскость, то в ее системе образующих выбираем четыре точки; через две из них проводим прямую l, две другие точки A и B будут вне l. Каждую точку X из системы образующих плоскости заменим двумя точками пересечения с l прямых AX и BX. Новая частичная плоскость свободно эквивалентна исходной и порождает при свободном расширении свободную плоскость.

Всякая невырожденная свободная плоскость с бесконечным числом образующих вполне свободна; всякая невырожденная свободная плоскость с конечным числом образующих или вполне свободна, или же является свободным расширением частичной плоскости, состоящей из нескольких отдельных точек и одной прямой с точкой.

Пусть свободная плоскость порождается частичной плоскостью, состоящей из множества точек, расположенных на прямой l, и двух точек A и B вне l. Любые две точки M и N, лежащие на прямой l, можно заменить одной свободной точкой P так, что полученная частичная плоскость свободно эквивалентная исходной.

Действительно (фиг. 1), присоединяем прямые AN и BM и точку P пересечения прямых AN и BM. Выбрасываем точки $M = BM \cdot l$ и $N = AN \cdot l$ и прямые $AP = AN$ и $BP = BM$.



Фиг. 1

Таким образом, если множество точек на прямой l бесконечно или если оно конечно, но четно, то с l можно «снять» все точки, и наша плоскость будет свободным расширением некоторого множества отдельных точек и одной прямой без точек на ней, т. е. плоскость вполне свободна. Если же множество точек на l нечетно, то с l можно снять все точки, кроме одной, и поэтому наша плоскость будет свободным расширением частичной плоскости, состоящей из нескольких отдельных точек и одной прямой с точкой.

Определение. Свободным произведением множества плоскостей A_α называется свободное расширение S частичной плоскости, являющейся объединением всех A_α,

$$S = \prod_{\alpha}^{*} A_\alpha$$

ЛЕММА 2. *Ранг свободного произведения конечного числа плоскостей конечного ранга равен сумме рангов множителей.*

Пусть дано конечное множество плоскостей A_i, каждая из которых есть свободное расширение конечной частичной плоскости A'_i. Так как свободное расширение частичной плоскости в полную однозначно, $\dot{\prod\limits_i} A_i$ будет свободным расширением объединения всех A'_i. Если P_i, L_i и I_i будут соответственно число точек, прямых и инциденций в частичной плоскости A'_i, а P, L и I — эти же числа для объединения всех A'_i, то

$$R(A_i) = 2(P_i + L_i) - I_i,$$

$$P = \sum_i P_i, \quad L = \sum_i L_i, \quad I = \sum_i I_i,$$

а потому

$$R\left(\dot{\prod_i} A_i\right) = 2(P + L) - I = \sum_i R(A_i).$$

Каким числом может выражаться ранг свободной плоскости? Для невырожденной свободной плоскости ранг $R \geqslant 8$, причем для всякого такого R существует единственная свободная плоскость ранга R. Ранг вырожденной свободной плоскости может быть любым числом, начиная с двух ($R=2$: прямая или точка; $R=3$: прямая с точкой на ней; $R=n>3$: $n-2$ точки на прямой или $n-4$ точки на прямой, одна вне прямой, или пучок $n-2$ прямых; и другие).

Введем идеальную «сверхвырожденную» свободную плоскость ранга 1. Это будет плоскость, в которой $P=1$, $L=0$, $I=1$ или $P=0$, $L=1$, $I=1$, т. е. точка или прямая, которые не свободны, чему-то инцидентны. Впрочем, права на самостоятельное существование такая «плоскость» не имеет и будет рассматриваться лишь в качестве свободного множителя.

Определение этого понятия основано на доказываемой ниже лемме 3. Введем сперва следующее

Определение. Две плоскости, содержащие некоторую плоскость A, назовем изоморфными над A, если между ними существует изоморфизм, продолжающий тождественное отображение A на себя.

Ясно, что две плоскости, каждая из которых есть свободное расширение одной из двух свободно эквивалентных между собой частичных плоскостей, содержащих некоторую плоскость A, изоморфны над A.

ЛЕММА 3. *Если A — произвольная плоскость, то все невырожденные плоскости, являющиеся свободными расширениями частичных плоскостей, полученных присоединением к A одной точки (или одной прямой), инцидентной некоторой прямой (некоторой точке) плоскости A, изоморфны над A.*

Пусть к плоскости A присоединяется прямая l, инцидентная некоторой точке M этой плоскости. В плоскости A имеется прямая m, не проходящая через точку M, иначе плоскость, полученная присоединением l, была бы вырожденной — пучком прямых с расположенным на

одной из них множеством точек (см. (4) во Введении). Присоединим к частичной плоскости, состоящей из A и l, точку пересечения N двух прямых m и l и выбросим прямую l, на которой лежат теперь ровно две точки. Полученная частичная плоскость свободно эквивалентна исходной и тоже содержит A; следовательно, плоскости, полученные свободным расширением частичных плоскостей $A+l$ и $A+N$, изоморфны над A.

При этом безразлично, какой именно точке (прямой) инцидентна присоединяемая прямая (точка); все так построенные невырожденные плоскости изоморфны между собою. Если присоединяемая точка K кладется на прямую l плоскости A, ее можно заменить точкой, инцидентной любой другой прямой m из A, так что полученная частичная плоскость содержит A и свободно эквивалентна исходной. Действительно, если плоскость A — невырожденная, в ней есть точка N, не лежащая ни на одной из прямых l и m. Присоединим к частичной плоскости $A+K$ прямую NK, затем точку M пересечения прямых NK и m и выбросим точку K (через нее проходят две прямые l и NK) и прямую $NM=NK$ (на ней лежат две точки N и M).

Если плоскость A — вырожденная, утверждение леммы легко проверить непосредственно, рассмотрев все вырожденные плоскости.

Если плоскость A имеет конечный ранг R, то, как легко проверить, ранг плоскости A', представляющей собою свободное расширение частичной плоскости, полученной присоединением к A одной точки (одной прямой), инцидентной некоторой прямой (некоторой точке) плоскости A, равен $R+1$. Ввиду этого мы для общего случая введем следующее определение, хорошо согласующееся с леммой 2:

Определение. Плоскость A', представляющая собою свободное расширение частичной плоскости, полученной присоединением к некоторой плоскости A одной точки (одной прямой), инцидентной некоторой прямой (некоторой точке) плоскости A, называется **свободным произведением плоскости A и свободной плоскости ранга 1.**

Определим теперь *свободное произведение A^* плоскости A на любое (конечное или бесконечное) множество плоскостей ранга* 1.

Пусть A—данная плоскость и $\mathfrak{M}$ — некоторое вполне упорядоченное множество. Положим $A_0=A$. Пусть для всех $\beta<\alpha\in\mathfrak{M}$ плоскость A_β уже определена, причем из $\beta<\beta'<\alpha$ следует, что A_β является подплоскостью плоскости $A_{\beta'}$. Если $\alpha-1$ существует, обозначим через A_α свободное произведение плоскости $A_{\alpha-1}$ и свободной плоскости ранга 1; если же α предельное, пусть A_α — объединение последовательности вложенных друг в друга плоскостей A_β для $\beta<\alpha$. Тогда A^* будет объединением всех A_α для $\alpha\in\mathfrak{M}$.

ЛЕММА 4. *Свободное произведение A^* плоскости A и любого множества $\mathfrak{M}$ свободных плоскостей ранга* 1, *если оно невырожденное, вполне определяется (с точностью до изоморфизма над A) мощностью множества $\mathfrak{M}$ (т. е. не зависит от порядкового типа $\mathfrak{M}$).*

В самом деле, легко показать, пользуясь леммой 3 и трансфинитной индукцией, что плоскость A^* изоморфна над A с плоскостью, получен-

ной свободным расширением частичной плоскости, состоящей из плоскости A и множества точек мощности множества $\mathfrak{M}$, причем все эти точки инцидентны некоторой фиксированной прямой плоскости A.

ЛЕММА 5. *Пусть A — произвольная плоскость, F — свободная плоскость ранга R (конечного или бесконечного), причем $A * F$ невырожденная плоскость. Тогда плоскость $A * F$ изоморфна над A со свободным произведением плоскости A и R свободных плоскостей ранга* 1.

Берем в плоскости A точку M, в плоскости F точку N. К A присоединяем свободный множитель ранга 1 в виде прямой, проходящей через точку M; затем второй множитель ранга 1 в виде точки N, инцидентной этой прямой, а затем выбрасываем присоединенную прямую. Таким образом, свободное присоединение одной точки из F к A равносильно присоединению двух множителей ранга 1. Двойственное рассуждение приводит к такому же утверждению для случая прямой из F. Если A—одна прямая (точка), а F состоит только из точек (прямых), придется взять новую систему образующих F, подобно тому, как в лемме 1; это можно сделать, так как $A * F$ — невырожденная плоскость и, значит, в F имеется в этом случае не меньше трех точек прямых. Отсюда следует справедливость леммы для случая, когда F вполне свободная плоскость, а поэтому и для случая любой невырожденной свободной плоскости, так как последняя будет или вполне свободной или же свободным произведением вполне свободной плоскости и множителя ранга 1.

Справедливость леммы в случае, когда F — одна из вырожденных плоскостей, устанавливается непосредственной проверкой.

Из доказанной леммы непосредственно следует: *если A — произвольная плоскость, F_1 и F_2 — свободные плоскости одинакового ранга, причем плоскости $A * F_1$ и $A * F_2$ невырожденные, то $A * F_1$ и $A * F_2$ изоморфны над A*, т. е. в качестве свободных множителей, на которые распадается невырожденная плоскость, свободные множители одинакового ранга R равносильны. Ввиду этого мы будем говорить дальше о свободном множителе, являющемся свободной плоскостью ранга R, не уточняя, какая именно свободная плоскость этого ранга (невырожденная или одна из вырожденных) рассматривается.

Присоединение точки в качестве свободного множителя равносильно присоединению двух свободных множителей ранга 1. Вообще, свободная плоскость ранга R будет свободным произведением R свободных плоскостей ранга 1.

ЛЕММА 6. *Если даны два свободных разложения произвольной плоскости A^*, имеющие вид $A^* = A * B_1 = A * B_2$, то $R(B_1) = R(B_2)$.*

Если все три плоскости конечного ранга, то утверждение леммы следует из леммы 2.

Пусть плоскости B_1 и B_2 конечного ранга, а ранг плоскости A бесконечен. Пусть B_1' и B_2' будут конечные частичные плоскости, порождающие соответственно B_1 и B_2 при свободном расширении. Каждый элемент частичной плоскости B_1' получается при свободном расширении объединения плоскости A и частичной плоскости B_2', но

получается он уже на конечном шаге; значит, в его построении участвует лишь конечное число элементов плоскости A.

Возьмем все элементы плоскости A, необходимые для построения элементов B'_1, если даны элементы B'_2, и элементов B'_2, если даны элементы B'_1; получим конечную частичную подплоскость A' плоскости A. Пусть A'' — плоскость, полученная свободным расширением A', она, конечно, может и не быть вложенной в плоскость A. Так как свободное расширение частичной плоскости в полную однозначно, то $A'' * B_1 = A'' * B_2$. Теперь каждая из плоскостей A'', B_1 и B_2 конечного ранга, а потому $R(B_1) = R(B_2)$.

Пусть, наконец, по крайней мере одно из B_i бесконечного ранга и, например, $R(B_1) < R(B_2)$. Для построения каждого из элементов плоскости B_1 необходимо, кроме A, конечное число элементов плоскости B_2, следовательно, всего — множество мощности $R(B_1)$, т. е. собственное подмножество B_2. Если же B_1 конечного ранга, то пусть B'_1 — конечная частичная плоскость, порождающая B_1 при свободном расширении; тогда для построения всех элементов B'_1, а следовательно, и всех элементов B_1, необходимо, кроме A, лишь конечное число элементов B_2, т. е. снова собственное подмножество B_2. Поэтому $A * B_1$ будет собственной подплоскостью плоскости $A * B_2$, т. е. $A * B_1 \neq A * B_2$.

Под плоскостью, не разложимой в свободное произведение, мы будем понимать лишь плоскость, от которой нельзя отщепить даже множителя ранга 1.

Дезаргова плоскость неразложима в свободное произведение. Действительно, свободное произведение есть свободное расширение некоторой частичной плоскости, но, как показал Холл, всякая плоскость, полученная свободным расширением частичной (неполной) плоскости, не дезаргова.

Плоскость, являющаяся свободным расширением конечной связной (т. е. любой элемент которой можно связать с любым другим цепочкой инциденций) *замкнутой конфигурации, неразложима в свободное произведение.* Действительно, если такая плоскость разложима, $\Pi = P * Q$, то исходная замкнутая конфигурация целиком содержится в объединении плоскостей P и Q. (Доказательство этого утверждения в точности повторяет доказательство теоремы Холла о том, что свободная плоскость не содержит конечной замкнутой конфигурации.) Однако, ввиду своей связности, она будет целиком содержаться в одном из множителей P, Q.

Отметим следующие свойства свободных произведений, доказательство которых не представляет затруднений:

ЛЕММА 7. *Если* $S = \overset{*}{\prod\limits_{\alpha}} A_\alpha$ *и некоторые* A_α *сами разложены в свободные произведения,* $A_\alpha = \overset{*}{\prod\limits_{\beta}} A_{\alpha\beta}$, *то* $S = \overset{*}{\prod\limits_{\alpha,\beta}} A_{\alpha\beta}$.

ЛЕММА 8. *Если* $S = \overset{*}{\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}}} A_\alpha$, *причем множество* $\mathfrak{M}$ *разложено в сумму непересекающихся подмножеств* $\mathfrak{M}_\beta$, *то* $S = \overset{*}{\prod\limits_{\beta}} \left(\overset{*}{\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{M}_\beta}} A_\alpha\right)$.

ЛЕММА 9. *Если* $S = \overset{*}{\prod_\alpha} A_\alpha$ *и* A'_α — *подплоскость плоскости* A_α, *то подплоскость, порожденная в* S *всеми* A'_α, *есть их свободное произведение.*

§ 2

ТЕОРЕМА I. *Всякая подплоскость* T *свободной плоскости* S *свободна.*

Достаточно доказать теорему лишь для случая, когда обе плоскости S и T невырожденные. Пусть свободная плоскость S является свободным расширением частичной плоскости S_0, состоящей из множества точек, расположенных на одной прямой, и двух точек вне этой прямой. Все эти точки и прямую назовем элементами нулевой ступени. Вообще, если частичная плоскость S_{2k} определена, то присоединим к ней прямые, соединяющие точки, в S_{2k} еще не соединенные, и обозначим полученную частичную плоскость через S_{2k+1}, а вновь присоединенные прямые назовем элементами $(2k+1)$-й ступени. Затем присоединим к S_{2k+1} точки пересечения прямых, в ней еще не пересекающихся; обозначим полученную частичную плоскость через S_{2k+2}, а вновь присоединенные точки назовем элементами $(2k+2)$-й ступени.

Обозначим через T_k, $k=0, 1, 2, \ldots$, подплоскость плоскости T, порожденную теми элементами из T, ступень которых не больше k. Подплоскости T_k составляют, очевидно, возрастающую последовательность плоскостей, объединение которых совпадает с T. Ясно, что подплоскость T_0 свободна. Множество элементов нулевой ступени, ее порождающее, обозначим через M_0. Подплоскость T_k, $k \geqslant 1$, порождается частичной плоскостью, состоящей из подплоскости T_{k-1} и множества M_k тех элементов k-й ступени, которые лежат вне T_{k-1}. Теорема будет доказана, если мы покажем, что плоскость T_k является свободным расширением этой частичной плоскости (при этом, конечно, некоторые элементы из M_k могут быть инцидентны элементам из T_{k-1}). В самом деле, плоскость T_k будет тогда свободным произведением плоскости T_{k-1} и некоторого множества свободных плоскостей ранга 1. Так как, кроме того, T_0 — свободная плоскость, т. е. свободное произведение свободных плоскостей ранга 1, плоскость T будет свободным произведением таких плоскостей, т. е. T — свободная плоскость.

Выберем некоторый определенный способ построения плоскости T_k из порождающей ее частичной плоскости, состоящей из T_{k-1} и M_k. Это значит, что для всякой точки (прямой) из T_k, лежащей вне этой частичной плоскости, можно указать инцидентные ей прямые (точки), непосредственно предшествующие ей при этом построении, притом не менее чем две.

Пусть A — произвольный элемент из T_k, лежащий вне T_{k-1} и не принадлежащий M_k. Пусть, для определенности, A — точка. Так как A лежит вне подплоскости T_0 и поэтому вне частичной плоскости S_0, то при построении плоскости S точка A получается как пересечение ровно двух прямых l_1 и l_2. Докажем, что эти прямые принадлежат к плоскости T_k, предшествуют в ней точке A и что никакая отличная от них прямая не предшествует (непосредственно) A в T_k.

В самом деле, пусть точке A предшествует при построении T_k инцидентная ей прямая l', отличная от l_1 и l_2. Так как плоскость S свободная, и точка A получилась при ее построении как пересечение прямых l_1 и l_2, то прямая l' должна была получиться при построении S ка́к прямая, соединяющая A с некоторой точкой B, поэтому прямая l' имеет более высокую ступень, чем точка A. Если l' не принадлежит к множеству M_k или к подплоскости T_{k-1}, то двойственная конструкция приведет к существованию точки A', предшествующей прямой l' при построении плоскости T_k, но имеющей более высокую ступень. Если же прямая l' уже принадлежит к T_{k-1}, то пусть она принадлежит к подплоскости T_i, $i \leqslant k-1$, но не принадлежит к T_{i-1}; если она не содержится в M_i, то такой же конструкцией, как выше, но осуществляемой в плоскости T_i, мы снова придем к существованию точки A', предшествующей в плоскости T_i прямой l', но имеющей более высокую ступень.

Продолжая построение, получим последовательность элементов A, l', A', l'', A'', ..., попеременно точек и прямых, ступени которых строго возрастают, хотя всякий элемент этой последовательности предшествует предыдущему при построении некоторой плоскости T_{i_m}, $i_m \geqslant i_{m+1}$. Ввиду этого последовательность не может быть бесконечной, т. е. некоторый элемент $X^{(m_0)}$ этой последовательности должен содержаться в одном из множеств M_i, $0 \leqslant i \leqslant k$. Отсюда следует, что ступень $X^{(m_0)}$ не превосходит k, хотя в действительности она больше, чем ступень элемента A, т. е. строго больше k.

Таким образом, предположение о существовании предшествующего элементу A при построении T_l элемента l', отличного от l_1 и l_2, ведет к противоречию, а так как элементу A должны предшествовать в плоскости T_k некоторые элементы, притом не менее чем два, то это будут в точности прямые l_1 и l_2.

Итак, каждому элементу плоскости T_k, лежащему вне T_{k-1} и вне M_k, предшествуют при построении T_k ровно два элемента; значит, T_k — свободное расширение частичной плоскости, состоящей из T_{k-1} и M_k.

ТЕОРЕМА II. *Пусть $S = \dot{\prod\limits_{\alpha}} A_\alpha$. Тогда всякая подплоскость $T \subset S$ есть свободное произведение подплоскостей $A'_\alpha = A_\alpha \cap T$ и некоторой свободной плоскости F,*

$$T = \dot{\prod_{\alpha}} A'_\alpha \cdot F.$$

Предположим, что среди плоскостей A_α имеется хотя бы одна «настоящая» плоскость, т. е. что не все A_α — свободные плоскости ранга 1. По лемме 3, безразлично, на какую именно прямую кладется точка — свободный множитель ранга 1; поэтому, если среди плоскостей A_α имеются такие, расположим их на какой-нибудь определенной прямой одного из множителей A_α (и двойственно: прямые — свободные множители ранга 1 проведем через какую-нибудь точку одного из множителей A_α).

Назовем все элементы всех множителей A_α элементами нулевой ступени и определим, как в теореме I, ступень каждого элемента S. Затем так же, как там, определим подплоскости T_k плоскости T и множества M_k.

Элементы плоскости T, принадлежащие к A_α; порождают подплоскость $A'_\alpha = A_\alpha \cap T$.

Подплоскость T_0 порождается подплоскостями A'_α и будет, по лемме 9, их свободным произведением. Так же, как в теореме I, докажем, что подплоскость T_k будет свободным расширением частичной плоскости, состоящей из T_{k-1} и M_k, и, значит, будет свободным произведением T_{k-1} и некоторой свободной плоскости, а потому $T = \dot{\prod\limits_\alpha} A'_\alpha * F$, где F — свободная плоскость.

Два свободных разложения плоскости назовем **изоморфными**, если множители этих разложений, не являющиеся свободными плоскостями, в точности совпадают, а свободные имеют одинаковые ранги.

ТЕОРЕМА III. *Два свободных разложения произвольной плоскости обладают изоморфными продолжениями.*

Пусть плоскость S двумя способами разложена в свободное произведение

$$S = \dot{\prod_\alpha} A_\alpha = \dot{\prod_\beta} B_\beta.$$

По теореме II,

$$A_\alpha = \dot{\prod_\beta} A_{\alpha\beta} * F_\alpha, \quad B_\beta = \dot{\prod_\alpha} B_{\beta\alpha} * F_\beta,$$

причем

$$A_{\alpha\beta} = A_\alpha \cap B_\beta = B_{\beta\alpha},$$

а все F_α и F_β свободны. Тогда

$$S = \dot{\prod_\alpha} \left(\dot{\prod_\beta} A_{\alpha\beta} * F_\alpha \right) = \dot{\prod_\beta} \left(\dot{\prod_\alpha} B_{\beta\alpha} * F_\beta \right);$$

т. е. по лемме 7 и 8,

$$S = \dot{\prod_{\alpha,\beta}} A_{\alpha\beta} * \dot{\prod_\alpha} F_\alpha = \dot{\prod_{\alpha,\beta}} B_{\beta\alpha} * \dot{\prod_\beta} F_\beta;$$

причем плоскости $\dot{\prod\limits_\alpha} F_\alpha$ и $\dot{\prod\limits_\beta} F_\beta$ свободны и, по лемме 6, имеют одинаковые ранги.

Замечание. Если рассматривать только невырожденные плоскости и только их допускать в качестве свободных множителей, теорема неверна.

Возьмем вполне свободную плоскость ранга 12 (шесть точек); она неразложима в свободное произведение невырожденных плоскостей, потому что каждый такой множитель должен быть свободной плоскостью (теорема I) ранга не меньше чем 8, а ранг свободного произведения

равен сумме рангов множителей. Однако свободное произведение двух таких плоскостей разлагается в свободное произведение трех вполне свободных плоскостей ранга 8 (четыре точки).

Следствие. *Если плоскость допускает разложение с неразложимыми множителями, то такое разложение единственно, и всякое другое разложение этой плоскости может быть продолжено до разложения с неразложимыми множителями.*

§ 3

Определение. Пусть α и K — две частичные подплоскости некоторой плоскости. Назовем K **замкнутой над α конфигурацией**, если каждому элементу из K, не принадлежащему к α, инцидентны в K по крайней мере три элемента другого рода (т. е. прямой — точки и точке — прямые).

Конфигурация, замкнутая над пустой плоскостью, будет замкнутой конфигурацией в смысле Холла. Если частичная плоскость K представляет собой замкнутую над α конфигурацию, то K будет замкнутой конфигурацией над любой частичной плоскостью, содержащей α. Если K — замкнутая конфигурация над каждой из двух частных плоскостей α и β, то K будет замкнутой конфигурацией и над их пересечением. В частности, если K — замкнутая конфигурация над α, то K будет замкнутой конфигурацией над пересечением $K \cap \alpha$, ибо K замкнуто над K. Минимальная частичная плоскость, над которой данная частичная плоскость K будет замкнутой конфигурацией, состоит из всех элементов плоскости K, инцидентных менее чем трем элементам другого рода.

ЛЕММА 10. *Если плоскость Π есть свободное расширение частичной плоскости α, а K — содержащаяся в Π конечная замкнутая над α конфигурация, то K целиком содержится в α.*

Доказательство леммы почти дословно повторяет доказательство теоремы Холла о том, что свободная плоскость не содержит конечной замкнутой конфигурации, и поэтому мы его опускаем*.

ЛЕММА 11. *Если плоскость Q отщепляется от плоскости Π свободным множителем,*

$$\Pi = Q * P,$$

то Q отщепляется свободным множителем и от любой содержащей ее подплоскости Π' плоскости Π.

Действительно, так как $Q \subset \Pi'$, то

$$Q \cap \Pi' = Q$$

и, по теореме II,

$$\Pi' = (\Pi' \cap Q) * (\Pi' \cap P) * F = Q * (\Pi' \cap P) * F.$$

---

* Заметим, кстати, что можно доказать также следующее утверждение, обобщающее соответствующую теорему Холла:

Пусть Π — невырожденная плоскость, содержащая подплоскость Π_0, причем Π получается присоединением к Π_0 конечного числа элементов. Если каждая конечная замкнутая над Π_0 конфигурация Π содержится в Π_0, то плоскость Π — свободное произведение Π_0 и некоторой свободной плоскости.

Далее, очевидна следующая

ЛЕММА 12. *Если плоскость* Π *есть объединение возрастающей последовательности плоскостей* Π_i $(i=1, 2, 3, \ldots)$, *то каждая ее подплоскость* Π' *есть объединение возрастающей последовательности своих пересечений с плоскостями* Π_i.

ЛЕММА 13. *Если плоскость конечного ранга разложена в свободное произведение, то каждый из множителей есть плоскость конечного ранга.*

Предположим сначала, что плоскость Π конечного ранга есть свободное произведение двух множителей,

$$\Pi = \Pi_1 * \Pi_2$$

и пусть Π_0 — конечная частичная плоскость, порождающая плоскость Π при свободном расширении. Каждый из элементов этой частичной плоскости строится при свободном расширении объединения $\Pi_1 + \Pi_2$ множителей из конечного числа их элементов. Пусть Π_1' и Π_2' — такие конечные частичные подплоскости плоскостей Π_1 и Π_2, что свободное расширение их объединения совпадает с Π, и пусть Π_1'' и Π_2'' — порожденные ими в Π_1 и Π_2 подплоскости. Ясно, что плоскость Π_i'' есть свободное расширение частичной плоскости Π_i' $(i=1, 2)$. Докажем, что плоскость Π_i'' совпадает с Π_i.

Пусть X — произвольный элемент плоскости Π_1. При свободном расширении частичной плоскости $\Pi_1 + \Pi_2$ X строится из конечного числа элементов частичной плоскости $\Pi_1' + \Pi_2'$. Возьмем конечную частичную плоскость α, дающую это построение. Легко видеть, что если α выбрать минимальной, это будет замкнутая над объединением $\Pi_1' + \Pi_2' + X$ конфигурация. Действительно, каждому элементу частичной плоскости α, не принадлежащему к $\Pi_1' + \Pi_2' + X$, инцидентны по крайней мере два элемента α, из которых этот элемент строится; и если только эти два, то его можно было бы выбросить, уменьшив α.

Так как $\Pi_1' + \Pi_2' + X$ содержится в $\Pi_1 + \Pi_2$, частичная плоскость α будет замкнутой и над $\Pi_1 + \Pi_2$ конфигурацией и, по лемме 10, α целиком содержится в $\Pi_1 + \Pi_2$. Но пересечение плоскостей Π_1 и Π_2 пусто, а α связана и пересекается с Π_1, так как $X \in \Pi_1$, поэтому α целиком входит в Π_1 и X строится только из элементов Π_1'. Плоскость Π_1'' совпадает, следовательно, с Π_1 и, аналогично, Π_2'' совпадает с Π_2.

Таким образом, каждая из плоскостей Π_i есть свободное расширение конечной частичной плоскости Π_i', а поэтому имеет конечный ранг.

Используя лемму 8, легко проверить наше утверждение и для любого числа множителей.

ЛЕММА 14. *Если плоскость* Π *есть свободное расширение частичной плоскости* Π_0, *то всякое расширение* Π_0 *в* Π *свободно.*

Действительно, допустим, что существует какой-нибудь другой способ построения плоскости Π из Π_0 и пусть X будет таким элементом, который сам присоединяется несвободно, но все элементы, предшествующие ему при рассматриваемом построении, присоединяются свободно. Пусть, например, X — прямая и A, B, C — предшествующие ей

точки. Эти точки получились при свободном расширении частичной плоскости Π_0 и при дальнейшем свободном расширении определяют три прямых, а не одну, что противоречит предположению.

ЛЕММА 15. *Пусть* Π — *произвольная плоскость и* Π' — *свободное произведение* Π *и свободной плоскости ранга* 6. *Существует такая собственная подплоскость* Π'' *плоскости* Π', *что* Π'' *и* Π' *изоморфны над* Π.

Пусть l — некоторая прямая плоскости Π и пусть плоскость Π' порождается частичной плоскостью, состоящей из плоскости Π и четырех точек, две из которых, N_1 и N_2, инцидентны прямой l, а две другие, N_3 и N_4, свободны.

При свободном расширении этой частичной плоскости присоединяются, в частности, прямые

$$N_1N_3;\quad N_2N_4,\quad N_3N_4,\quad N_2N_3;\quad N_1N_4;$$

точки

$$M_1 = N_1N_3 \cdot N_2N_4,$$

$$M_2 = N_3N_4 \cdot l,$$

$$P = N_1N_4 \cdot N_2N_3,$$

прямые

$$M_1M_2,\ M_2P,$$

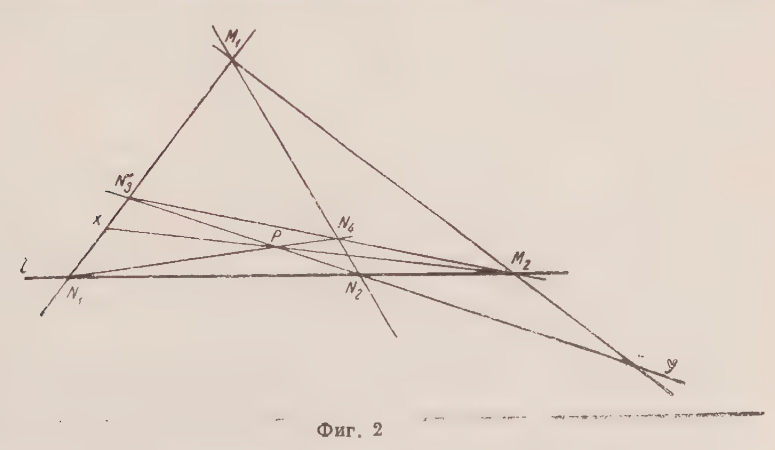
и точки

$$X = N_1N_3 \cdot M_2P;$$

$$Y = M_1M_2 \cdot N_2N_3.$$

Точки N_1, N_2, X, Y и плоскость Π порождают в Π' собственную подплоскость Π'', изоморфную с Π' над Π *.

Действительно, подплоскость Π'' есть свободное расширение частичной плоскости Π^*, состоящей из плоскости Π и точек N_1, N_2, X, Y.



Фиг. 2

Частичная плоскость, состоящая из плоскости Π и всех элементов, указанных на фиг. 2, порождает Π' при свободном расширении и со-

* Аналогичная конструкция применяется Холлом для доказательства того, что в свободной плоскости ранга $n \geqslant 4$ существует подплоскость любого конечного ранга.

держит конечную замкнутую над Π^* конфигурацию, не содержащуюся в Π^*. Поэтому, по лемме 10, плоскость Π' не может получиться при свободном расширении частичной плоскости Π^*: последняя порождает, следовательно, собственную подплоскость Π'' плоскости Π', очевидно, изоморфную ей над Π.

Обратно, плоскость Π'', порожденная частичной плоскостью, состоящей из плоскости Π и точек N_1, N_2, X, Y, вложена в изоморфную ей над Π плоскость Π', порожденную плоскостью Π и точками N_1, N_2, N_3, N_4.

Приведем пример разложимой плоскости, которая *не может быть разложена в свободное произведение неразложимых множителей.*

Пусть Q_i — плоскость, получающаяся при свободном расширении конечной связной замкнутой конфигурации K_i. Возьмем счетное множество Q_1, Q_2, Q_3, ... таких плоскостей, и пусть Π_0 — их свободное произведение. Построим цепочку вложенных друг в друга изоморфных плоскостей. Для этого определим плоскость Π_k ($k = 1, 2, \ldots$) как свободное произведение плоскости Π_0 и свободной плоскости ранга 6, причем пусть это будет свободное расширение частичной плоскости, состоящей из Π_0 и четырех точек, две из которых инцидентны прямой l_k плоскости Q_k, а две другие свободны. Выберем в Π_k новую систему образующих: будем считать, что плоскость Π_k получена свободным расширением частичной плоскости, состоящей из Π_0 и четырех точек, две из которых инцидентны прямой l_{k+1} плоскости Q_{k+1}, две другие свободны. После этого вложим плоскость Π_k и изоморфную ей над Π_0 плоскость Π_{k+1} тем способом, каким в лемме 14 плоскость Π'' вкладывалась в плоскость Π'.

Мы получаем возрастающую последовательность плоскостей. Обозначим через Π объединение этой последовательности и докажем, что плоскость Π не может быть разложена в свободное произведение неразложимых множителей.

1. *От* Π *отщепляется свободным множителем любая из плоскостей* Q_i.

Имеем

$$\Pi_{i+k} = Q_i \cdot P_i^k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где P_i^k — свободное произведение всех Q_j, кроме Q_i, и свободной плоскости ранга 6, причем плоскость P_i^k так вложена в P_i^{k+1}, что вложение Π_k в Π_{k+1} является следствием вложения P_i^k в P_i^{k+1}.

Обозначим через P_i объединение всех P_i^k. Ясно, что P_i и Q_i порождают всю плоскость Π. Действительно, если X — произвольный элемент плоскости Π, то X принадлежит некоторому Π_{i+k}, т. е. X принадлежит подплоскости, порожденной Q_i и P_i^k и, тем более, подплоскости, порожденной Q_i и P_i.

Докажем, что плоскость Π является свободным произведением плоскостей Q_i и P_i.

Если расширение объединения Q_i и P_i до Π не свободно, то, например, некоторая точка X присоединяется сразу как пересечение трех (или более) прямых. Для построения этих трех прямых потребуется

лишь конечное число элементов из P_i, которые все лежат в некотором P_i^k. Мы приходим к заключению, противоречащему, ввиду леммы 14, тому, что Q_i и P_i^k составляют свободное произведение.

2. *Если плоскость* Π *разложима в свободное произведение неразложимых множителей, то* Π_0 *отщепляется от* Π *свободным множителем.*

Пусть $\Pi = \prod_\alpha^* \Pi_\alpha$, где все плоскости Π_α неразложимы.

Плоскость Q_i порождается конечной связной замкнутой конфигурацией K_i. Последняя, по теореме Холла, входит в объединение множителей Π_α, но так как конфигурация K_i связна, она целиком содержится в некотором Π_{α_i}.

Поэтому Q_i содержится в Π_{α_i} и, согласно п. 1 и лемме 11, отщепляется от Π_{α_i} свободным множителем. Плоскость Π_{α_i}, однако, неразложима, поэтому Q_i совпадает с Π_{α_i}. Итак, все Q_i встречаются среди множителей Π_α, а поэтому их свободное произведение Π_0 выделяется, по лемме 8, свободным множителем,

$$\Pi = \Pi_0 * S.$$

3. *Если* $\Pi = \Pi_0 * S$, *то ранг плоскости* $\Pi_i \cap S$ *не больше шести.*

По теореме II,

$$\Pi_i = (\Pi_i \cap \Pi_0) * (\Pi_i \cap S) * F,,$$

где F — некоторая свободная плоскость. Однако, $\Pi_i \cap \Pi_0 = \Pi_0$; с другой стороны, $\Pi_i = \Pi_0 * F_6$, где F_6 — свободная плоскость ранга 6. Поэтому

$$\Pi_0 * (\Pi_i \cap S) * F = \Pi_0 * F_6.$$

Согласно лемме 6,

$$R((\Pi_i \cap S) * F) = 6.$$

Так как, в силу леммы 13, обе плоскости $\Pi_i \cap S$ и F конечного ранга, то применима лемма 2, и мы получаем

$$R(\Pi_i \cap S) + R(F) = 6;$$

следовательно,

$$R(\Pi_i \cap S) \leqslant 6.$$

4. *Плоскость* $\Pi_i \cap S$ *свободна.*

Так как $\Pi_i = \Pi_0 * F_6$, плоскость Π_i не содержит конечной замкнутой над Π_0 конфигурации, не входящей целиком в Π_0. Поэтому плоскость $\Pi_i \cap S$ не содержит никакой конечной замкнутой конфигурации, ибо, так как пересечение $\Pi_0 \cap S$ пусто, ввиду $\Pi = \Pi_0 * S$, а потому и пересечение $(\Pi_i \cap S) \cap \Pi_0$ пусто, каждая замкнутая конфигурация плоскости $\Pi_i \cap S$ была бы в Π_i замкнутой над Π_0 конфигурацией, не содержащей-

ся в Π_i. Кроме того, плоскость $\Pi_i \cap S$ имеет конечный ранг, т. е. порождается конечным числом образующих, а поэтому, по одной из теорем Холла, свободна.

5. *Разложение* $\Pi = \Pi_0 * S$ *невозможно.*

Действительно, согласно лемме 12, плоскость S представляет собою объединение возрастающей последовательности плоскостей $\Pi_i \cap S$, т. е., по доказанному, свободных плоскостей, ранг каждой из которых не больше 6. Все такие плоскости легко могут быть описаны; существует лишь конечное число таких плоскостей, причем все они конечны. Из этих плоскостей нельзя, следовательно, построить строго возрастающую последовательность, т. е. плоскость S будет совпадать с некоторой $\Pi_i \cap S$, а тогда плоскость Π совпадает с одной из плоскостей Π_i, что невозможно.

§ 4

Пусть $\mathfrak{M}$ — система образующих плоскости Π, т. е. такое множество элементов из Π, что наименьшая подплоскость, его содержащая, совпадает с Π. Выберем какой-нибудь способ построения Π из $\mathfrak{M}$ и назовем **допустимой подплоскостью** (**допустимой частичной подплоскостью**) такую подплоскость (частичную подплоскость), которая вместе с каждым своим элементом содержит все элементы, предшествующие ему при этом построении.

Очевидно, всякую допустимую частичную подплоскость плоскости Π, содержащую систему образующих $\mathfrak{M}$, можно расширить до Π способом, который с точностью до порядка присоединения элементов совпадает с выбранным способом построения Π (т. е. если элемент a предшествует элементу b при одном построении, то это же имеет место и при другом).

ЛЕММА 16. *Пусть* $\{\Pi_\alpha\}$ — *множество таких частичных подплоскостей плоскости* Π, *обладающей системой образующих* $\mathfrak{M}$, *что*

1° *каждая* Π_α *содержит* $\mathfrak{M}$;

2° *все* Π_α *допустимы*;

3° *плоскость* Π *есть свободное расширение любой из* Π_α.

Тогда пересечение Π^0 *всех* Π_α *также удовлетворяет условиям* 1°, 2°, 3°.

Пусть X — элемент частичной подплоскости Π^0. Тогда X принадлежит всем Π_α и, в силу условия 2°, все элементы, предшествующие X, также принадлежат всем Π_α и, значит, принадлежат Π^0, т. е. Π^0 — допустимая частичная подплоскость.

Так как Π^0 допустима и содержит $\mathfrak{M}$, она может быть расширена до Π способом, сохраняющим отношение предшествования в Π. Пусть при этом расширении (от $\mathfrak{M}$ до Π^0, а затем до Π) некоторому элементу X непосредственно предшествует более чем два элемента. Тогда при всех расширениях $\mathfrak{M}$ до Π_α, а затем до Π элементу X также непосредственно предшествует более чем два элемента, а так как расширение каждого Π_α до Π свободно (условие 3° и лемма 14), то X принадлежит каждому Π_α, а потому и Π^0, т. е. расширение Π^0 до Π свободно.

Следствие. *Если в плоскости* П *выбрана система образующих* $\mathfrak{M}$ *и выбран способ построения плоскости из нее, то существует минимальная допустимая частичная подплоскость* $П^0$, *содержащая* $\mathfrak{M}$ *и порождающая* П *при свободном расширении; это будет пересечение всех частичных подплоскостей, удовлетворяющих условиям* 1^0, 2^0 *и* 3^0 *леммы* 16.

Множество таких подплоскостей непусто, так как сама плоскость П удовлетворяет этим условиям. Назовем эту частичную подплоскость **остовом** плоскости П при рассматриваемом построении.

ЛЕММА 17. *Остов* $П^0$ *плоскости* П *с системой образующих* $\mathfrak{M}$ *есть замкнутая над* $\mathfrak{M}$ *конфигурация.*

Пусть X — элемент остова, не принадлежащий к системе образующих $\mathfrak{M}$; пусть, для определенности, X — точка. При построении плоскости точке X предшествуют по крайней мере две прямые и, так как частичная плоскость $П^0$ допустима, они обе принадлежат к $П^0$. Если бы через точку X не проходила в $П^0$ никакая третья прямая, то, выбросив X, мы получили бы меньшую частичную плоскость, попрежнему содержащую $\mathfrak{M}$, порождающую плоскость П при свободном расширении и допустимую, потому что обе проходящие через X прямые предшествуют этой точке, никакая третья прямая из $П^0$ не проходит через X; значит, X ничему в $П^0$ не предшествует и, выбросив эту точку, мы не нарушим допустимости $П^0$. Это противоречит, однако, определению остова.

ЛЕММА 18. *Если остов* $П^0$ *плоскости* П *с конечным числом образующих есть замкнутая конфигурация и если плоскость* П *является свободным расширением частичной плоскости* $П^*$, *то* $П^0$ *входит в* $П^*$.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ будут все элементы системы образующих $\mathfrak{M}$ плоскости П, остов которой $П^0$ при некотором построении П из $\mathfrak{M}$ представляет собою замкнутую конфигурацию.

Припишем ступени элементам плоскости П, рассматривая ее как свободное расширение частичной плоскости $П^*$.

Пусть M_k тот из элементов M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, который имеет при этом ступень, не меньшую, чем остальные элементы $\mathfrak{M}$.

Докажем сначала, что M_k (для определенности, точка) принадлежит $П^*$. Допустим, что это не так, и пусть M_k получается при свободном расширении $П^*$ в пересечении двух прямых. Так как остов плоскости, по условию, есть замкнутая конфигурация, то через точку M_k проходят в $П^0$ по крайней мере три прямых. Одна из этих прямых, назовем ее a, при свободном расширении $П^*$ получается, следовательно, как прямая, соединяющая точку M_k с некоторой точкой A и, значит, имеет более высокую ступень, чем точка M_k, т. е. прямая a не принадлежит к системе образующих $\mathfrak{M}$. Если на прямой a найдется точка B, отличная от точек M_k и A и предшествующая этой прямой при построении плоскости П из $\mathfrak{M}$, то B при свободном расширении $П^*$ получается в пересечении прямой a с некоторой другой прямой и, следовательно, имеет более высокую ступень, чем прямая a.

Поступая затем так, как в теореме I, мы получим последовательность элементов остова M_k, a, B, ..., ступени которых строго возрастают,

хотя каждый элемент этой последовательности предшествует предыдущему при построении П из $\mathfrak{M}$. Эта последовательность не может оборваться на конечном шаге, потому что в ней не может появиться элемент из $\mathfrak{M}$, отличный от M_k. Но это невозможно; значит, при построении П из $\mathfrak{M}$ прямой a предшествуют точки M_k и A и только они.

Все точки остова, лежащие на прямой a, кроме точек M_k и A, получаются при свободном расширении Π^* в пересечении прямой a с некоторыми другими прямыми. Нетрудно убедиться, что эти точки получаются при построении П из $\mathfrak{M}$ в пересечении именно тех прямых, что и при свободном расширении Π^*. Далее, все прямые, проходящие через эти точки (кроме тех, в пересечении которых эти точки получились), получаются при построении П из $\mathfrak{M}$ в точности так же, как и при свободном расширении Π^* и т. д.

Таким образом, все эти элементы строятся с присоединением точки M_k свободно. Выбросив их все, мы получим частичную плоскость, содержащуюся в Π^0 и тоже удовлетворяющую условиям: 1° (так как элементы $\mathfrak{M}$ не следуют за точкой M_k и, значит, не выбрасываются), 2° (так как вместе с каждым элементом выбрасываются и все те, которым этот элемент предшествует) и 3°. Полученное противоречие доказывает, что точка M_k не может получиться при свободном расширении Π^*; она принадлежит, следовательно, к Π^* и имеет ступень нуль, а тогда и все элементы системы образующих $\mathfrak{M}$ имеют ступень нуль, т. е. входят в Π^*.

Если какой-нибудь элемент X остова получается при свободном расширении частичной плоскости Π^*, то рассуждаем так же, как и выше для точки M_k. При этом последовательность элементов возрастающих ступеней, предшествующих X при построении П из $\mathfrak{M}$, должна быть бесконечной, так как все элементы системы образующих $\mathfrak{M}$ имеют, по доказанному, ступень нуль. Этим путем, как и выше, будет доказано, что из Π^0 можно выбросить элемент X и элементы, за ним следующие, не нарушая условий 1°, 2° и 3°, что, однако, противоречит определению остова.

Следствие. *Если остов* Π^0 *плоскости* П *с конечным числом образующих есть замкнутая конфигурация, то при любом свободном разложении плоскости* П *остов* Π^0 *входит в объединение свободных множителей.*

ТЕОРЕМА IV. *Плоскость, имеющая конечное число, а именно* n, *образующих, есть свободное произведение не более чем* $2n$ *неразложимых множителей, каждый из которых также будет плоскостью с конечным числом образующих, причем сумма чисел образующих всех множителей этого разложения не превосходит* $2n$.

Пусть П — плоскость с конечным числом n образующих. Покажем, что в П можно выбрать новую систему образующих, число элементов которой не превосходит $2n$, и такой способ построения плоскости П из нее, что, после того как некоторые элементы этой новой системы образующих будут выделены свободными множителями ранга 1, остов оставшейся части плоскости будет замкнутой конфигурацией, откуда, ввиду следствия из леммы 18, получаются все утверждения теоремы.

Максимальное число множителей $2n$ уменьшить нельзя: вполне свободная плоскость с n образующими есть свободное произведение $2n$ свободных плоскостей ранга 1.

Пусть $\mathfrak{M}$ — конечная состоящая из n элементов система образующих плоскости Π, Π^0 — остов при некотором построении и M — элемент системы образующих. Если $\{P_\alpha\}$ — множество допустимых частичных подплоскостей плоскости Π, не содержащих M, то их теоретико-множественное объединение также будет допустимой частичной подплоскостью, не содержащей M. Объединение всех допустимых частичных подплоскостей, не содержащих элемента M, обозначим через Π_M.

Припишем каждому элементу M системы образующих в е с, равный 1, если в остове этому элементу — точке (прямой) инцидентна прямая (точка), принадлежащая к Π_M, и вес 2 — в противном случае (в частности, вес элемента, выделенного свободным множителем, совпадает с рангом его как свободной плоскости); остальным элементам плоскости припишем вес 0. Будем обозначать через $P(M)$ вес элемента M. Сумму весов всех элементов плоскости назовем в е с о м п л о с к о с т и при данном построении.

Мы сделаем ряд замен системы образующих, причем каждый раз вес плоскости не будет увеличиваться, а тогда число элементов каждой новой системы образующих будет не более $2n$. Если в остове Π^0 плоскости имеются отдельные прямые и точки, выделим их свободными множителями ранга 2 и будем изучать оставшуюся *основную часть плоскости* с соответственно меньшим числом образующих.

Пусть мы уже сделали некоторое количество замен и получили в результате новую систему образующих $\mathfrak{M}^{(t)}$, новый способ построения плоскости из нее и, соответственно, новый остов $\Pi^{(t)}$. Если среди элементов $\mathfrak{M}^{(t)}$ есть точка (прямая), которой в $\Pi^{(t)}$ инцидентно не более двух прямых (точек), продолжаем замены.

Рассмотрим отдельно каждый из возможных случаев.

1. Пусть M — точка, через которую в остове проходит лишь одна прямая l *.

11. $P(M) = 1$. В этом случае прямая l принадлежит к Π_M** и точка M при рассматриваемом построении плоскости кладется на прямую l. Снимем точку M свободным множителем ранга 1. В оставшейся теперь основной части плоскости способ построения прежний. Возьмем ее остов. При этом веса элементов не меняются. Действительно, пусть, например, прямой a, принадлежащей к системе образующих, инцидентна точка N частичной подплоскости Π_a; при переходе к новому остову эта точка не будет выброшена, так как она предшествует прямой a, которая не выбрасывается. Значит, веса элементов не увеличиваются, но они, очевидно, и не уменьшаются. Заметим, что вес основной части плоскости уменьшился.

---

* Рассуждение ведется только для точек, для прямых — двойственно.

** Говоря о Π_M, мы всегда имеем в виду определение этой частичной подплоскости по отношению к рассматриваемой в данный момент системе образующих.

12. $P(M)=2$. Прямая l в этом случае не принадлежит к Π_M; она строится в Π с использованием точки M: проводится через точку M и некоторое (пустое или нет) множество точек $A_1, A_2, \ldots$, принадлежащих к Π_M.

Возможны 3 случая:

121. Число точек A_i *больше единицы.*

Изменим немного способ построения плоскости: будем считать, что прямая l проводится только через точки A_i, а точка M кладется на нее потом. Остов плоскости, очевидно, не меняется, но точка M получает вес 1 (веса остальных элементов прежние), поэтому этот случай сведен к 11. Вес плоскости уменьшился.

122. Число точек A_i *равно единице.*

Прямая l проводится при построении плоскости через точку M и некоторую точку A, принадлежащую к Π_M. Заменим точку M, как элемент системы образующих, двумя: прямой l и точкой M. Способ построения: прямая l проводится лишь через точку A (принадлежащую к Π_l), а точка M кладется на нее потом; остальные элементы присоединяются попрежнему. Остов, очевидно, не меняется. Вес точки M теперь равен 1, т. е. этот случай также сведен к 11. При этом прямая l получает вес 1, но вес плоскости не изменился.

123. Число точек A_i *равно нулю.*

Прямая l проводится только через точку M; она принадлежит в этом случае к системе образующих и сама имеет вес 1. Изменим способ построения плоскости: будем считать, что сначала присоединяется прямая l, а на нее кладется потом точка M. Остов прежний. Прямая l принадлежит теперь к Π_M, и элементы M и l поменялись весами; теперь $P(M)=1$, $P(l)=2$. Таким образом, этот случай также сведен к 11. Вес плоскости не изменился.

2. Пусть M — точка, через которую в остове проходят две прямых l_1 и l_2.

21. $P(M)=1$. Одна из прямых l_1, l_2, скажем, прямая l_1, принадлежит к Π_M, другая — прямая l_2 не принадлежит к Π_M, т. е. строится в Π с использованием точки M: проводится через M и некоторое (пустое или нет) множество точек $A_1, A_2, \ldots$, принадлежащих к Π_M.

Возможны 3 случая:

211. Число точек A_i *больше единицы.*

Будем считать, что прямая l_2 проводится только через точки $A_1, A_2, \ldots$, а точка M получается в пересечении прямых l_1 и l_2. При этом точка M получает вес 0, и вес плоскости уменьшился.

212. Число точек A_i *равно единице.*

Прямая l_2 проводится через точку M и некоторую точку A, принадлежащую к Π_M. Заменим точку M, как элемент системы образующих, прямой l_2. Новый способ построения: прямая l_2 проводится только через точку A, точка M получается в пересечении прямых l_1 и l_2, остальные элементы присоединяются попрежнему. Теперь $P(M)=0$, $P(l_2)=1$, и вес плоскости не изменился.

213. Число точек A_i *равно нулю.*

Прямая l_2 проводится только через точку M; она принадлежит в этом случае к системе образующих и имеет вес 1. Изменим способ

построения: будем считать, что сначала присоединяется прямая l_2, а точка M получается в пересечении прямых l_1 и l_2; остальные элементы строятся попрежнему. Теперь $P(M)=0$, $P(l_2)=2$, и вес плоскости не изменился.

22. $P(M)=2$. Через точку M проходят в остове две прямых l_1 и l_2, ни одна из которых не принадлежит к Π_M. При построении плоскости одна из этих прямых, скажем, прямая l_1, проводится через точку M и некоторое (пустое или нет) множество точек $A_1, A_2, \ldots$, принадлежащих к Π_M, другая — прямая l_2, — через точку M и некоторое (пустое или нет) множество точек $B_1, B_2, \ldots$ (быть может, и не принадлежащих к Π_M).

Возможны случаи:

221. Число точек A_i *больше единицы.*

Будем считать, что прямая l_1 проводится через точки A_1; $A_2, \ldots$, а точка M кладется на нее потом. Точка M получает вес 1, так что этот случай сведен к 21; при этом вес плоскости уменьшился.

222. Число точек A_i *равно единице.*

Прямая l_1 проводится через точку M и точку A, принадлежащую к Π_M.

2221. Число точек B_i *больше единицы.*

Заменим точку M прямой l_1, проводимой через точку A, и будем считать, что прямая l_2 проводится через точки $B_1, B_2, \ldots$, а точка M получается в пересечении прямых l_1 и l_2. Теперь $P(M)=0$, $P(l_1)=1$, $P(l_2)=0$ и вес плоскости уменьшился.

2222. Число точек B_i *равно единице.*

Прямая l_2 проводится через точку M и некоторую точку B. Заменим точку M, как элемент системы образующих, двумя элементами — прямыми l_1 и l_2, проводимыми через точки A и B соответственно. Точка B принадлежит к Π_{l_2}; $P(l_1)=1$, $P(l_2)=1$; точка M получается в пересечении прямых l_1 и l_2; $P(M)=0$, и вес плоскости не изменился.

223. Хотя бы одно из множеств $\{A_i\}$, $\{B_i\}$ *пусто.*

Соответствующая прямая, например, l_1 проводится тогда только через точку M и имеет вес 1. Изменим способ построения: будем считать, что сначала присоединяется эта прямая, а точка M кладется на нее потом; остальные элементы присоединяются попрежнему. Теперь $P(l_1)=2$, $P(M)=1$, и этот случай сведен к 21. Вес плоскости не изменился.

Такие замены возможны, пока остов основной части плоскости не станет замкнутой конфигурацией. Нам достаточно доказать, что замен может быть лишь конечное число.

Допустим, что множество замен бесконечно. Тогда, производя замены одну за другой, мы получим счетное множество замен, упорядоченное по типу натурального ряда. В дальнейшем рассматриваются замены только из этого множества.

При каждой замене типа 1 вес основной части плоскости уменьшается; в случаях 211, 221 и 2221 уменьшается вес самой плоскости, поэтому замен этих типов может быть лишь конечное число, и после достаточно большого числа шагов такие замены прекратятся.

Пусть $M_1^{(k)}$, $M_2^{(k)}$, ..., $M_{r_k}^{(k)}$, $r_k \leqslant 2n$, будут все элементы системы образующих $\mathfrak{M}^{(k)}$, полученной после k замен, и $\Pi^{(k)}$ — соответствущий остов. Предположим k столь большим, чтобы замены типов 1, 211, 221 и 2221 в дальнейшем не появлялись.

Пусть $\mathfrak{N}^{(k)}$ — подмножество $\mathfrak{M}^{(k)}$, состоящее из элементов; которые в дальнейших заменах не участвуют (не заменяются и ничего не заменяют).

Очевидно,

$$\mathfrak{N}^{(k)} \subseteq \mathfrak{N}^{(k+1)} \subseteq \mathfrak{N}^{(k+2)} \subseteq \dots$$

Но каждое из множеств $\mathfrak{N}^{(i)}$ состоит не более чем из $2n$ элементов; поэтому, начиная с некоторого номера p, цепочка стабилизируется:

$$\mathfrak{N}^{(p)} = \mathfrak{N}^{(p+1)} = \mathfrak{N}^{(p+2)} = \dots$$

Пусть для этого p

$$M_1^{(p)},\ M_2^{(p)},\ \dots,\ M_{r_p}^{(p)}, \quad r_p \leqslant 2n,$$

будут все элементы системы образующих $\mathfrak{M}^{(p)}$ и $\Pi^{(p)}$ — соответствующий остов. Пусть $M_1^{(p)}$, $M_2^{(p)}$, ..., $M_s^{(p)}$, $0 \leqslant s \leqslant r_p$ — все элементы из $\mathfrak{N}^{(p)}$. Обозначим через Π_p^* максимальную допустимую (при построении из $\mathfrak{M}^{(p)}$) частичную подплоскость плоскости Π, не содержащую элементов $M_{s+1}^{(p)}$, ..., $M_{r_p}^{(p)}$ (это будет теоретико-множественное объединение всех допустимых частичных плоскостей, не содержащих элементов $M_{s+1}^{(p)}$, ..., $M_{r_p}^{(p)}$).

Докажем, что каждый элемент остова $\Pi^{(p)}$, которым в дальнейшем заменяется некоторый другой элемент, присоединяется при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$ (т. е. от $\mathfrak{M}^{(p)}$ до $\Pi^{(p)}$, а затем до Π) свободно.

В самом деле, элемент, который на $(q+1)$-ом шаге, $q > p$, заменяет некоторый другой элемент, либо принадлежит к $\mathfrak{M}^{(q)}$ (в заменах типов 213 и 223), либо присоединяется при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(q)}$ свободно. (В заменах типов 212, 2222 и 223). Во втором случае можно утверждать, что этот элемент присоединяется свободно и при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$. Действительно, хотя при заменах способ построения меняется, но каждый раз изменение состоит лишь в том, что между заменяемым и заменяющим элементами отношение предшествования меняется на обратное. Значит, каждый раз только два или три элемента строятся по-новому; причем один из них (тот, который заменяют) выбрасывается тут же при переходе к остову, а один или два других (те, которыми заменяют) становятся элементами системы образующих и когда перестают ими быть, тоже выбрасываются. Поэтому все элементы $\Pi^{(q)}$, не принадлежащие к $\mathfrak{M}^{(q)}$, строятся при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(q)}$ так же, как и при построении из $\mathfrak{M}^{(p)}$. В частности, тот элемент, который не принадлежит к $\mathfrak{M}^{(q)}$ и заменяет на $(q+1)$-ом шаге некоторый другой элемент, присоединяется при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$ свободно.

В том случае, когда элемент, который на $(q+1)$-ом шаге, $q>p$, заменяет некоторый другой элемент, принадлежит к $\mathfrak{M}^{(q)}$, но не принадлежит к $\mathfrak{M}^{(p)}$, то он уже раньше, на $(r+1)$-ом шаге, $p<r<q$, заменяет некоторый элемент, не принадлежа к $\mathfrak{M}^{(r)}$; значит, по доказанному, присоединяется при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$ свободно.

Докажем теперь, что каждый элемент остова $\Pi^{(p)}$, не принадлежащий к $\Pi_p^* + \mathfrak{M}^{(p)}$, присоединяется при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$ свободно.

Введем ступени элементов частичной плоскости $\Pi^{(p)}$, считаясь с порядком присоединения их при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$; элементу системы образующих, который при этом построении считается инцидентным элементу n-ой ступени, припишем ступень $n+1$.

Заметим, во-первых, следующее: если элемент M системы образующих заменяется новым, вес его становится равным нулю. Поэтому, так как при заменах рассматриваемых типов вес плоскости не меняется, вес элемента, *которым заменяют*, необходимо увеличивается. Отсюда, в частности, следует, что каждый элемент может заменять не более двух раз.

Каждый элемент нулевой ступени, не принадлежащий к Π_p^*, имеет вес 2, поэтому заменять он ничего не может и, значит, будет, наконец, заменен. Допустим, что каждый элемент остова $\Pi^{(p)}$, не принадлежащий к Π_p^* и имеющий ступень меньше n, либо будет выброшен при переходе к остову, либо станет, наконец, элементом системы образующих и в дальнейшем сам будет заменен, и докажем, что это же верно и для элементов n-ой ступени. Отсюда и будет следовать, что каждый элемент остова $\Pi^{(p)}$, не принадлежащий к $\Pi_p^* + \mathfrak{M}^{(p)}$, присоединяется при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$ свободно. Действительно, элемент, который на некотором шаге становится элементом системы образующих, по доказанному, присоединяется при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$ свободно; элемент, который выбрасывается после $q+1$ замен просто при переходе к новому остову (т. е. если он не принадлежит к $\mathfrak{M}^{(q)}$), строится свободно при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(q)}$ и, следовательно (см. выше), и при построении из $\mathfrak{M}^{(p)}$ *.

Докажем сначала первое утверждение: каждый элемент n-ой ступени, не принадлежащий к $\Pi_p^* + \mathfrak{M}^{(p)}$ и не выбрасываемый при переходе к остову, станет, наконец, элементом системы образующих.

Пусть l — произвольная прямая n-ой ступени, не принадлежащая к $\Pi_p^* + \mathfrak{M}^{(p)}$. Среди инцидентных l точек ступени меньше n есть непустое множество U точек, не принадлежащих к Π_p^*. Ни одна из этих точек не будет выброшена просто при переходе к новому остову. Действительно, при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$ все эти точки предшествуют прямой l. Отношение предшествования прямой и точки не может измениться, пока один из этих элементов не заменится другим. Значит, каждая из точек множества U, пока она не заменяется (и притом

* Из формулированного утверждения будет следовать, очевидно, и то, что каждый элемент множества $\mathfrak{M}^{(p)}$ принадлежит к Π_p^*.

именно прямой l), предшествует прямой l и поэтому не может быть выброшена просто при переходе к остову. По индуктивному предположению, каждая из точек множества U станет, наконец, элементом системы образующих и в дальнейшем сама будет заменена. Пусть N — какая-нибудь из них; прямая l — одна из двух прямых, проходящих через точку N перед заменой, и притом точка N предшествует прямой l при построении Π из $\mathfrak{M}^{(s)}$, если N заменяется на $(s+1)$-ом шаге. Значит, *прямая l заменяет точку N*, т. е. становится, наконец, элементом системы образующих.

Теперь остается доказать, что каждый элемент n-ой ступени, не принадлежащий к Π_p^* и не выбрасываемый при переходе к остову, — как тот, который становится на некотором шаге элементом системы образующих, так и тот, который принадлежит к $\mathfrak{M}^{(p)}$, сам будет в дальнейшем заменен.

Пусть сначала l будет прямая n-ой ступени, не принадлежащая к $\Pi_p^* + \mathfrak{M}^{(p)}$ и не выбрасываемая при переходе к остову. По доказанному, она заменит, наконец, некоторую точку N. Если бы эта прямая в дальнейшем не была заменена, она еще не более одного раза могла бы заменять (см. замечание выше) и в дальнейших заменах не участвовала бы. Но тогда она принадлежала бы при достаточно большом s к $\mathfrak{N}^{(p+s)}$ и, значит, к $\mathfrak{N}^{(p)}$, чего не может быть, так как эта прямая заменяет точку N.

Пусть теперь прямая l n-ой ступени, $n > 0$, принадлежит к $\mathfrak{M}^{(p)}$. Тогда прямой l инцидентна одна и только одна точка A ступени меньше n (это будет точка ступени $n-1$)

Случай 1. Точка A не принадлежит к Π_p^*. В этом случае доказательство аналогично приведенному выше (прямая l заменит точку A).

Случай 2. Точка A принадлежит к Π_p^*. Достаточно доказать, что прямая l ничего в дальнейшем не заменяет; ибо отсюда, так как l не принадлежит к Π_p^*, следует, что она сама будет заменена.

Прямая l могла бы заменять лишь инцидентную ей точку меньшей ступени. Действительно, если прямая l на $(s+1)$-ом шаге заменяет инцидентную ей точку N ступени большей, чем ступень l, необходимо, чтобы точка N предшествовала прямой l при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(s)}$, т. е. чтобы до замены отношение предшествования прямой l и точки N изменилось на обратное; однако при таком изменении один из элементов (в данном случае прямая l) выбрасывается. Единственная инцидентная прямой l точка A меньшей чем l ступени принадлежит к Π_p^*. Допустим, что прямая l заменит точку A. Тогда A не может принадлежать к $\mathfrak{M}^{(p)}$ и, значит, становится элементом системы образующих на некотором шаге, заменяя собой некоторую прямую, по доказанному, имеющую меньшую ступень, чем точка A. Но ввиду допустимости частичной подплоскости Π_p^*, эта прямая тоже принадлежит к Π_p^* и к ней применимо то же рассуждение. Получаем бесконечную последовательность элементов строго убывающих ступеней, что невозможно.

Таким образом, индукция полностью проведена; мы доказали, что каждый элемент остова $\Pi^{(p)}$, не принадлежащий к $\Pi_p^* + \mathfrak{M}^{(p)}$, присоединяется при построении плоскости из $\mathfrak{M}^{(p)}$ свободно.

Из доказанного следует, что наша плоскость строится из $\mathfrak{M}^{(p)}$ следующим образом: к частичной плоскости Π_p^* присоединяются не принадлежащие к ней элементы нулевой ступени системы образующих $\mathfrak{M}^{(p)}$ и берется свободное расширение; на прямые полученной плоскости кладутся не принадлежащие ей точки $\mathfrak{M}^{(p)}$ первой ступени (и двойственно) и берется свободное расширение и т. д. Но так как $\Pi^{(p)}$ — остов и система образующих $\mathfrak{M}^{(p)}$ конечна, частичная плоскость $\Pi^{(p)} - \Pi^{(p)} \cap \Pi_p^*$ будет конечной, а так как при каждой замене выбрасывается хотя бы один элемент этой частичной плоскости, множество замен не может быть бесконечным.

Следствие. *Неразложимая плоскость с конечным числом образующих есть либо свободная плоскость ранга* 1, *либо в этой плоскости однозначно выделяется минимальная связная замкнутая конфигурация, порождающая эту плоскость при свободном расширении.*

§ 5

Определение. Локально свободной плоскостью называется плоскость, каждая подплоскость которой, порожденная конечным числом образующих, свободна.

К локально свободным принадлежат, ввиду теоремы I, все свободные плоскости. Существуют, однако, плоскости, локально свободные, но не свободные, как показывает следующий

Пример. Для каждого i ($i = 1, 2, \ldots$) вложим вполне свободную плоскость Π_i ранга 8 в изоморфную ей плоскость Π_{i+1} (например, так, как в лемме 15 плоскость, порожденная точками N_1, N_2, X, Y, вложена в плоскость, порожденную точками N_1, N_2, N_3, N_4); получим возрастающую последовательность плоскостей:

$$\Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \Pi_3 \subset \ldots,$$

объединение которых обозначим через Π. Легко видеть, что Π *локально свободна.*

Докажем, что Π *не есть свободная плоскость.* В самом деле, если плоскость свободна, она, во всяком случае, разложима в свободное произведение.

Допустим,

$$\Pi = P \circ Q.$$

По теореме II,

$$\Pi_i = (\Pi_i \cap P) \circ (\Pi_i \cap Q) \circ F.$$

Но $R(\Pi_i) = 8$; значит, по лемме 13, плоскости $\Pi_i \cap P$, $\Pi_i \cap Q$ и F конечного ранга и, по лемме 2,

$$R(\Pi_i \cap P) + R(\Pi_i \cap Q) + R(F) = 8.$$

Согласно лемме 12, плоскость P есть объединение возрастающей последовательности плоскостей $\Pi_i \cap P$ (а плоскость Q — объединение

плоскостей $\Pi_i \cap Q$); поэтому, начиная с некоторого i, пересечение $\Pi_i \cap P$ непусто. По теореме I, плоскости $\Pi_i \cap P$ и $\Pi_i \cap Q$ свободны; поэтому $R(\Pi_i \cap P) > 0$ и, следовательно,

$$R(\Pi_i \cap Q) \leqslant 7.$$

Аналогично, начиная с некоторого k, $R(\Pi_k \cap Q) > 0$; поэтому $R(\Pi_k \cap P) \leqslant 7$.

Итак, каждая из плоскостей P, Q есть объединение возрастающей последовательности свободных плоскостей ранга не более семи. Все такие плоскости легко могут быть описаны. Существует лишь конечное число таких плоскостей, причем все они конечны. Из этих плоскостей нельзя, следовательно, построить строго возрастающую последовательность, т. е. плоскость P будет совпадать с некоторой $\Pi_i \cap P$, плоскость Q — с некоторой $\Pi_j \cap Q$; но тогда плоскость Π имеет конечное число образующих и, следовательно, совпадает с одной из плоскостей Π_i, вопреки предположению.

Леммы § 4 допускают некоторое обобщение. Доказательство формулируемых ниже лемм 16*, 17*, 18*, 20 аналогично доказательству соответствующих предложений предыдущего параграфа.

ЛЕММА 16*. *Пусть $\{\Pi_\alpha\}$ будет множество таких частичных подплоскостей плоскости Π, обладающей системой образующих $\mathfrak{M}$, что:*

1° *каждая Π_α содержит $\mathfrak{M}$ и некоторую фиксированную частичную подплоскость $\mathfrak{N}$ плоскости Π;*

2° *все Π_α допустимы (при выбранном построении Π из $\mathfrak{M}$);*

3° *плоскость Π есть свободное расширение любой из Π_α.*

Тогда пересечение Π^0 всех Π_α также удовлетворяет условиям 1°, 2° и 3°.

Следствие. *Если в плоскости Π выбрана некоторая система образующих $\mathfrak{M}$, выбран способ построения плоскости Π из $\mathfrak{M}$ и отмечена некоторая частичная подплоскость $\mathfrak{N}$, то существует в Π минимальная допустимая частичная подплоскость Π^0, содержащая $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ и порождающая плоскость Π при свободном расширении.* Назовем ее остовом с отмеченной частичной подплоскостью $\mathfrak{N}$.

ЛЕММА 17*. *Остов с отмеченной частичной подплоскостью $\mathfrak{N}$ плоскости Π, обладающей системой образующих $\mathfrak{M}$, есть замкнутая над объединением $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ конфигурация.*

ЛЕММА 18*. *Пусть Π — плоскость с конечным числом образующих и Π^0 — остов с отмеченной частичной подплоскостью $\mathfrak{N}$, причем Π^0 — замкнутая над $\mathfrak{N}$ конфигурация. Если Π содержится в некоторой плоскости Π^*, являющейся свободным расширением частичной плоскости $\mathfrak{N}^*$, содержащей $\mathfrak{N}$, то Π^0 целиком содержится в $\mathfrak{N}^*$.*

ЛЕММА 20. *Если плоскость Π обладает конечной системой образующих $\mathfrak{M}$, состоящей из n элементов, и $\mathfrak{N}$ — некоторая частичная подплоскость Π, то в Π можно выбрать такую новую систему образующих, состоящую не более чем из $2n$ элементов, и такой способ построения плоскости из нее, что остов с отмеченной частичной подплоскостью $\mathfrak{N}$ будет замкнутой над $\mathfrak{N}$ конфигурацией.*

Пользуясь формулированными леммами, дадим, например, новое доказательство того, что построенная выше локально свободная плоскость Π не свободна.

В самом деле, пусть Π — свободная плоскость; тогда она будет непременно счетного ранга и; значит, Π вполне свободна. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — свободные образующие плоскости Π. Обозначим через $\mathfrak{N}^*$ частичную подплоскость Π, являющуюся их объединением. Возьмем число k столь большим, чтобы плоскость Π_k содержала более восьми элементов частичной плоскости $\mathfrak{N}^*$, и обозначим через $\mathfrak{N}$ частичную плоскость $\Pi_k \cap \mathfrak{N}^*$. Плоскость Π_k обладает системой образующих, состоящей из четырех элементов. По лемме 20, в Π_k можно взять такую новую систему образующих, состоящую не более чем из восьми элементов, чтобы остов с отмеченной частичной подплоскостью $\mathfrak{N}$ был замкнутой над $\mathfrak{N}$ конфигурацией. Но так как Π_k содержится в плоскости Π, являющейся свободным расширением частичной плоскости $\mathfrak{N}^*$, по лемме 18*, этот остов целиком содержится в $\mathfrak{N}^*$ и, следовательно, в $\mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{N}$ состоит более чем из восьми элементов, новая система образующих плоскости Π_k составляет собственное подмножество $\mathfrak{N}$ и, следовательно, порождает лишь собственную подплоскость плоскости Π_k (напоминаем, что Π — вполне свободная плоскость с образующими $X_1, X_2, \ldots$), что невозможно.

Поступило
13.VI. 1945

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hall M., Projective planes, Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943), 229 — 277.

[2] Schreier O., Die Untergruppen der freien Gruppen, Hamb. Abh., 5 (1927), 161 — 183.

[3] Курош А. Г., Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen, Math. Ann., 109 (1934), 647 — 660.

[4] Грушко И. А., О базисах свободного произведения групп, Мат. сб., 8 (1940), 169 — 182.

[5] Neumann B. H., On the number of generators of a free product, Journ. Lond. Math. Soc., 18 (1943), 12 — 20.

L. KOPEIKINA. DECOMPOSITIONS OF PROJECTIVE PLANES

SUMMARY

In this paper we construct the theory of free projective planes and free decompositions of projective planes which follows the corresponding sections of the theory of groups. Such investigations were initiated by Hall who defined a *projective plane*, *a partial plane*, *a degenerate plane*, *a confined configuration*, *a free extension* of partial planes, a *subplane* and a *free plane* in his paper ([1]). We shall not, however, suppose the confined configurations to be necessarily finite.

Definition. The free product of a set of planes $\{A_\alpha\}$ is the free extension S of the partial plane which is the set-theoretical sum of all the A_α: $S = \overset{*}{\prod_\alpha} A_\alpha$.

It would be most natural to mean by a free plane the free extension of a partial plane consisting of some lines and points without any incidences — the free product of these lines and points. Such a plane will be called completely free. A subplane of a completely free plane may be not completely free.

If plane is the free extension of a finite partial plane consisting of P points and L lines with I incidences, then the number $2(P+L)-I$ is called the rank of the plane.

The rank of a point (a line) considered as a plane is 2. Addition of a single point to a partial plane is equivalent to addition of two points incident with a line belonging to this partial plane, that is, both partial planes are free equivalent. Suppose that we have a plane Π of rank R. Let us add a point incident with a line of Π to Π and consider the free extension Π' of the partial plane so obtained. The plane Π' has the rank $R+1$. Since the rank of a free product is equal to the sum of the ranks of the factors we shall call Π' the free product of the plane Π and the free plane of rank 1; this is a plane for which $P=1$, $L=0$, $I=1$ (or $P=0$, $L=1$, $I=1$), that is a point (or a line) incident with something. Such a plane has itself no sense, but may be considered as a free factor. All non-degenerate planes which are free extensions of partial planes obtained by adding to Π a point (a line) incident with a line (a point) of Π are mutually isomorphic (Lemma 3). The free product of a plane by a set $\mathfrak{M}$ of free planes of rank 1 is completely determined by the cardinal number of $\mathfrak{M}$ (Lemma 4).

It is now clear that a completely free plane is no analogue of a free group, because the points and the lines are no «atoms» of which every plane can be built up, but are «diatomic moleculae» — free products of pairs of free planes of rank 1. Therefore by a free plane we mean the free product of a set of free planes of rank 1. In non-degenerate cases this definition coincides with that due to Hall; we consider, moreover, every degenerate plane as a free plane.

By a plane non-decomposable into a free product we shall understand the plane, from which no factor, even one of rank 1, can be chipped

off. The Desarguesian plane is non-decomposable; such is also the plane which is the free extension of a finite connected confined configuration.

In § 2 we prove the theorem analogous to Nielsen — Schreier's theorem (2) in the theory of groups:

THEOREM I. *A subplane of a free plane is free.*

A particular case of the theorem — when the subplane possesses a finite number of generators — was proved by Hall. Then Theorems II and III (of type of Kurosh's theorems) follow:

THEOREM II. *Suppose* $S=\overset{*}{\prod_{\alpha}} A_\alpha$. *Then every subplane* $T \subset S$ *is the free product of the planes* $A'_\alpha = A_\alpha \cap T$ *by a free plane* F:

$$T=\overset{*}{\prod_{\alpha}}{}' A'_\alpha * F.$$

Hence follows

THEOREM III. *Any two free decompositions of an arbitrary plane possess the extensions such that their factors, which are no free planes, coincide, while the free factors are of the same rank.*

Notice that this theorem would not be true if only non-degenerate planes were admitted as free factors.

Consequently, *if a plane admits a decomposition with non-decomposable factors, then such a decomposition is unique.*

In § 3 we give an example of a *plane which cannot be decomposed into a free product of non-decomposable factors.*

Let us outline briefly the construction of the example: Let Q_i be the plane obtained as the free extension of a finite connected confined configuration K_i $(i=1, 2, \ldots)$. Denote by Π_0 the free product of all the Q_i, $\Pi_0=\overset{*}{\prod_{i}} Q_i$. Let Π_k $(k=1, 2, \ldots)$ denote the free product of the plane Π_0 and a free plane of rank 6. Let us imbed (for every k) the plane Π_k in the isomorphic plane Π_{k+1}. We obtain an ascending chain of planes, the set-theoretical sum of which is a plane with the required property.

In § 4 the *planes with a finite number of generators* are investigated. A plane is considered together with a definite way in which the plane is constructed by its generators. A subplane is called admissible if it contains, together with an arbitrary element, all the elements which precede the given element in the construction. If a system of admissible partial subplanes is given, everyone of which contains the system of generators and, being extended, generates the whole plane, the intersection of all such partial subplanes possesses the same properties (Lemma 16). Therefore in every plane there is a minimal admissible partial subplane which, being freely extended, generates the plane itself — the framework of the plane. If the framework of a plane with a finite number of generators is a confined configuration, then the framework is contained in every partial plane which, being extended, generates the plane itself (Lemma 18), in particular, in the sum of the factors of every decomposition.

In the case of a plane with n generators it is possible in a finite number of steps, to replace the given system of generators by a new system of not more than $2n$ generators in such a way that, when some of the new generators are considered as free factors of rank 1, the framework of the remaining part of the plane becomes a confined configuration.

Hence follows theorem IV of type of Grushko's theorem (4) (see also Neumann (5)):

THEOREM IV. *A plane with n generators is the free product of no more than 2n non-decomposable factors, everyone of which is a plane with a finite number of generators; the total sum of the latters does not exceed 2n.*

Notice that the value $2n$ is essential: a point is the free product of two factors of rank 1. A non-decomposable plane with a finite number of generators either is a free plane of rank 1 or a minimal connected confined configuration can be uniquely determined in this plane which, being freely extended, generates the whole plane. Thus a complete description of planes with a finite number of generators is given.

In § 5 a l o c a l l y f r e e p l a n e is defined as a plane every subplane of which having a finite number of generators is free. An example is given which shows that locally free planes may, sometimes, be not free.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 9 (1945), 527–530 Série mathématique

М. П. ЩЕГЛОВ

О СХОДИМОСТИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ РЯДА ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В статье устанавливается критерий сходимости (к нулю) и ограниченности ряда Дирихле при некоторых условиях.

Мы будем рассматривать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t} \tag{1}$$

в действительной области, где $t > 0$, при условиях:

(a) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$,

(b) $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = O(1)$, $n \to \infty$.

Относительно ряда (1) получены следующие результаты:

ТЕОРЕМА 1. *Дано:*

1° $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}$, *ряд сходится при* $t > 0$ *при условиях* (a) *и* (b);

2° $f(t_m) = oO(1)$, $t_m \to 0$ *по последовательности* $\{t_m\}$ *такой, что*

2° a $\frac{t_m - t_{m+1}}{t_{m+1}} = oO(1)$, $t_1 > t_2 > \ldots > t_m > t_{m+1} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$;

3° $a_n < oO\left(\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}\right)$.

При этих условиях имеет место соотношение

(A) $f(t) = oO(1)$, $t \to 0$.

Символ oO обозначает одну из двух возможных комбинаций знаков o и O с учетом вариантов:

(W) $\begin{cases} \text{(a) всюду } O, \\ \text{(b) } 2^\circ = o,\ 2^\circ\text{a} = O,\ 3^\circ < o,\ A = o, \\ \text{(c) } 2^\circ = o,\ 2^\circ\text{a} = o,\ 3^\circ < O,\ A = o. \end{cases}$

В основу доказательства теоремы положена «комплексная»

ЛЕММА. *Пусть функция* $g(t)$, *где* $t > 0$, *обладает следующими свойствами:*

1° $g'(t)$, $g''(t)$, *где* $t > 0$, *существуют,*

2° $g(t_m) = oO(1)$, $t_m \to 0$ *по последовательности* $\{t_m\}$ *такой, что*

2°a $\frac{t_m - t_{m+1}}{t_{m+1}} = oO(1)$,

3° $t^2 g''(t) < oO(1)$, $t \to 0$.

При этих данных

(A) $t_m g'(t_m) = oO(1)$, $t_m \to 0$.

Варианты (W).

Эта лемма по существу представляет собою объединение ранее доказанных нами лемм (1) (2).

Доказательство теоремы. Прежде всего докажем, что

$$t^2 f''(t) < oO(1), \quad t \to 0; \tag{1}$$

где oO в (1) имеет тот же смысл, как в 3°, т. е. $o \leftrightarrow o$, $O \leftrightarrow O$.

Доказательство для o. Возьмем числа δ и ε_n такие, что

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \geqslant \delta > 0, \quad \delta = \text{const}; \tag{2}$$

$$a_n < \varepsilon_n \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n}, \quad 0 < \varepsilon_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3}$$

Имеем

$$e^{-\lambda_n t} \leqslant e^{-\delta \lambda_u t}, \quad \text{при } t > 0, \tag{4}$$

где

$$\lambda_n \leqslant \lambda_u \leqslant \lambda_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

λ_u — линейная функция, проходящая через точки (n, λ_n), $(n+1, \lambda_{n+1})$.

Оценим $f''(t)$:

$$f''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 a_n e^{-\lambda_n t} < \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \lambda_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{-\lambda_n t} +$$

$$+ \max_{n > N} \varepsilon_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \lambda'_u \lambda_u e^{-\delta \lambda_n t} \, du =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} + \max_{n > N} \varepsilon_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2} \int_{\delta \lambda_n}^{\delta \lambda_{n+1}} z e^{-zt} \, dz \leqslant \sum_{n=1}^{N} + \frac{\max_{n > N} \varepsilon_n}{\delta^2 t^2}, \tag{5}$$

где N — некоторое фиксированное число. Отсюда получаем

$$t^2 f''(t) < o(1), \quad t \to 0. \tag{6}$$

Для O доказательство аналогичное.

Применяя лемму, получаем

$$t_m f'(t_m) = oO(1), \quad t_m \to 0. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию:

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\varepsilon_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) - \lambda_n a_n] e^{-\lambda_n t}, \tag{8}$$

где $\varepsilon_n = oO(1)$, и выбираем с таким расчетом, чтобы выражение, стоящее в квадратных скобках, было положительным.

Из (8), пользуясь соотношением

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) t e^{-\lambda_n t} = oO(1), \tag{9}$$

получаем

$$t\varphi(t) = tf'(t) + oO(1), \quad t \to 0. \tag{10}$$

Отсюда, пользуясь (7) и соотношением

$$\frac{t_{m+1}}{t_m} \cdot t_m \varphi(t_m) \leqslant t\varphi(t) \leqslant \frac{t_m}{t_{m+1}} \cdot t_{m+1}\varphi(t_{m+1}), \tag{11}$$

где $t_{m+1} < t < t_m$, найдем

$$tf'(t) = oO(1), \quad t \to 0. \tag{12}$$

Теперь применяем формулу Лагранжа:

$$f(t) = f(t_m) + (t - t_m) f'(\xi) \quad (t_{m+1} < t < \xi \leqslant t_m) \tag{13}$$

или

$$f(t) = f(t_m) + \frac{t - t_m}{\xi} \cdot \xi f'(\xi). \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что теорема вытекает из соотношения (14).

ТЕОРЕМА 1′. *Дано:*

1° $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t}$,

ряд сходится при $t > 0$ *при условии* (a), *и при условии*

(b₁) $\lim\limits_{\lambda_n \to \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1$,

2° $f(t_m) = oO(1)$, $t_m \to 0$ *по последовательности* $\{t_m\}$ *такой, что*

2°a $\frac{t_m - t_{m+1}}{t_{m+1}} = oO(1)$ $(t_1 > t_2 > \ldots > t_m > t_{m+1} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0)$,

3° $a_n < oO(1)$.

При этих условиях

$$(A) \qquad f(t) = oO(1).$$

Варианты (W).

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 1.

Замечание. Оказывается, что разрядить «плотности» последовательностей 2°a в теореме 1, вообще говоря, невозможно. Нами разобран случай $\lambda_n = n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ [(1); теоремы A, $\bar{B}$, $\bar{C}$].

Относительно невозможности (или возможности) разряжения последовательности 2°a в теореме 1′ вопрос остается открытым.

Поступило
23. X. 1944

ЛИТЕРАТУРА

[1] Щеглов М. П., К вопросу о поведении степенного ряда на круге сходимости, Мат. сб., 14 (1944), No. 1–2.

[2] Щеглов М. П., Обобщение одной теоремы Hardy—Littlewood'a, Диссертация, М. Г. У., 1938.

M. SHTSHEGLOV. ON CONVERGENCE AND BOUNDEDNESS OF DIRICHLET'S SERIES

SUMMARY

In this paper we establish some criteria of coincidence of the upper and the lower limits of Dirichlet's series as well as of the power series and of the sum of its coefficients.

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 9

TABLE DES MATIERES DU TOME 9